SUP PCSI 2023-2024 Mathématiques

Programme de colle 16

Chapitre 11 Suites particulières .

Cf programme précédent.

Programmation pour trouver une valeur approchée de la limite commune de deux suites adjacentes ou la limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ quand f est contractante.

Chap 11: Limites et continuité d'une fonction réelle.

I Limites

1. **Définition des différentes limites** (finie ou infinie en un réel ou un infini) d'une fonction. Limite à droite et à gauche. Définition générale avec les voisinages. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un élément ou bord de Df non isolé. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
   - Ici $a \in \overline{\mathbb{R}}$.$f$ tend vers L en a lorsque pour tout voisinage V de L, il existe un voisinage W de a dans Df tel que $\forall x \in V, f(x) \in W$.
   - Ici $a \in \mathbb{R}$. f tend vers L en a^+ lorsque pour tout voisinage V de L, il existe un réel $r > 0$ tel que $\forall x \in]a, a+r] \cap Df, f(x) \in W$.
   - Ici $a \in \mathbb{R}$. f tend vers L en a^- lorsque pour tout voisinage V de L, il existe un réel $r > 0$ tel que $\forall x \in [a-r, a[\cap Df, f(x) \in W$.
2. **Unicité de la limite**. Limite en un point du domaine de définition.
   - Si f tend vers L_1 et L_2 en a alors $L_1 = L_2$
   - Si f est définie en a alors la seule limite possible de f en a est $f(a)$.
3. **Caractérisation d'une limite finie par majoration** :
   Si $\underline{L \in \mathbb{R}}$ et au voisinage de a, $|f(x) - L| \leq \varepsilon(x)$ et $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = L$.
4. **Caractérisation séquentielle de la limite**. f tend vers L en a sietssi pour toute suite u telle que $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim_{n\to+\infty} u_n = a \end{cases}$, $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.
5. **Caractérisation de la limite par la limite à droite et à gauche.**
   f tend vers L en a sietssi $\lim_{x\to a^+} f(x) = L = \lim_{x\to a^-} f(x)$.
6. **Application : prouver qu'une fonction n'a pas de limite quelque part.**
   f ne tend pas vers L en a dès qu'il existe une suite u telle que $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim_{n\to+\infty} u_n = a \\ \lim_{n\to+\infty} f(u_n) \neq L \end{cases}$.
   f ne tend pas vers L en a dès que $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq L$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq L$.
   f n' a pas de limite en a dès qu'il existe deux suites u et v telle que $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \text{ et } v_n \in Df \\ \lim_{n\to+\infty} u_n = a = \lim_{n\to+\infty} v_n \\ \lim_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(v_n) \end{cases}$.
   f n'a pas de limite en a dès que $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$.
7. **Caractère borné d'une fonction ayant une limite finie**. Signe d'une fonction ayant une limite strictement positive (resp. négative). Caractère non borné d'une fonction ayant une limite infinie.
   - Si f tend vers un <u>réel</u> L en a et m et m'sont deux réels tels que $m < L < m'$ alors il existe un voisinage V de a dans Df tel que $\forall x \in V, m \leq f(x) \leq m'$.
   - Si f tend vers une limite strictement positive en a alors il existe un voisinage V de a dans Df tel que $\forall x \in V, 0 < f(x)$.
8. **Théorème d'opérations sur les limites :** limite d'une valeur absolue, d'une somme, produit, quotient, limite d'une fonction produit d'une fonction bornée et d'une fonction de limite nulle, limite d'une fonction composée
   - Si b est une fonction bornée au voisinage de a et $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ alors $\lim_{x\to a} b(x)\varepsilon(x) = 0$.
   - $Si \lim_{x\to a} f(x) = L \; alors \; \lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$.
   - $Si \lim_{x\to a} f(x) = L \; et \lim_{x\to a} g(x) = L' \; et \; L + L' \; n'est\; pas\; une\; FI \; alors \; \lim_{x\to a} f(x) + g(x) = L + L'$.
   - $Si \lim_{x\to a} f(x) = L \; et \lim_{x\to a} g(x) = L' \; et \; LL' \; n'est\; pas\; une\; FI \; alors \; \lim_{x\to a} f(x) + g(x) = L + L'$.
   - $Si \lim_{x\to a} f(x) = L \; et \lim_{x\to a} g(x) = L' \; et \; \frac{L}{L'} \; n'est\; pas\; une\; FI \; et \; g$ ne s'annule pas au voisinage de a alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{L'}$
   - $Si \lim_{x\to a} f(x) = b \; et \lim_{x\to b} g(x) = L \; et \; g \circ f$ est définie au voisinage de a alors $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = L$.
9. **Changement de variable pour se ramener à une limite en zéro.**
   - Si a est un réel alors $\left(\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} f(a+t) = L\right)$ et $\left(\lim_{x\to a^\pm} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{t\to 0^\pm} f(a+t) = L\right)$
   - $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{t\to 0^\pm} f\left(\frac{1}{t}\right) = L$
10. **Théorème de limite par encadrement.**
    - Si L est un réel et $\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} g(x)$ $et\; au\; voisnage\; de\; a, f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ alors $\lim_{x\to a} h(x) = L$
    - $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \; et\; au\; voisnage\; de\; a, f(x) \leq h(x)$ alors $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$
    - $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty \; et\; au\; voisnage\; de\; a, h(x) \leq g(x)$ alors $\lim_{x\to a} h(x) = -\infty$
11. **Passage à la limite dans une inégalité**.
    - $Si \lim_{x\to a} f(x) = L \; et \lim_{x\to a} g(x) = L' \; et \; g(x) \geq f(x)$ sur un voisinage de a alors $L' \geq L$.
12. **Limite d'une fonction monotone.**
    - Si f est une fonction monotone sur $]a, b[$ alors $\lim_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existent et pour tout réel $c \in]a, b[$, $\lim_{x\to c^+} f(x)$ et $\lim_{x\to c^-} f(x)$ existent et sont finies.

- Si f est croissante sur $]a,b[$ alors $\forall c \in]a,b[$, $\lim_{x\to c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x\to c^+} f(x)$ et $\lim_{x\to a^+} f(x) = \begin{cases} inf_{]a,b[}f \; si\; f\; est\; minorée \\ -\infty \end{cases}$ et $\lim_{x\to a^-} f(x) = \begin{cases} sup_{]a,b[}f \; si\; f\; est\; majorée \\ +\infty \end{cases}$
- Si f est décroissante sur $]a,b[$ alors $\forall c \in]a,b[$, $\lim_{x\to c^+} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x\to c^-} f(x)$ et $\lim_{x\to a^+} f(x) = \begin{cases} sup_{]a,b[}f \; si\; f\; est\; majorée \\ +\infty \end{cases}$ et $\lim_{x\to a^-} f(x) = \begin{cases} inf_{]a,b[}f \; si\; f\; est\; minorée \\ -\infty \end{cases}$

II Continuité

1. **Définition d'une fonction continue** en a, continue à gauche et à droite en a , continue sur un domaine.
   - f est continue en $un\ réel\ a$ lorsque $a \in Df$ et $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
   - f est continue à droite en a lorsque $a \in Df$ et $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
   - f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.

2. **Caractérisation de la continuité par la continuité à gauche et à droite** : f continue en a sietssi $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x)$.
3. **Caractérisation séquentielle** de la continuité : f est continue en a sietssi pour toute suite u telle que $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim_{n\to+\infty} u_n = a \end{cases}$, $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.
4. **Caractère borné :** toute fonction continue en a est bornée au voisinage de a.
5. **Théorème d'opérations sur les fonctions continues** : combinaison linéaire, valeur absolue, produit, quotient et composée.
6. **Continuité des fonctions usuelles.**
7. **Prolongement par continuité**.
   f est prolongeable par continuité en a lorsque f a une limite finie en a. Lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, la fonction $\tilde{f}: \left(x \mapsto \begin{cases} f(x)\ si\ x \in Df \\ L\ si\ x = a \end{cases} \right)$ est continue en a et est appelé le prolongement par continuité en a.
8. **Fonction lipchitzienne, fonction contractante**
   f est lipschitzienne sur I lorsqu'il existe un réel M tel que : $\forall x \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. Si de plus $M \in [0,1[$ alors f est dite contractante.

III Continuité sur un intervalle

9. **Théorème des valeurs intermédiaires :** Deux versions
   si f est continue sur $[a,b]$ alors tout réel m compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un antécédent par f dans $[a,b]$.
   si f est continue sur un $\underline{intervalle\ I}$ alors $f(I)$ est un intervalle et ses extrémités sont $inf_I f$ et $sup_I f$
   Et ces conséquences :
   si f est continue sur $[a,b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés (i.e. $f(a)f(b) < 0$) alors f s'annule sur $[a,b]$.
   si f est continue et strictement monotone sur $[a,b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés (i.e. $f(a)f(b) < 0$) alors f s'annule un et une seule fois sur $[a,b]$.
   si f est continue sur $un\ intervalle\ I$ et ne s'annule pas sur I alors f ne change pas de signe sur I.
10. **Image d'un segment par une fonction continue .**
   Une fonction continue sur un segment est bornée sur ce segment et admet un minimum et un maximum sur ce segment.
11. **Théorème des bijections continues et strictement monotones**
   Si f est strictement monotone et continue sur un $\underline{intervalle\ I}$ alors
   - $f(I)$ est un intervalle de même nature que I et ses extrémités sont les limites de f aux bords de I
   - $f\ est\ bijective\ de\ I\ sur\ f(I)$ et sa bijection réciproque est continue et strictement monotone sur $f(J)$ de même monotonie que f.

IV Méthode de dichotomie

1. **Méthode**
2. **Programmation en python** pour trouver une valeur approchée d'une racine ou d'un point fixe à une précision donnée

QUESTIONS DE COURS : Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus. Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaitre :

Q1 : Soit u une suite bien définie vérifiant $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$.
- a) si $f(D) \subset D\ et\ u_0 \in D$ alors $\forall n, u_n \in D$.
- b) si $\lim_{n\to+\infty} u_n = L\ et\ f$ est continue en L alors $f(L) = L$.
- c) si f est croissante sur D et $\forall n, u_n \in D$, alors (u_n) est monotone, croissante si $u_0 \leq u_1$ et décroissante si $u_1 \leq u_0$.
- d) si f est décroissante sur D et $\forall n, u_n \in D$, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont montones et de monotonie contraire.

Q2 : Caractère bornée : $Si\ f$ tend vers un <u>réel</u> L en a et m et m'sont deux réels tels que $m < L < m'$ alors il existe un voisinage V de a dans Df tel que $\forall x \in V, m \leq f(x) \leq m'$et si $L > 0$ alors il existe un voisinage V de a dans Df tel que $\forall x \in V, 0 < f(x)$.

Q3 : Caractérisation séquentielle de la limite

Q4 $Si\ \lim_{x\to a} f(x) = L\ et\ \lim_{x\to a} g(x) = L'\ \ et\ \ L + L'\ \ n'est\ pas\ une\ FI\ \ alors\ \ \lim_{x\to a} f(x) + g(x) = L + L'$.

Q5 : Théorème de limite d'une fonction monotone

Q6 : Théorème des valeurs intermédiaires (première version) .