Corrigé du TD 13 Dérivation-Rolle - Accroissements Finis - Taylor Lagrange.

I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$.

f est dérivable en a et $f'(a) = L$ sietssi f admet le $DL_1(a)$ *suivant* : $f(x) = f(a) + L(x-a) + o_a\big((x-a)\big)$.
f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = L$ sietssi f admet le $DL_1(a^+)$ *suivant* : $f(x) = f(a) + L(x-a) + o_{a^+}\big((x-a)\big)$.

Applications : soit $f: I \to \mathbb{R}, g: I \to \mathbb{R}$ *et* $h: f(I) \to \mathbb{R}$ deux applications et $a \in I$.

1) Démontrer que si f et h sont dérivables respectivement en a et $f(a)$ alors $h \circ f$ est dérivable en a et $(h \circ f)'(a) = f'(a)h'\big(f(a)\big)$.
2) On suppose $a \in \mathring{I}$. Montrer que si f une application dérivable à droite et à gauche en a alors $\Delta_a: \left(h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}\right)$ est prolongeable par continuité en 0 .
3) Règle de (monsieur) l'Hôpital « soft ». On suppose que $I = [a, b[$ et f et g sont continues et dérivables en a et $g'(a) \neq 0$ *et* $f(a)=g(a) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

1. f et h sont dérivables en respectivement a *et* $f(a)$. Donc, f admet un $DL_1(a)$ *et* h admet un $DL_1(f(a))$. Il existe donc deux fonctions ε *et* θ telles que : $\forall x \in D, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$

et $\forall y \in E, h(y) = h(f(a)) + h'(f(a))(y - f(a)) + (y - f(a))\theta(y)$ *et* $\lim\limits_{y \to f(a)} \theta(y) = 0$.

Alors, $\forall x \in D$, $h(f(x)) = h(f(a)) + h'(f(a))(f(x) - f(a)) + (f(x) - f(a))\theta(u(x))$ *et* $\lim\limits_{x\to a} \theta(u(x)) \underbrace{=}_{par\ composition} 0$.

$$h\big(f(x)\big) = h\big(f(a)\big) + h'\big(f(a)\big)\big(f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)\big) + \big(f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)\big)\theta\big(u(x)\big)$$
$$h\big(f(x)\big) = h\big(f(a)\big) + h'\big(f(a)\big)f'(a)(x-a) + (x-a)\underbrace{\Big(f'(a)\theta\big(u(x)\big) + \varepsilon(x)\theta\big(u(x)\big) + h'\big(f(a)\big)\varepsilon(x)\Big)}_{\alpha(x)\xrightarrow[x\to a]{}0}$$

$h \circ f(x) = h \circ f(a) + h'\big(f(a)\big)f'(a)(x-a) + (x-a)\alpha(x)$ et $\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Ainsi, $h \circ f$ admet un $DL_1(a)$. J'en déduis que $h \circ f$ est dérivable en a et $(h \circ f)'(a) = h'\big(f(a)\big)f'(a)$.

2. On suppose $a \in \mathring{I}$. Je suppose que f est une application dérivable à droite et à gauche en a.

Alors $f(x) = f(a) + f'_d(a)(x-a) + o_{a^+}\big((x-a)\big)$ et $f(x) = f(a) + f'_g(a)(x-a) + o_{a^-}(x-a)$.

Alors, pour h au voisinage de 0^+, $f(a+h) = f(a) + f'_d(a)h + o_{0^+}(h)$ et $f(a-h) = f(a) + f'_g(a)(-h) + o_{0^+}(h)$.

$$\Delta_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = \frac{\big(f(a)+f'_d(a)h+o_{0^+}(h)\big)-\big(f(a)-f'_g(a)h+o_{0^+}(h)\big)}{h} = f'_d(a) + f'_g(a) + o_{0^+}(1).$$ Donc, $\lim\limits_{h\to 0^+} \Delta_a(h) = f'_d(a) + f'_g(a)$.

De même, pour h au voisinage de 0^-, $f(a+h) = f(a) + f'_g(a)h + o_{0^-}(h)$ et $f(a-h) = f(a) + f'_d(a)(-h) + o_{0^-}(h)$.

$$\Delta_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = \frac{\big(f(a)+f'_g(a)h+o_{0^-}(h)\big)-\big(f(a)-f'_d(a)h+o_{0^-}(h)\big)}{h} = f'_g(a) + f'_d(a) + o_{0^-}(1).$$ Donc, $\lim\limits_{h\to 0^-} \Delta_a(h) = f'_g(a) + f'_d(a)$.

J'en conclus que $\left(h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}\right)$ est prolongeable par continuité en 0 par la valeur $f'_g(a) + f'_d(a)$.

3. On suppose que $I = [a, b[$ et f et g sont continues et dérivables en a et $g'(a) \neq 0$ *et* $f(a) = g(a) = 0$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{car\ f(a)=g(a)=0\ et \\ f\ et\ g\ dérivables\ en\ a}}{\overbrace{=}} \frac{f'(a)(x-a)+o_a(x-a)}{g'(a)(x-a)+o_a(x-a)} = \frac{f'(a)+o_a(1)}{g'(a)+o_a(1)} \overset{\substack{pas\ de\ FI \\ car\ g'(a)\neq 0}}{\xrightarrow[x\to a]{}} \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

I Extrema et Rolle

Théorème de Rolle généralisé. Soit a un réel et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$ et tq : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que : $f'(c) = 0$.

1er cas f constante . Alors $\forall c \in]a, +\infty[$ tel que : $f'(c) = 0$.

2eme cas f non constante . Alors $\exists r \in]a, +\infty[$ tel que : $f(r) \neq f(a)$. Supposons par exemple $f(r) > f(a)$.

Sur $[a, r]$, f est continue donc $\frac{f(a)+f(r)}{2}$ admet un antécédent par f . Il existe un réel $\alpha \in]a, r[$ tel que $f(\alpha) = \frac{f(a)+f(r)}{2}$.

Sur $[r, +\infty[$, f est continue donc $\frac{f(a)+f(r)}{2}$ admet un antécédent par f . Il existe un réel $\beta \in]r, +\infty[$ tel que $f(\beta) = \frac{f(a)+f(r)}{2}$.

Travaillons sur $[\alpha, \beta]$. f est continue sur ce segment donc admet un maximum M ce segment. Il existe donc un réel $c \in]\alpha, \beta[$ tel que : $\forall x \in [\alpha, \beta], f(c) \geq f(x)$. Alors, $f(c) \geq f(r) > \frac{f(a)+f(r)}{2} = f(\alpha) = f(\beta)$. Donc, $c \in]\alpha, \beta[\subset]a, +\infty[$. Par suite, f est dérivable en c et ainsi, le théorème de condition nécessaire d'extremum assure que $f'(c) = 0$.

Rolle and Rolle and Rolle …. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in D^n([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f'(a) = f''(a) =.. = f^{(n-1)}(a) = 0 = f(b)$. Montrer que $\exists c \in]a, b[/ f^{(n)}(c) = 0$
Application : Soit $f(x) = (x^2-1)^n$. Montrer que $\exists c \in]-1,1[/ f^{(n)}(c) = 0$

$\boldsymbol{f \in D^n([a, b], \mathbb{R})}$ donc $\boldsymbol{f, f', f'', f \dots, f^{(n-1)}}$ sont dérivables donc continues sur $\boldsymbol{[a, b]}$.
De plus $f(a) = f(b)$. Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe $c_1 \in]a, b[$ tel que : $f'(c_1) = 0$.
Alors, $f'(a) = f'(c_1)$. Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe $c_2 \in]a, c_1[$ tel que : $f''(c_2) = 0$.
Alors, $f''(a) = f''(c_2)$. Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe $c_3 \in]a, c_2[$ tel que : $f^{(3)}(c_3) = 0$.
Je peux ainsi construire les réels $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ tels que $\forall k \in [\![1, n-1]\!], f^{(k)}(c_k) = 0$ et $a < c_{n-1} < c_{n-2} < \dots < c_2 < c_1 < b$.
Alors, $f^{(n-1)}(a) = f^{(n-1)}(c_{n-1})$. Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe $c \in]a, c_{n-1}[\subset]a, b[$ tel que : $f^{(n)}(c) = 0$.
Application : Soit $f(x) = (x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$. f est polynomiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. $f(1) = f(-1) = 0$.

<u>1ère méthode</u> : Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$. $f^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} u^{(p-k)}(x)v^{(k)}(x)$ où $u(x) = (x-1)^n$ *et* $v(x) = (x+1)^n$ et $v^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}$.
Comme $p \in [\![0, n-1]\!], (k \in [\![0, p]\!] \Longrightarrow n-k > 0 \Longrightarrow v^{(k)}(-1) = 0)$. Par conséquent, $\forall p \in [\![0, n-1]\!], f^{(p)}(-1) = 0$
Alors, le résultat précédent s'applique à f, il existe donc $c \in]-1,1[/ f^{(n)}(c) = 0$.

<u>2ère méthode</u> : de la factorisation $f(x) = (x-1)^{\boldsymbol{n}}(x+1)^{\boldsymbol{n}}$, je peux dire que 1 et -1 les racines de f et sont de multiplicité n dans f. Alors le cours sur les polynômes (caractérisation de la multiplicité par les polynômes dérivés) permet d'affirmer que $\forall p \in [\![0, n-1]\!], f^{(p)}(-1) = f^{(p)}(1) = 0$. Alors, le résultat précédent s'applique à f, il existe donc $c \in]-1,1[/ f^{(n)}(c) = 0$.

Soit $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux réels tq $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$. Soit $\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to \mathbb{R}$ continue sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ et dérivable sur $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$.

1) Montrer que si f' ne s'annule pas sur$]a, b[$ alors f est injective.
2) En déduire que si f' ne s'annule pas sur $]a, b[$ alors f' est de signe constant.
3) Montrer que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

1) Soit x et y deux éléments distincts de $[a, b]$. On note S le segment d'extrémités x et y. Comme f est continue sur $[a, b]$ donc sur S et dérivable sur $]a, b[$donc sur $\mathring{S}$, le théorème de Rolle assure que : $f(x) = f(y) \Longrightarrow f' s'annule\ sur\ \mathring{S} \Longrightarrow f' s'annule\ sur\ ]a, b[$. Donc par contraposée , si f' ne s'annule pas sur $]a, b[$ alors $f(x) \neq f(y)$. Donc si f' ne s'annule pas sur$]a, b[$ alors f est injective.
2) 1ère méthode : Je suppose que f' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Alors d'après 1) f est injective. Comme de plus f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, f est strictement monotone sur $[a, b]$ (résultat de cours chap 5 bijection prop 39). Par conséquent, f' garde un signe strict constant sur $]a, b[$.
2ème méthode : Je suppose que f' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Imaginons un instant que f' change de signe.
Alors il existe $c\ et\ d \in]a, b[$ tel que : $f'(c) > 0$ et $f'(d) < 0$. Alors nécessairement $c \neq d$. Supposons par exemple $c < d$. Comme f est injective (d'après 1) , $f(c) \neq f(d)$. Par exemple $f(c) < f(d)$. f est continue sur le segment $[c, d]$ donc admet un maximum M sur ce segment tel que $M = f(u)\ avec\ u \in [c, d]$.
$\lim\limits_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) > 0$. Donc il existe $\alpha \in]c, d[$ tel que $\frac{f(\alpha)-f(c)}{\alpha-c} > 0$ et par conséquent, $f(\alpha) > f(c)$. Alors $M \geq f(\alpha) > f(c)$.
$\lim\limits_{x \to d^-} \frac{f(x)-f(d)}{x-d} = f'(d) < 0$. Donc il existe $\beta \in]c, d[$ tel que $\frac{f(\beta)-f(d)}{\beta-d} < 0$ et par conséquent, $f(\beta) > f(d)$. Alors $M \geq f(\beta) > f(c)$. Ainsi, $u \in]c, d[$. Alors la condition nécessaire d'extremum permet d'affirmer que $f'(u) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse « f' ne s'annule pas ». J'en conclus que f' ne peut pas changer de signe.
3) Soit c et d deux réels de $]a, b[\ tels\ que\ f'(c) < f'(d)$. Soit m un réel compris entre $f'(c)$ et $f'(d)$. Posons $g(x) = f(x) - mx$. Alors g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $\forall x \in]a, b[, g'(x) = f'(x) - m$. Donc, $g'(c) < 0$ et $g'(d) > 0$. Comme g' change de signe sur $]a, b[$, g' s'annule sur $]a, b[$ par contraposée du résultat 2). Il existe donc un réel $u \in]a, b[$ tel que $g'(u) = 0$ et par conséquent, $f'(u) = m$. Ainsi, f' prend toutes les valeurs comprises entre $f'(c)$ et $f'(d)$.
f' possède donc la propriété des valeurs intermédiaires.

Soit $\boldsymbol{f}$ dérivable sur $[\boldsymbol{a}\ , \boldsymbol{b}]$ telle que $\boldsymbol{f'(a) = 0\ et\ f(a) = f(b)}$.
Démontrer qu'il existe un réel $\boldsymbol{c}$ dans $]\boldsymbol{a}\ , \boldsymbol{b}[$ telle que: $\boldsymbol{f(c) - f(a) = f'(c)(c - a)}$. Indication : utiliser $\boldsymbol{\varphi}: \left(\boldsymbol{x} \to \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \boldsymbol{si\ x \in]a, b]} \\ \boldsymbol{L} \text{ à } \boldsymbol{déterminer\ si\ x = a} \end{cases} \right)$.
Comment lire géométriquement ce résultat ?

Soit $\varphi: \left(x \to \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & si\ x \in]a, b] \\ 0\ si\ x = a \end{cases} \right)$.
Comme f est dérivable sur $[a\ , b]$, φ est dérivable donc continue sur $]a\ , b]$ et $\forall x \in]a, b], \varphi'(x) = \frac{f'(x)(x-a)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2}$. De plus, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = 0$ donc φ est continue en a et finalement sur $[a, b]$. De plus, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe un réel c dans $]a\ , b[$ telle que $\varphi'(c) = 0$. Par conséquent, $f'(c)(c-a) - (f(c) - f(a)) = 0$ et ainsi, $f(c) - f(a) = f'(c)(c - a)$.
Cela s'écrit aussi $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$ ce qui signifie que le coefficient directeur de la tangente T_C à Cf au point C est égale le coefficient directeur de la droite (AC) ; comme ces deux droites ont le point C en commun, cela signifie que ce sont une et une seule et même droite .
Ainsi, il existe un point C de Cf telle que $T_C = (AC)$.

Soit $f\ et\ g$ deux fonctions de classe $C^2\ sur\ [a, b]$ (ie $f'\ et\ f''$ continues sur $[a, b]$) telles que :
$f(a) = g(a)\ et\ f(b) = g(b)\ et\ \forall x \in [a, b]\ , f''(x) \leq g''(x)$. Montrer que : $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$.

Posons $\forall x \in [a, b], h(x) = g(x) - f(x)$. Alors h est de classe C^2 sur $[a, b]$.
$\forall x \in [a, b], h'(x) = g'(x) - f'(x)\ et\ h''(x) = g''(x) - f''(x) \geq 0$. Donc h' est croissante.

1ère méthode :
De plus, $h(a) = h(b) = 0$. Donc le théorème de Rolle assure que h' s'annule sur $]a, b[$ en un réel c. Par conséquent, $\forall x \in [a, c], h'(x) \leq 0\ et$ $\forall x \in [c, b], h'(x) \geq 0$. Donc h est décroissante sur $[a, c]$ et croissante sur $[c, b]$. De plus, $h(a) = h(b) = 0$.Donc nécessairement, h est positive. Ainsi, $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$.

2ère méthode :
Alors h est convexe. Donc la courbe de h se trouve en-dessous de toutes ses cordes. Or, la corde (AB) reliant $A(a, h(a))$ et $B(b, h(b))$ est la droite des abscisses puisque $h(a) = h(b) = 0$. Ainsi, la courbe de h se trouve en-dessous de l'axe des abscisses ce qui signifie que , h est négative. Ainsi, $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$.

II Accroissements finis

Théorème de Accroissements finis généralisé : Soit a et b deux réels tq $a < b$.
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ et telles que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

a) Justifier que $g(a) \neq g(b)$.
b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Indication : utiliser la fonction $\varphi: (x \mapsto f(x) - f(a) - K(g(x) - g(a)))$ où K est une constante à bien choisir !

a. La contraposée du théorème de Rolle s'applique à g. $\boldsymbol{g}$ est une fonction continue sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ et dérivable sur $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$.
Comme g' ne s'annule pas sur $]a, b[$, $g(a) \neq g(b)$.
b. Soit $\varphi: (x \mapsto f(x) - f(a) - K(g(x) - g(a)))$. Alors, φ est une fonction continue sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ et dérivable sur $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\ et\ \varphi(a) = 0$. Cherchons K tq $\varphi(b) = 0$. $\varphi(b) = 0 \Leftrightarrow f(b) - f(a) - K(g(b) - g(a)) = 0 \Leftrightarrow K = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Désormais $K = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\ et\ \varphi(b) = 0$.
Alors, le théorème de Rolle assure qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or, $\forall x \in]a, b[, \varphi'(x) = f'(x) - Kg'(x)$. Alors, $f'(c) - Kg'(c) = 0$ et par conséquent, $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = K = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Règle de (monsieur) l'Hôpital

1. **Règle de (monsieur) l'Hôpital** : Soit f et g sont deux fonctions dérivables sur $]a,b[$ et telles que :

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ et g' ne s'annule pas sur $]a,b[$ ..

Montrer, en utilisant les accroissements finis généralisés, que : $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

2. En utilisant les fonctions $f: \left(x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ et $g = id$, montrer que la réciproque de la règle de l'Hôpital est fausse.
3. **Une application pratique :** calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{cos(2x)-1}{5x^2+6x^3}$ $de\ deux\ manières$.
4. **Une application plus théorique :** Soit $f \in C^\infty([0,1[,\mathbb{R})$. On définit la fonction g : $[0\,;1[\to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & si\ x \neq 0 \\ f'(0) si\ x = 0 \end{cases}$

a. Démontrer que g est de classe C^1 sur [0,1[.

b. Exprimer pour $x \in]0,1[$ $et\ n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(x)$ en fonction des dérivées de f en x et des puissances de x.

c. En déduire que g est de classe C^∞ sur [0,1[et déterminer $g^{(n)}(0)$ On utilisera la règle de l'Hôpital ci-dessus.

1.Considérons les prolongements $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ par continuité en 0 de f et g.

Soit $x \in]a,b[$. Alors, $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont continues sur $[a,x]$ et dérivables sur $]a,x[$. Donc $\tilde{g}' = g'donc\ \tilde{g}'$ne s'annule pas sur $]a,x[$. Alors, le théorème de accroissements finis généralisé assure qu'il existe $c_x \in]a,x[$ tel que : $\frac{\tilde{f}'(c_x)}{\tilde{g}'(c_x)} = \frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(0)}$ i.e.$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$.

Or, comme $c_x \in]a,x[$, $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$ et par suite, par composition, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = L$. J'en conclus que $\lim\limits_{x\to a} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = L$.

2. $f : \left(x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ et $g = id$ sont deux fonctions dérivables sur $]0,1[$ $et \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

De plus, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \underbrace{x}_{\substack{limite\\ nulle\\ en\ 0}} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{bornée} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Mais $T(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ne tend pas vers 0 (et, en fait, n'a pas de limite en 0) puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n\pi} = 0\ et\ T\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 2\frac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$. J'en conclus que $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \nRightarrow \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Ainsi, la réciproque de la règle de l'Hôpital est fausse.

4. <u>première méthode</u> : $\frac{cos(2x)-1}{5x^2+6x^3} = \frac{-\frac{(2x)^2}{2}+o_0(x^2)}{5x^2+6x^3} = \frac{-2x^2+o_0(x^2)}{5x^2+6x^3} = \frac{-2+o_0(1)}{5+6x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{2}{5}$.

<u>deuxième méthode</u> : Posons $f(x) = cos(2x) - 1\ et\ g(x) = 5x^2 + 6x^3$. f et g sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2sin(2x)\ \ et\ \ g'(x) = 10x + 18x^2\ \ et\ \ f''(x) = -4cos(2x)\ \ et\ \ g''(x) = 10 + 36x$. Et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} g'(x)$.

Alors comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$, la règle de l'Hopital assure que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{2}{5}$.

Alors comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{2}{5}$, la règle de l'Hopital assure que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{2}{5}$.

5. Soit $f \in C^\infty([0,1[,\mathbb{R})$. On définit la fonction g : $[0\,;1[\to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \begin{cases} \overbrace{\frac{f(x)-f(0)}{x}}^{\tau(x)} & si\ x \neq 0 \\ f'(0)\ si\ x = 0 \end{cases}$

a. Comme $f \in C^\infty([0,1[,\mathbb{R}), \tau \in C^\infty(]0,1[,\mathbb{R})\ et\ par\ suite\ g \in C^\infty(]0,1[,\mathbb{R})\ et$

De plus, comme f est dérivable en 0, $\lim\limits_{x\to 0} \tau(x) = f'(0)$ ce qui signifie que g est continue en 0 et par suite g est continue en [0,1[.

Enfin, $\forall x \in]0,1[, g'(x) = \tau'(x) = \frac{xf'(x)-(f(x)-f(0))}{x^2} \underset{\substack{en\ appliquant\ T.Y\\ à\ f\ et\ à\ f'}}{\triangleq} \frac{x[f'(0)+xf''(0)+o_0(x)]-\left[f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o_0(x^2)\right]}{x^2} = \frac{\frac{f''(0)}{2}x^2+o_0(x^2)}{x^2} = \frac{f''(0)}{2} + o_0(1)$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = \frac{f''(0)}{2}$.

Alors le critère de classe C^1assure que g est de classe C^1 sur [0,1[.

b. Soit $x \in]0,1[$ $et\ n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(x) = \tau^{(n)}(x) \underbrace{=}_{\substack{en\ posant\\ u(x)=f(x)-f(0)\\ v(x)=\frac{1}{x}}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) = u(x)v^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x)$

$$g^{(n)}(x) = [f(x) - f(0)]\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}} = \frac{(-1)^n n! [f(x)-f(0)] + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(n-k)! f^{(k)}(x) x^k}{x^{n+1}}$$

c. Appliquons le critère de classe C^∞ .

τ est de classe C^∞ sur [0,1[.

Calculons la limite de $g^{(n)}$en 0 grâce à la règle de l'Hôpital :

Posons $P(x) = (-1)^n n!\,[f(x) - f(0)] + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}(n-k)!\, f^{(k)}(x) x^k$ et $Q(x) = x^{n+1}$.

P et Q sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $0 = P(0) = \lim\limits_{x\to 0} P(x)\ \ et\ 0 = Q(0) = \lim\limits_{x\to 0} Q(x)$.

$\forall x \in]0,1[, Q'(x) = (n+1)x^n$.

$$et\ P'(x) = (-1)^n n!\, f'(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}(n-k)!\left[f^{(k+1)}(x)x^k + kf^{(k)}(x)x^{k-1}\right]$$

$$= (-1)^n n!\, f'(x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\left[f^{(k+1)}(x)x^k + kf^{(k)}(x)x^{k-1}\right]$$

$$= (-1)^n n!\, f'(x) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!} f^{(k+1)}(x)x^k - (-1)^{n-k+1}\frac{n!}{(k-1)!} f^{(k)}(x)x^{k-1}\right]}_{télescopage}$$
$$= (-1)^n n!\, f'(x) + (-1)^0\frac{n!}{n!} f^{(n+1)}(x)x^n - (-1)^{n-1+1}\frac{n!}{(1-1)!} f^{(1)}(x)x^{1-1}$$
$$= (-1)^n n!\, f'(x) + f^{(n+1)}(x)x^n + (-1)^{n+1} n!\, f'(x)$$
$$= f^{(n+1)}(x)x^n$$

Donc $\frac{P'(x)}{Q'(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}$. Donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{P'(x)}{Q'(x)} \overset{\text{car } f^{(n+1)} \text{est continue en } 0}{\cong} \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$.

Donc,on peut conclure avec le critère de classe C^∞ , g est de classe C^∞ sur $[0,1[$ et $g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$.

Problème 2 Autour des accroissements finis généralisés

PARTIE I Accroissements finis généralisés

Soit a et b deux réels tq $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ et telles que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$.

c) Justifier que $g(a) \neq g(b)$.

d) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Indication : utiliser la fonction $\varphi: \big(x \mapsto f(x) - f(a) - K(g(x) - g(a)\big)$ où K est une constante à bien choisir !

1. Comme $\boldsymbol{g}$ est continue sur $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ et dérivable sur $]\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}[$, le théorème de Rolle affirme que : $\boldsymbol{g(a) = g(b) \Longrightarrow g's'annulesur\ ]a,b[}$.

Alors par contraposée, puisque g' ne s'annule pas sur $]a,b[$, $g(a) \neq g(b)$.

2. Soit $\varphi: \big(x \mapsto f(x) - f(a) - K(g(x) - g(a)\big)$ où K est une constante que l'on va choisir de sorte que φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle.

φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et $\varphi(a) = 0$. Donc prenons K tel que $\varphi(b) = 0$ i.e. $K = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Alors le théorème de Rolle assure qu' il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0\ i.e.\ f'(c) - Kg'(c) = 0$. Ainsi, $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = K = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

PARTIE II Règle de (monsieur) l'Hôpital

e) **Règle de (monsieur) l'Hôpital** : Soit a et b deux réels tq $a < b$.

Soit f et g sont deux fonctions dérivables $sur\ ]a,b[\ et$ telles que : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ et g' ne s'annule pas sur $]a,b[$ et $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Montrer, en utilisant les accroissements finis généralisés, que : $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

f) En utilisant les fonctions $f: \left(x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ et $g = id$, montrer que la réciproque de la règle de l'Hôpital est fausse.

g) **Une application pratique :** calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos(2x)-1}{5x^2+6x^3}$ $de\ deux\ manières$.

h) **Une application plus théorique :** Soit $f \in C^\infty([0,1[,\mathbb{R})$.

On définit la fonction $h : [0\,;1[\to \mathbb{R}$ telle que $h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & si\ x \neq 0 \\ f'(0) & si\ x = 0 \end{cases}$.

d. Démontrer que h est de classe C^1 sur $[0,1[$.

e. Exprimer pour $x \in]0,1[\ et\ n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}(x)$ en fonction des dérivées de f en x et des puissances de x.

f. En déduire que h est de classe C^∞ sur $[0,1[$ et déterminer $h^{(n)}(0)$. On utilisera la règle de l'Hôpital ci-dessus.

3. Soit $x \in]a,b[$. Soit $\tilde{f} : \left(t \mapsto \begin{cases} f(t)\ si\ t \in]a,x] \\ 0\ si\ t = a \end{cases}\right)\ et\ \ \tilde{g} : \left(t \mapsto \begin{cases} g(t)\ si\ t \in]a,x] \\ 0\ si\ t = a \end{cases}\right)$.

$\tilde{f}$ est continue en a car $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $\tilde{f}$ est continue et dérivable sur $]a,x]$ puisque f est continue et dérivable sur $]a,b[$ et $]a,x] \subset]a,b[$. Et $\forall t \in]a,x], \tilde{f}'(t) = f'(t)$. Idem pour $\tilde{g}$. Comme g' ne s'annule pas sur $]a,b[$, $\tilde{g}'(= g')$ ne s'annule pas sur $]a,x[$. Alors l'égalité des accroissements finis généralisés assure qu'il existe $c_x \in]a,x[$ tel que : $\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(c_x)}{\tilde{g}'(c_x)}\ i.e.\ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$. Ainsi, pour tout réel $x \in]a,b[$, il existe $c_x \in]a,x[$ tel que : $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$.

Comme $c_x \in]a,x[$, $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$ et par composition, $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = L$. Et ainsi, je peux conclure que $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

4. Soit $f : \left(x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ et $g : (x \mapsto x)$. Alors f et g sont deux fonctions dérivables $sur\ ]0,1[\ et$ telles que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \underbrace{=}_{\substack{car \\ \lim_{x\to 0} x^2=0\ et \\ \left(x\mapsto\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ bornée}} 0 = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $g' : (x \mapsto 1)$ ne s'annule pas sur $]0,1[$.

$\forall x \in]0,1[, \frac{f(x)}{g(x)} = xsin\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} \underbrace{=}_{\substack{car \\ \lim_{x\to 0} x=0\ et \\ \left(x\mapsto\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ bornée}} 0$.

Mais $\forall x \in]0,1[, \frac{f'(x)}{g'(x)} = f'(x) = 2xsin\left(\frac{1}{x}\right) - sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrons que $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Pour cela, trouvons deux suites positives et de limite nulle et dont leurs suites images par f' ont des limites différentes.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} 2xsin\left(\frac{1}{x}\right) \underbrace{=}_{\substack{car \\ \lim_{x\to 0} x=0\ et \\ \left(x\mapsto\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ bornée}} 0$, cherchons (u_n) et (v_n) telles que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = 1\ et\ \sin\left(\frac{1}{v_n}\right) = -1$.

$\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = 1 \Leftarrow \frac{1}{u_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \Leftarrow u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ et $\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = -1 \Leftarrow \frac{1}{v_n} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \Leftarrow v_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}$.

Posons $\forall n, u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ *et* $v_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = 1$ *et* $\sin\left(\frac{1}{v_n}\right) = -1$. Donc par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2u_n sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} 2v_n sin\left(\frac{1}{v}\right)$. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(u_n) = 1$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(v_n) = -1$.

J'en déduis par contraposée de la caractérisation séquentielle de la limite que f' $(=\frac{f'}{g'})$ n'a pas de limite en 0.

CCL : Soit f et g sont deux fonctions dérivables *sur* $]a,b[$ *et* telles que : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ et g' ne s'annule pas sur $]a,b[$ et Alors ($\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$) mais la réciproque de cette implication est fausse.

5. calculons $\lim\limits_{x\to 0} \frac{cos(2x)-1}{5x^2+6x^3}$

1ère méthode : Posons $f(x) = cos(2x) - 1$ *et* $g(x) = 5x^2 + 6x^3$. f et g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 10x + 18x^2 = 18x\left(x+\frac{5}{9}\right)$ et $g''(x) = 10 + 36x$. Donc g' *et* g'' ne s'annulent pas sur $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2\sin(2x)$. Donc, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} g'(x)$. On peut donc appliquer la règle de l'Hôpital à f' et g' puis f et g.

$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{-4\cos(2x)}{10+36x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$ donc la règle de l'Hôpital assure que $\frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{2}{5}$ et cette même règle permet de conclure que $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{2}{5}$.

2ème méthode : $\frac{cos(2x)-1}{5x^2+6x^3} \underbrace{\sim_0}_{\substack{car \\ \cos(t)-1\sim_0 t \\ et \lim\limits_{x\to 0} 2x=0}} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(2x)^2}{5x^2} = -\frac{2}{5}$. Donc $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{2}{5}$.

6. Soit $f \in C^\infty([0,1[,\mathbb{R})$ et $h : [0\,;1[\to \mathbb{R}$ telle que $h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & si\ x \neq 0 \\ f'(0) & si\ x = 0 \end{cases}$.

a. Posons $\tau(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \underbrace{(f(x) - f(0))}_{u(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{v(x)}$

u et v sont de classe C^∞ sur $]0,1[$ donc τ est de classe C^∞ sur $]0,1[$ donc h l'est aussi et $\forall x \in]0,1[, h'(x) = \tau'(x) = \frac{xf'(x)-(f(x)-f(0))}{x^2}$.

$h'(x) = \frac{x(f'(0)+xf''(0)+o_0(x))-(f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o_0(x^2)-f(0))}{x^2} = \frac{\frac{f''(0)}{2}x^2+o_0(x^2)}{x^2} = \frac{f''(0)}{2} + o_0(1)$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} h'(x) = 0$. Alors le critère de classe C^1 assure que h est dérivable en 0 et $h'(0) = 0$ et h est de classe C^1 sur $[0,1[$.

b. $\forall x \in]0,1[, h(x) = \underbrace{(f(x) - f(0))}_{u(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{v(x)}$. Comme u et v sont de classe C^∞ sur $]0,1[$, Leibniz assure que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,1[$,

$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x) = u(x)v^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$

$h^{(n)}(x) = \frac{(f(x)-f(0))(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}}$ car $v^{(K)}(x) = \frac{(-1)^K K!}{x^{K+1}}$ et $u^{(K)}(x) = \begin{cases} f(x) - f(0)\ si\ K = 0 \\ f^{(K)}(x)\ si\ K \geq 1 \end{cases}$.

b. Appliquons le critère de classe C^∞.

h est de classe C^∞ sur $]0,1[$, est continue en 0. Il reste à prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to 0} h^{(n)}(x) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in]0,1[, h^{(n)}(x) = \frac{(f(x)-f(0))(-1)^n n! + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)(-1)^{n-k}(n-k)!x^k}{x^{n+1}}$.

Posons $N(x) = (f(x) - f(0))(-1)^n n! + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)(-1)^{n-k}(n-k)!\,x^k$ et $D(x) = x^{n+1}$.

N et D sont dérivables sur $]0,1[$. D est continue en 0 donc $\lim\limits_{x\to 0} D(x) = D(0) = 0^{n+1} \underbrace{=}_{car\ n+1>0} 0$.

N est continue en 0 donc $\lim\limits_{x\to 0} N(x) = N(0) = (f(0) - f(0))(-1)^n n! + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0)(-1)^{n-k}(n-k)! \underbrace{0^k}_{=0\ car\ k\geq 1} = 0$.

Et, $\forall x \in]0,1[$, $D'(x) = (n+1)x^n \neq 0$.

On peut donc tenter d'appliquer la règle de l'Hôpital pour calculer $\lim\limits_{x\to 0} h^{(n)}(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{N(x)}{D(x)}$.

$\forall x \in]0,1[, D'(x) = (n+1)x^n$.

et $N'(x) = f'(x)(-1)^n n\,! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}(n-k)\,!\binom{n}{k}\left[f^{(k+1)}(x)x^k + f^{(k)}(x)kx^{k-1}\right]$

$N'(x) = f'(x)(-1)^n n! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}(n-k)!\binom{n}{k} f^{(k+1)}(x)x^k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}(n-k)\,!\binom{n}{k} f^{(k)}(x)kx^{k-1}$

$N'(x) = f'(x)(-1)^n n! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!} f^{(k+1)}(x)x^k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{(k-1)!} f^{(k)}(x)x^{k-1}$

$N'(x) = f'(x)(-1)^n n! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!} f^{(k+1)}(x)x^k - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-(k-1)}\frac{n!}{(k-1)!} f^{(k)}(x)x^{k-1}$

$N'(x) = f'(x)(-1)^n n! + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!} f^{(k+1)}(x)x^k}_{a_k} - \underbrace{(-1)^{n-(k-1)}\frac{n!}{(k-1)!} f^{(k)}(x)x^{k-1}}_{a_{k-1}}}_{somme\ télescopique} = f'(x)(-1)^n n! + a_n - a_0$

$N'(x) = f'(x)(-1)^n n! + (-1)^{n-n}\frac{n!}{n!} f^{(n+1)}(x)x^n - (-1)^n\frac{n!}{0!} f^{(1)}(x)x^0 = f^{(n+1)}(x)x^n$.

Alors $\frac{N'(x)}{D'(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x)x^n}{(n+1)x^n} = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)}$. Donc, comme $f^{(n+1)}$est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{N'(x)}{D'(x)} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)}$. Alors, la règle de l'Hôpital assure que $\lim\limits_{x\to 0} h^{(n)}(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)} \in \mathbb{R}$.

Le critère de classe C^∞permet alors de conclure que h est de classe C^∞ sur $[0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, h^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)}$.

Encadrements et inégalités obtenus grâce aux accroissements finis.

1. Montrer que : $\forall \boldsymbol{p} \in \mathbb{N}\backslash\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$, $\frac{1}{p+1} \leq \boldsymbol{ln}\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$. En déduire un encadrement de $\boldsymbol{S_n}$ ***tel que*** :

   $\boldsymbol{S_n} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \ln(\boldsymbol{n})$. Conclure à la convergence de la suite $(\boldsymbol{S_n})$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{x^2}\left(\boldsymbol{Arctan}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1}) - \boldsymbol{Arctan}(\boldsymbol{x})\right)$
3. Majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes : $\sqrt{10001} \approx 100$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists c \in [x, x+1] / Arctan(x+1) - Arctan(x) = Arctan'(c)(x+1-x) = \frac{1}{1+c^2}$.

Alors, $\frac{1}{1+(x+1)^2} \leq Arctan(x+1) - Arctan(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$ donc $\frac{x^2}{1+(x+1)^2} \leq x^2[Arctan(x+1) - Arctan(x)] \leq \frac{x^2}{1+x^2}$.

Comme $\frac{x^2}{1+(x+1)^2} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ et $\frac{x^2}{1+x^2} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(Arctan(x+1) - Arctan(x)\right) = 1$.

3.$\sqrt{10001} = \sqrt{10000+1}$. Soit $f(x \mapsto \sqrt{10000+x})$. f est de classe C^1 sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1], |f'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{10000+x}}\right| \leq \left|\frac{1}{2\sqrt{10000}}\right| = \frac{1}{200}$. Alors, l'inégalité des accroissements finis appliquée à f entre 0 et 1 assure que : $\left|\sqrt{10000+1} - 100\right| = \left|\sqrt{10000+1} - \sqrt{10000}\right| \leq \frac{1}{200}|1-0| =$. Donc 100 est une valeur approchée de $\sqrt{10001}$ à 0,005 $près$.

Soit a , b, et c trois réels. Montrer qu'il existe un réel $x \in]0,1[$ tel que : $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Posons $f(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$. Alors f est polynomiale donc continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. Alors l'égalité des accroissements finis assure qu'il existe un réel $x \in]0,1[$ tel que : $f(1) - f(0) = f'(x)(1-0)$ $i.e.$ $f'(x) = a + b + c$ $i.e.$ $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Soit a et b deux réels tq $a < b$ et $f: [a,b] \to \mathbb{R}^*$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

f continue sur l'intervalle $[a,b]$ et ne s'annule pas sur $[a,b]$ donc garde un signe strict constant sur $[a,b]$. Posons $g(x) = ln|f(x)|$.

Alors f est continue sur $[a,b]$ donc g l'est aussi. f est dérivable et ne s'annule pas sur $]a,b[$ donc g est dérivable sur $]a,b[$ (puisque la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable que sur $\mathbb{R}^*$)et $\forall x \in]a,b[, g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Alors l' égalité des accroissements finis assure qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$ i.e. $ln|f(b)| - ln|f(a)| = \frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)$.

Donc, $ln\left[\frac{|f(b)|}{|f(a)|}\right] = \frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)$ et par conséquent, $\frac{|f(b)|}{|f(a)|} = e^{\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)}$ i.e. $\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right| = e^{\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)}$. Comme f conserve le même signe sur $[a,b]$, $\frac{f(b)}{f(a)} > 0$ et ainsi, $\frac{f(b)}{f(a)} = e^{\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)}$.

On suppose que f est une application deux fois dérivable sur $]0,2[$. Soit deux réels u *et* v tels que $0 < u < v < 2$ .En utilisant à $\varphi(x) = f(x) - 2f\left(\frac{x+v}{2}\right) + f(v) + K\frac{(v-x)^2}{4}$ où K est une constante à bien choisir, démontrer que :

$\exists c \in]0,2[/ f(u) - 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) + f(v) = f''(c)\frac{(v-u)^2}{4}$.

Soit $\varphi(x) = f(x) - 2f\left(\frac{x+v}{2}\right) + f(v) + K\frac{(v-x)^2}{4}$ où K est une constante à choisir de sorte que φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle.

f est une application deux fois dérivable sur $]0,2[$ donc sur $[u,v]$ donc φ l'est aussi. Et $\forall x \in [u,v], \varphi'(x) = f'(x) - f'\left(\frac{x+v}{2}\right) + \frac{K}{2}(x-v)$. De plus, $\varphi(v) = 0$. Choisissons K tel que $\varphi(u) = 0$ i.e. $K = \frac{4\left[f(u)+2f\left(\frac{u+v}{2}\right)+f(v)\right]}{(v-u)^2}$. Alors φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et il existe donc un réel $d \in]u,v[$ tel que $\varphi'(d) = 0$ i.e. $f'(d) - f'\left(\frac{d+v}{2}\right) + \frac{K}{2}(d-v) = 0$. De plus, f'est dérivable donc continue sur $[u,v]$. Alors, l'égalité des accroissements finis assure qu'il existe un réel $c \in]u,d[$ tel que : $f'(d) - f'\left(\frac{v+d}{2}\right) = f''(c)\left(\frac{v+d}{2} - d\right)$ i.e. $f'(d) - f'\left(\frac{v+d}{2}\right) = f''(c)\left(\frac{v-d}{2}\right)$. Alors $f''(c)\left(\frac{v-d}{2}\right) + \frac{K}{2}(d-v) = 0$. Comme $d \neq v$, $\frac{v-d}{2} \neq 0$ et par conséquent, $f''(c) - K = 0$.

Ainsi, $\frac{4\left[f(u)+2f\left(\frac{u+v}{2}\right)+f(v)\right]}{(v-u)^2} = K = f''(c)$. J'en conclus que $\boldsymbol{f(u) - 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) + f(v) = f''(c)\frac{(v-u)^2}{4}}$où $c \in]u,d[\subset]u,v[$.

Justifier que si f est classe C^1 sur $[a,b]$ alors f est lipschitzienne sur $[a,b]$.

Soit f classe C^1 sur $[a,b]$. Alors f' est continue sur le segment $[a,b]$ donc y est borné. Alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in [a,b], |f'(t)| \leq M$. L'inégalité des accroissements finis assure alors que f est lipschitzienne sur $[a,b]$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ et (u_n) une suite de réels vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Déterminer les limites possibles de u .
b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. En déduire la convergence de u . On note α sa limite.
c) Donner une valeur approchée de sa limite α à 10^{-2} près .

Soient f : ($[a,b] \to \mathbb{R}$) telle que f , $f'et$ f''sont définies et continues sur $[a,b]$ et f'' est dérivable sur $]a,b[$.

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\left(f'(a) + f'(b)\right) - \frac{f^{(3)}(c)(b-a)^3}{12}$.

<u>Indication</u> : on introduira $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{(x-a)}{2}\left(f'(x) + f'(a)\right) - A(x-a)^3$ où A est une constante que l'on choisira judicieusement.

Soit $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{(x-a)}{2}\left(f'(x) + f'(a)\right) - A(x-a)^3$ où A est une constante que l'on va choisir de sorte que g vérifie les hypothèses de théorème de Rolle. g est de classe C^1sur $[a,b]$ et deux -fois dérivable sur $]a,b[$.
Et, $\forall x \in [a,b], g'(x) = \frac{1}{2}(f'(x) - f'(a)) - \frac{(x-a)}{2} f''(x) - 3A(x-a)^2$ et $\forall x \in]a,b[, g''(x) = \frac{(x-a)}{2}(f'''(x) - 12A)$.Donc, $g(a) = g'(a) = 0$.
Choisissons A tel que $g(b) = 0$. Donc, prenons $A = \frac{f(b)-f(a)-\frac{(b-a)}{2}(f'(b)+f'(a))}{(b-a)^3}$. Alors, appliquons le théorème de Rolle à g : il existe donc un réel $d \in]a,b[$ tel que : $g'(d) = 0$. Comme f' est continue sur $[a,d]$ et dérivable sur $]a,d[$ $et\ \ g'(d) = \ g'(a) = 0,$ il existe un réel $c \in]a,d[$ tel que : $g''(c) = 0$ et donc $\frac{(c-a)}{2}(f'''(c) - 12A) = 0$ et finalement , $A = \frac{f'''(c)}{12}$. Ainsi, $\frac{f(b)-f(a)-\frac{(b-a)}{2}(f'(b)+f'(a))}{(b-a)^3} = \frac{f'''(c)}{12}$ et j'en conclus que : $f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\left(f'(a) + f'(b)\right) - \frac{f^{(3)}(c)(b-a)^3}{12}$.

Soit a un réel et b un réel ou un infini tel que $a < b$.
Soit u et v deux fonctions définies sur un même segment $[a,b[$, à valeurs réelles et telles que :

- u et v sont continues sur $[a,b[$
- u et v sont dérivables sur $]a,b[$
- $\forall x \in]a,b[, |u'(x)| \le v'(x)$.

Montrer en étudiant deux « bonnes » fonctions que : $\forall x \in [a,b[, |u(x) - u(a)| \le v(x) - v(a)$.
APPLICATION : Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a;+\infty[$ telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + f'(x) = 0$. On pose $h(x) = f(x)e^x$.

a. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que : $\exists A \ge a / \forall x \ge A, |h'(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}e^x$.
b. En déduire , en utilisant 1., que $\forall x \ge A, |f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + |h(A)|e^{-x}$.
c. Justifier que : $\exists B \ge A / \forall x \ge B, |f(x)| \le \varepsilon$.
d. Qu'en déduit-on sur f ?

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}\ et\ \ f :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = L \in \mathbb{R}^*$.

1) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que : $\forall x > A, \left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$
2) Montrer que $\forall x > 0, \left|\frac{f(x)}{x} - L\right| \le \left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L\right|\left|\frac{x-A}{x}\right| + \left|\frac{AL+f(A)}{x}\right|$
3) En déduire que $f(x) \sim_{+\infty} Lx$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = L \in \mathbb{R}^*,\ \exists A \in]a,+\infty[/ \forall x \ge A, |f'(x) - L| \le \frac{\varepsilon}{4}$.
Soit $x > A$. $\frac{f(x)}{x} - L = \left(\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L\right)\frac{x-A}{x} + \frac{f(A)-AL}{x}$. Alors
$\left|\frac{f(x)}{x} - L\right| = \left|\left(\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L\right)\frac{x-A}{x} + \frac{f(A)-AL}{x}\right| \overset{1\text{ère } I.T}{\leqq} \left|\left(\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L\right)\frac{x-A}{x}\right| + \left|\frac{f(A)-AL}{x}\right|$
$\left|\frac{f(x)}{x} - L\right| \le \left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L\right|\left|\frac{x-A}{x}\right| + \left|\frac{f(A)-AL}{x}\right|$.
Or, d'après l'EAF, il existe $c_{A,x} \in [A,x]$ tel que $\frac{f(x)-f(A)}{x-A} = f'(c_x)$.
Alors, $c_x \ge A$ et par conséquent, $\left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L\right| = |f'(c_x) - L| \le \frac{\varepsilon}{4}$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-A}{x} = 1$. Donc, $\exists B > a / \forall x \ge B, \left|\frac{x-A}{x}\right| \le 2$. Alors $x \ge \max{(A,B)} \Longrightarrow \left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L\right| * \left|\frac{x-A}{x}\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$.
Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\frac{f(A)-AL}{x}\right| = 0$. Donc, $\exists C > a / \forall x \ge C, \left|\frac{f(A)-AL}{x}\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$..
Alors $x \ge \max(A,B,C) \Longrightarrow \left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L\right|\left|\frac{x-A}{x}\right| + \left|\frac{f(A)-AL}{x}\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Et par suite, $\forall x \ge \max(A,B,C), \left|\frac{f(x)}{x} - L\right| \le \varepsilon$.
J'en déduis que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = L\ et\ par\ conséquent,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{Lx} = 1$ puisque L non nul. Et ainsi, je peux conclure que $f(x) \sim_{+\infty} Lx$.

III Taylor -Lagrange

Soit f une fonction de classe $C^2\ sur\ \mathbb{R}$ telle que : $f\ et\ f''$ sont bornées. On note $M_0\ = sup|f|\ et\ M_2\ = sup\ |f''|$.

1) Soit $x\ et\ h$ deux réels . Justifier que $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \le M_2\frac{|h|^2}{2}$.
2) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^{+*}, |f'(x)| \le \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$.
3) En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$. On note M_1 =sup $|f'|$.
4) Montrer que $M_1 \le 2\sqrt{M_0 M_2}$.

1) Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f avec $a = x$ et $b = x + h$. f est de classe $C^2\ sur\ \mathbb{R}\ et\ |f''|$ est majorée par M_2 (donc f'' est bornée sur $\mathbb{R}$). Donc $T.L$ assure que $|f(b) - [f(a) + (b-a)f'(a)]| \le M_2\frac{|b-a|^2}{2}$ i.e. $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \le M_2\frac{h^2}{2}$.
2) Soit $x \in \mathbb{R}\ et\ h \in \mathbb{R}^{+*}$.

$|hf'(x)| - |f(x+h) - f(x)| \overset{car\ t\le|t|}{\leqq} \big||hf'(x)| - |f(x+h) - f(x)|\big| \overset{2^{\text{ème}}\ I.T}{\leqq} \left|hf'(x) - \left(f(x+h) - f(x)\right)\right| \overset{car\ |t|=|-t|}{=} |f(x+h) - f(x) - hf'(x)|$.
Donc, $|hf'(x)| - |f(x+h) - f(x)| \le M_2\frac{|h|^2}{2}$. Et par conséquent,$h|f'(x)| = |hf'(x)| \le |f(x+h) - f(x)| + M_2\frac{h^2}{2}$.
De plus, $|f(x+h) - f(x)| \le |f(x+h)| + |f(x)| \le 2M_1$. Il s'en suit que $h|f'(x)| \le 2M_1 + M_2\frac{h^2}{2}$ et ainsi, $|f'(x)| \le \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$ $(car\ h > 0)$.

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^{+*}, |f'(x)| \le \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$. Comme $\frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$ est indépendant de x, tous les réels de la forme $\frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$ tq $h > 0$ sont des majorants de $|f'|$. La fonction f' est donc bornée.
4) Cherchons le plus petit majorant de $|f'|$ qui soit de la forme $\frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$ tq $h > 0$.

Posons $\varphi(h)=\frac{2M_0}{h}+\frac{M_2h}{2}$. φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car son expression …). Et $\forall h>0, \varphi'(h)=-\frac{2M_0}{h^2}+\frac{M_2}{2}$.

1er cas : $M_2\neq 0$. Alors, $\varphi'(h)>0\Leftrightarrow -\frac{2M_0}{h^2}+\frac{M_2}{2}>0 \Leftrightarrow h^2>4\frac{M_0}{M_2}\Leftrightarrow h>2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$. Donc φ est décoirssante sur $]0,2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}[$ et coirssante sur $]2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}},+\infty[$ et admet donc un minimum en $2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ qui vaut $\varphi\left(2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right)=\frac{2M_0}{2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}}+\frac{M_2 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}}{2}=2\sqrt{M_0M_2}$. Comme tous les réels $\varphi(h)$ tels que $h>0$, $2\sqrt{M_0M_2}$ est un majorant de $|f'|$. DOnc $2\sqrt{M_0M_2}$ est supérieur au plus petit majorant de $|f'|$. Ainsi, $M_1\leq 2\sqrt{M_0M_2}$.

2ème cas : $M_2=0$. Alors $\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)=0$. Donc, il existe a et b constantes réelles telles que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=ax+b$. Comme $f$est bornée, $a=0$. Et par suite $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=0$. Donc $M_1=0$. Ainsi, $M_1=0=2\sqrt{M_0M_2}$. Ainsi, $M_1\leq 2\sqrt{M_0M_2}$.

Soit f et g deux fonctions de classe C^3impaires et telles que $g^{(3)}(0)\neq 0$ .Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2f(2x)+f(3x)}{g(x)-2g(2x)+g(3x)}$.

D'après Taylor-Young , $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+o_0(x^3)$. De plus, comme f est impaire, $f(0)=f''(0)=0$.

Donc, $f(x)=f'(0)x+\frac{f'''(0)}{6}x^3+o_0(x^3)$.

Alors comme $\lim\limits_{x\to 0}2x=\lim\limits_{x\to 0}3x=0, f(2x)=2f'(0)x+8\frac{f'''(0)}{6}x^3+o_0(x^3)$ et $f(3x)=3f'(0)x+9\frac{f'''(0)}{6}x^3+o_0(x^3)$.

De même, $g(x)=g'(0)x+\frac{g'''(0)}{6}x^3+o_0(x^3)$, $g(2x)=2g'(0)x+8\frac{g'''(0)}{6}x^3+o_0(x^3)$ et $g(3x)=3g'(0)x+9\frac{g'''(0)}{6}x^3+o_0(x^3)$.

Alors, $\frac{f(x)-2f(2x)+f(3x)}{g(x)-2g(2x)+g(3x)}=\frac{f'(0)x+\frac{f'''(0)}{6}x^3-2\left(2f'(0)x+8\frac{f'''(0)}{6}x^3\right)+3f'(0)x+9\frac{f'''(0)}{6}x^3+o_0(x^3)}{g'(0)x+\frac{g'''(0)}{6}x^3-2\left(2g'(0)x+8\frac{g'''(0)}{6}x^3\right)+3g'(0)x+9\frac{g'''(0)}{6}x^3+o_0(x^3).}=\frac{\frac{4f'''(0)}{3}x^3+o_0(x^3)}{\frac{4g'''(0)}{3}x^3+o_0(x^3)}=\frac{f'''(0)+o_0(1)}{g'''(0)+o_0(1)}$.

Alors ,comme $g'''(0)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2f(2x)+f(3x)}{g(x)-2g(2x)+g(3x)}\overset{\substack{pas\ de\ FI\\ car\ g'''(0)\neq 0}}{\triangleq}\frac{f'''(0)}{g'''(0)}$.

1. Trouver une valeur approchée rationnelle de $ln\left(\frac{11}{10}\right)$ à $10^{-4}\ près$. (taylor Lagrange)
2. Démontrer que pour tout réel $x\in[0,\pi]$, $\cos(x)\geq 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$ (Taylor reste intégral) .

$ln\left(\frac{11}{10}\right)=ln\left(1+\frac{1}{10}\right)$.

$g:(t\mapsto \ln(1+t))$ est de classe C^∞sur $[0,\frac{1}{10}]$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall t\in[0,\frac{1}{10}], g^{(n+1)}(t)=\frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}$ donc $\left|g^{(n+1)}(t)\right|=\frac{n!}{(1+t)^{n+1}}\leq n!$.

Donc, comme $0\in[0,+\infty[$, l' inégalité de Taylor Lagrange assure que $\forall n\in\mathbb{N}^*\forall t\in[0,\frac{1}{10}],$, $\left|g(t)-P_{n,\ln(1+t),0}(t)\right|\leq n!\frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$.

En particulier pour $t=\frac{1}{10}, \forall n\in\mathbb{N}^*, \left|\ln\left(\frac{11}{10}\right)-P_{n,\ln(1+t),0}\left(\frac{1}{10}\right)\right|\leq\frac{n!}{(n+1)!}\left|\frac{1}{10}\right|^{n+1}=\frac{1}{(n+1)10^{n+1}}$.

Cherchons le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{1}{(n+1)10^{n+1}}<10^{-4}$.

$\frac{1}{(n+1)10^{n+1}}<10^{-4}\Leftrightarrow\frac{1}{(n+1)}<10^{-4+n+1}\Leftrightarrow\frac{1}{(n+1)}<10^{n-3}\Leftrightarrow-\ln(n+1)<(n-3)\ln(10)\Leftrightarrow(n-3)\ln(10)+\ln(n+1)>0$.

Posons $h(t)=(t-3)\ln(10)+\ln(t+1)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}^+\ et\ \forall t\geq 0, h'(t)=\ln(10)+\frac{1}{t+1}>0$.

Donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $h(2)<0<h(3)$. Donc $n=3$ est le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{1}{(n+1)10^{n+1}}<10^{-4}$.

Alors, $\left|\ln\left(\frac{11}{10}\right)-P_{3,\ln(1+t),0}\left(\frac{1}{10}\right)\right|\leq\frac{1}{(4+1)10^{3+1}}<10^{-4}$.

Donc $P_{3,\ln(1+t),0}\left(\frac{1}{10}\right)=\sum_{k=1}^{3}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{1}{10^k}=\frac{1}{10}-\frac{1}{2}\frac{1}{10^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{10^3}=\frac{143}{1500}$ est une valeur approchée rationnelle de $ln\left(\frac{11}{10}\right)$ à 10^{-4}près.

Calculer la limite de S ,T définies par : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$, $T_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-3)^k}{(2k+1)!}$

1. $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=-P_{n,\ln(1+t),0}(1)$.

$g:(t\mapsto\ln(1+t))$ est de classe C^∞sur $[0,+\infty[$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall t\geq 0, g^{(n+1)}(t)=\frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}$ donc $\left|g^{(n+1)}(t)\right|=\frac{n!}{(1+t)^{n+1}}\leq n!$.

Donc, comme $0\in[0,+\infty[$, l' inégalité de Taylor Lagrange assure que $\forall n\in\mathbb{N}^*\forall t\in[0,+\infty[$, $\left|g(t)-P_{n,\ln(1+t),0}(t)\right|\leq n!\frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$.

En particulier pour $t=1, \forall n\in\mathbb{N}^*, \left|g(1)-P_{n,\ln(1+t),0}(1)\right|\leq\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}$ i.e. $\forall n\in\mathbb{N}^*, |\ln(2)+\ S_n|\leq\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$, je peux conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}\ S_n=-\ln(2)$.

2. $T_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-3)^k}{(2k+1)!}=\ P_{2n+1,\mathrm{sh},0}(-3)$.

sh est de classe C^∞sur $[-3,3]$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall t\in[-3,3]$, $\left|sh^{(2n+2)}(t)\right|\leq ch(3)$.

Donc, comme $0\in[-3,3]$,l' inégalité de Taylor-Lagrange assure que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\forall t\in[0,+\infty[$, $\left|sh(t)-P_{2n+1,\mathrm{sh},0}(t)\right|\leq ch(3)\frac{|t|^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

En particulier pour $t=-3, \forall n\in\mathbb{N}^*, \left|sh(-3)-P_{n,sh,0}(-3)\right|\leq ch(3)\frac{3^{2n+2}}{(2n+2)!}$ i.e. $\forall n\in\mathbb{N}^*, |-sh(3)-\ \ T_n|\leq ch(3)\frac{3^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^n}{n!}\overset{CC}{\triangleq}0, \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^{2n+2}}{(2n+2)!}=0$ $\left(puisque\ \left(\frac{3^{2n+2}}{(2n+2)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}est\ extraite\ de\ \left(\frac{3^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$. Ainsi, je peux conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}\ \ T_n=-\mathrm{sh}(3)$.

Soit $f\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}, \left|f^{(n)}(x)\right|\leq|x|$.

1) Soit $n\in\mathbb{N}$ .Déterminer le polynôme de Taylor en 0 de f de rang n.
2) En déduire, en utilisant Taylor-Lagrange, que f est la fonction nulle.

1) $\forall n\in\mathbb{N}, \left|f^{(n)}(0)\right|\leq|0|=0$ donc $f^{(n)}(0)=0$. Donc, $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}, P_{n,f,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=0$. Ainsi, tous les polynômes de Taylor en 0 de f sont nuls.
2) Soit x un réel non nul et S le segment d'extrémités 0 et x. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f sur S :

$f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in S, |f^{(n)}(t)| \leq |t| \leq |x|$. Donc l'$I.T.L$ assure que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in S$, $\left|f(t) - \underbrace{P_{n,f,0}(t)}_{=0}\right| \leq |x| \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$, en particulier pour $t = x$, j' obtiens $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(x)| \overset{(**)}{\lesseqgtr} |x| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Or les croissances comparées pour les suites assurent que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^n}{(n)!} = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} |x| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} |f(x)| = |f(x)|$. Alors en passant à la limite $n \to +\infty$ dans l'inégalité$(**)$, j'obtiens : $|f(x)| \leq 0$. Ainsi, je peux conclure que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 0$. Cette égalité étant encore vraie pour $x = 0$, nous pouvons conclure que f est la fonction nulle.

Soit f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle $[a,b]$ telle que : $f'(a) = f'(b) = 0$

1) Justifier que f'' s'annule sur $[a,b]$.
2) Justifier qu'il existe un réel M tel que : pour tout x dans $[a,b]$, $|f''(x)| \leq M$.
3) Démontrer en appliquant deux fois la formule de Taylor-Lagrange que : $|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{4} M$.
4) On suppose que $b = f(b) = 1$ *et* $a = f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un réel c dans $[a,b]$ tel que : $|f''(c)| \geq 4$.

1) On peut appliquer le théorème de Rolle à f'qui en vérifie toutes les hypothèses. Il existe donc un réel $c \in [a,b]$ tel que $f''(c) = 0$
2) f'' est continue sur le segment $[a,b]$donc y est bornée autrement dit, $|f''|$ est majorée sur ce segment. Il existe donc un réel M tel que : pour tout x dans $[a,b]$, $|f''(x)| \leq M$.
3) Appliquons Taylor-Lagrange entre $x = b$ et $y = \frac{a+b}{2}$, $\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(b) + \underbrace{f'(b)}_{=0}\left(\frac{a+b}{2} - b\right)\right| \leq \frac{\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2}{2} M$ i.e. $\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(b)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{8} M$.

Appliquons aussi Taylor-Lagrange entre $x = a$ et $y = \frac{a+b}{2}$, $\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) + \underbrace{f'(a)}_{=0}\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\right| \leq \frac{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2}{2} M$ i.e. $\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{8} M$

Alors $|f(b) - f(a)| = \left|f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)\right| \leq \left|f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)\right| \leq 2\frac{(b-a)^2}{8} M = \frac{(b-a)^2}{4} M$.

4) Alors $M \geq 4$. Comme $|f''|$est continue sur le segment $[a,b]$, $|f''|$ admet un maximum sur ce segment et on peut choisir $M = max_{[a,b]}|f''|$. Et il existe un réel c tel que $|f''(c)| = M$.Alors $|f''(c)| \geq 4$.

IV Convexité

Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Etudier la convexité et les points d'inflexion de f.

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2xe^{-x^2}$ *et* $f''(x) = (-2 + 4x^2)e^{-x^2} = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = 4\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2}$. Donc, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \notin \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Alors, f est concave sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et convexe ailleurs et Cf admet en $-\frac{1}{\sqrt{2}}$et en $\frac{1}{\sqrt{2}}$deux points d'inflexion.

Soit $f: [0 + \infty[\to \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite L , finie ou infinie, quand $x \to +\infty$.
2. On suppose que L est finie. Montrer que $\psi: (x \mapsto f(x) - Lx)$ est décroissante et admet une limite quand $x \to +\infty$.

1. $\varphi: \left(x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x}\right)$ est croissante puisque f est convexe donc $\varphi(x)$ admet une limite L , finie ou infinie, quand $x \to +\infty$.
Or, $\forall x > 0, \frac{f(x)}{x} = \varphi(x) + \frac{f(0)}{x}$.Donc, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = L + 0 = L$.
Rque : Si L est réel et non nul alors $f(x) \sim_{+\infty} Lx$.
2. On suppose que L est finie. Soit $\psi: (x \mapsto f(x) - Lx)$. Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tel que $x < y$.
Alors $\psi(y) - \psi(x) = f(y) - Ly - (f(x) - Lx)) = f(y) - f(x) + L(x - y) = [\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - L](y - x)$
De plus, $(y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x})$ est croissante puisque f est convexe . Et $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(y)}{y} * \frac{y}{y-x} - \frac{f(x)}{y-x}$. Donc $\lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = L$. Par conséquent, la fonction $(y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x})$ tend en croissant vers L. Ainsi, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq L$. Et comme $(y - x) \geq 0, \psi(y) - \psi(x) \leq 0$. J'en déduis que ψ est décroissante. Et par conséquent, ψ a une limite en $+\infty$.

Soit I et J deux intervalles, $f: (I \to J)$ une fonction convexe et $g: (J \to \mathbb{R})$ une fonction. Montrer que :

- si g est convexe et croissante alors la composée $g \circ f$ est convexe
- si g est concave et décroissante alors la composée $g \circ f$ est concave.

Je suppose g est convexe et croissante . Soit x et y deux éléments de I et $\lambda \in [0,1]$.
Comme f est convexe, $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.
De plus, toutes les images par f sont éléments de J donc $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in J$ *et* $f(x) \in J$ *et* $f(y) \in J$. Comme $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ est un réel compris entre $f(x)$ et $f(y)$, deux éléments de l'intervalle J , $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ est aussi dans l'intervalle J
Alors comme g est croissante sur J, $g(f(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq g(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))$.
Enfin, g étant convexe, $g(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) \leq \lambda g(f(x)) + (1 - \lambda)g(f(y))$.
Même preuve pour g concave et décroissante.

V Des équations fonctionnelles avec hypothèses de dérivabilité

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que : pour tous réels x *et* y , $f(x + y) = f(x^2) + f(y)$. Montrer que f est nulle.

Alors $f(0) = f(0 + 0) = f(0^2) + f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$.
Fixons $y \in \mathbb{R}$.

- Les fonction $u: (x \mapsto f(x + y)), v: (x \mapsto f(x^2))$ *et* $w: (x \mapsto f(y))$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = v'(x) + w'(x)$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x + y) = 2xf'(x^2) + 0$. En particulier, pour $x = 0, f'(y) = 0$. Ainsi, $\forall y, f'(y) = 0$.Cela implique que f est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et comme $f(0) = 0$, f est la fonction nulle.
OU BIEN

- Par définition, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x+y)-f(y)}{x}=f'(y)$. De plus, $\forall x\neq 0, \frac{f(x+y)-f(y)}{x}=\frac{f(x^2)}{x}=\frac{f(x^2)-0}{x^2-0}x$.

Or, f est dérivable en 0 donc $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)\in\mathbb{R}$. Donc par composition, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}=f'(0)\in\mathbb{R}$. Par conséquent, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x+y)-f(y)}{x}=f'(0)\times 0=0$. Ainsi, par unicité de la limite $f'(y)=0$. Cela implique que f est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et comme $f(0)=0$, f est la fonction nulle.

Montrer qu'il existe une unique fonction f définie, positive et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ telle que : $f(0)=0$ et $\forall x\geq 0, f'(x)\leq f(x)$.

La fonction nulle est solution.

Soit une fonction f définie, positive et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et telle que : $f(0)=0$ et $\forall x\geq 0, f'(x)\leq f(x)$.

Posons $g(x)=f(x)e^{-x}$. Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ *et* $\forall x\geq 0, g'(x)=\big(f'(x)-f(x)\big)e^{-x}\leq 0$. Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $g(0)=0$, g est négative sur $\mathbb{R}^+$. Et par conséquent, f est négative sur $\mathbb{R}^+$. Comme, de plus, f est positive sur $\mathbb{R}^+$, f est nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi la fonction définie et nulle sur $\mathbb{R}^+$ est la seule fonction définie, positive et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ telle que : $f(0)=0$ et $\forall x\geq 0, f'(x)\leq f(x)$.

Déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$,dérivables ,et vérifiant :$\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^{+*})^2, f(xy)=f(x)+f(y)$.

La fonction nulle est solution.

Soit f une solution. Alors f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$,dérivable et $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^{+*})^2, f(xy)=f(x)+f(y)(**)$.

Alors $f(1)=f(1\times 1)=f(1)+f(1). Donc\ f(1)=0$.

Fixons $y\in\mathbb{R}^{+*}$.

Par définition, $\lim_{t\to y}\frac{f(t)-f(y)}{t-y}=f'(y)$. Donc par composition,

$\lim_{x\to 1}\frac{f(xy)-f(y)}{xy-y}=f'(y)$.

Or, $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\backslash\{1\}, \frac{f(xy)-f(y)}{xy-y}\overset{par\ (**)}{=}\frac{f(x)}{(x-1)y}\overset{car\ f(1)=0}{=}\frac{1}{y}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)}$.

Donc $\lim_{x\to 1}\frac{f(xy)-f(y)}{xy-y}=\frac{1}{y}f'(1)$.

Alors, par unicité de la limite, $f'(y)=\frac{1}{y}f'(1)=\frac{a}{y}$ où $a\in\mathbb{R}$. Ainsi, il existe une constante réelle a telle que : $\forall y>0, f(y)=\frac{a}{y}$.

OU BIEN

$u:(x\mapsto f(xy))\ \ et\ v:\big(x\mapsto f(x)+f(y)\big)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}\ et\ \forall x>0, u(x)=v(x)$.

Donc, $\forall x>0, u'(x)=v'(x)$ i.e. $\forall x>0\ yf'(xy)=f'(x)$. Ainsi, $\forall x>0, \forall y>0,\ yf'(xy)=f'(x)$. En particulier pour $x=1$, $\forall y>0,\ yf'(y)=f'(1)$ donc $f'(y)=\frac{a}{y}$ où $a\ constante$.

J'en déduis qu'il existe a et b deux constantes réelle telles que : $\forall y>0, f(y)=aln(y)+b$. Mais comme $f(1)=0$, nécessairement $b=0$. J'en conclus que : $f(y)=aln(y)$.

Donc les solutions de notre problème sont nécessairement de la forme $(x\mapsto aln(x))$ où a constante réelle.

Réciproquement : toutes ces fonctions de la forme $(x\mapsto aln(x))$ où a constante réelle sont-elles solutions ?

Chacun de ces fonctions est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^{+*})^2, aln(xy)=a(\ln(x)+\ln(y)=aln(x)+aln(y)$.

Donc toutes les fonctions de la forme $(x\mapsto aln(x))$ où a constante réelle sont solutions . J'en conclus que ce sont exactement les solutions.

Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et telles que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=x^2+\int_0^x(x-t)f(t)dt$.

Déterminer toutes les fonctions dérivables en 0 et telles que : $\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}, f(x+y)=f(x)f(y)$.

L'exponentielle et les fonctions constantes égales à 0 et à 1 sont solutions.

Soit f une solution. Alors f est dérivable donc continue en 0 et $\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}, f(x+y)=f(x)f(y)$.

Alors $f(0)=f(0+0)=f(0)f(0)$. Donc $f(0)=0$ ou $f(0)=1$.

Fixons $y\in\mathbb{R}$. Donc, $u:\big(x\mapsto\ f(x+y)\big)\ et\ v:\big(x\mapsto f(x)f(y)\big)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x, u'(x)=v'(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x+y)=f'(x)f(y)$. En particulier pour $x=0, f'(y)=f'(0)f(y)$. Ainsi, il existe un réel $a\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall y, f'(y)=af(y)$.

f est donc solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et homogène : $z'-az=0$

Alors il existe une constante k réelle telle que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=ke^{ax}$. Comme $f(0)=0$ ou $f(0)=1$, $k=0$ ou $k=1$.

Ainsi, les soutions de notre pble sont nécessairement de la forme $(x\mapsto 0)\ ou\ \ (x\mapsto e^{ax})$ tq $a\in\mathbb{R}$.

Réciproquement : la fonction nulle est solution mais toutes ces fonctions de la forme $(x\mapsto e^{ax})$ où a constante réelle sont-elles solutions ?

Chacun de ces fonctions est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, e^{a(x+y)}=e^{ax+ay}=e^{ax}e^{xb}$

Donc toutes les fonctions de la forme $(x\mapsto e^{ax})$ où a constante réelle sont solutions . J'en conclus que la fonction nulle et les fonctions de la forme $(x\mapsto e^{ax})$ où a constante réelle sont exactement les solutions.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :pour tout $x\in\mathbb{R}$,$f(x)=1-\int_0^x(x-t)f(t)dt$. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f''(x)+f(x)=0$.
En déduire que $f=cos$.