VACANCES DE FEVRIER

- **Travaillez <u>vos cours</u> sur la dérivation, intégration et les exercices en lien avec le cours : vous devez savoir quel point de cours vous appliquez à chaque étape.**
- **Préparez le DC de la rentrée. Préparez vos colles. Exercez-vous encore sur les exercices corrigés suivants :**
- **Cherchez le DL**

DERIVATION

Rolle : Soit f dérivable sur $[a\,,b]$ telle que $f'(a) = 0$ et $f(a) = f(b)$. Démontrer qu'il existe un réel c dans $]a\,,b[$ telle que: $f(c) - f(a) = f'(c)(c-a)$.Décrire géométriquement ce résultat. <u>Indication</u> : utiliser φ: $\left(x \to \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \; si \; x \in]a,b] \\ L \text{ à } déterminer \; si \; x = a \end{cases}\right)$.

Egalité des accroissements finis : Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $\frac{1}{p+1} \leq ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$. On pose $S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$. Démontrer la convergence de (S_n).

Egalité des accroissements finis : Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\frac{1}{(x+1)^2+1} \leq Arctan(x+1) - Arctan(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$.

En déduire $Arctan(x+1) - Arctan(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$ puis $\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)} = 1 + \frac{2}{\pi x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et calculer $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Egalité des accroissements finis : Soit $f \in D^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que : $\forall x > 0, \exists c > 0 / f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$.

Inégalité des accroissements finis : Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+x}$ et (u_n) la suite de réels vérifiant : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n exsiste et $\forall n \geq 1, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
b) Déterminer les limites possibles des suites (u_n) , (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
c) Justifier que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. On note α leur limite commune. Qu'en déduit-on sur (u_n) ?
d) Montrer que : $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $|f\,'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
e) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Retrouver la convergence de u .
f) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Donner une valeur approchée rationnelle de $\sqrt{5}$ à ε près . Créer un programme pour la calculer.

Taylor-Lagrange : Montrer que : $\forall h \in [-1;1], \forall x > 0, |e^{-hx} - 1 + hx| \leq \frac{h^2x^2}{2} e^x$.

Critère de classe C^∞: Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \; si \; x > 0 \\ 0 \; si \; x \leq 0 \end{cases}$. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = o_0(x^n)$.

INTEGRATION

Inégalités : Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} sin^n(t)dt$ et $v_n = \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt$.

a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right], 0 \leq sin^n(t) \leq sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Que peut-on dire de la suite $\left(sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$?
c) En déduire que: $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0,\; 0 \leq u_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
d) Conclure que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt = 0$.

Sommes de Riemann : Calculer les limites quand $n \to +\infty$ de $w_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)}$ et $s_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}$

Lemme d'annulation : Soit f et g deux fonctions réelles et continues sur [0,1] telles que : $\int_0^1 f^2(t) + f(t)g(t) + g^2(t)dt = 0$. Montrer que $\forall t \in [0,1], f(t) = g(t) = 0$.

Théorème fondamental de l'intégration et théorème fondamental de calcul intégral : Soit f: $\left(x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt\right)$.

1) Justifier que f est définie, continue et dérivable sur $]1, +\infty[$ et sur $]0,1[$.
2) Déterminer les variations de f sur $]0,1[\cup]1, +\infty[$.

Croissance de l'opérateur intégral. Limite par encadrement et accroissements finis (fin de l'exo précédent)

3) Déterminer les limites de f en 0 puis $+\infty$.
4) Soit $x \in]1,+\infty[$. Montrer, grâce à l'égalité des accroissements finis, que $\forall t \in [x, x^2]$. $\frac{1}{x^2} \leq \frac{\ln(t)}{t-1} \leq 1$.
5) En déduire la limite de f en 1^+.
6) Déterminer la limite de f en 1^-.

Inégalité de Cauchy-Schwarz Soit u et v deux fonctions continues sur [0,1],réelles, positives et telles que : $\forall x \in [0,1], u(x)v(x) \geq 1$. Montrer que $\left[\int_0^1 u(x)dx\right] \times \left[\int_0^1 v(x)dx\right] \geq 1.$

Corrigé

DERIVATION :

Rolle : Soit f dérivable sur $[a\,,b]$ telle que $f'(a)=0\ et\ f(a)=f(b)$. Démontrer qu'il existe un réel c dans $]a\,,b[$ telle que: $f(c)-f(a)=f'(c)(c-a)$. Comment décrire géométriquement ce résultat ?

Indication : utiliser $\varphi:\left(x\rightarrow\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ si\ x\in]a,b]\\ L\ \text{à déterminer}\ si\ x=a\end{cases}\right)$.

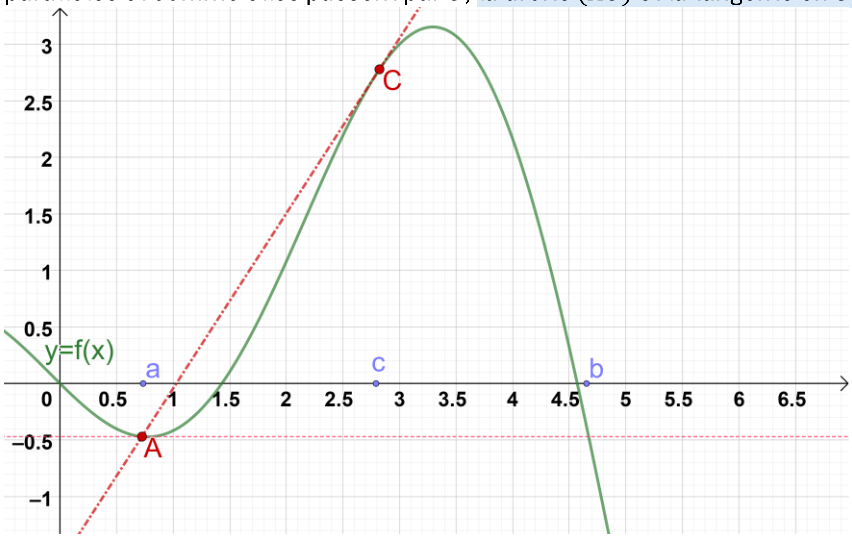
Posons $\varphi:\left(x\rightarrow\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ si\ x\in]a,b]\\ L\ si\ x=a\end{cases}\right)$ où L est à choisir et posons $\forall x\in]a,b],g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Comme f est dérivable donc continue sur $[a,b]$, g est continue et dérivable sur $]a,b]$ et par suite, φ est continue et dérivable sur $]a,b]$. Je vais choisir L de sorte de φ soit continue en a. Je sais que $\lim\limits_{x\to a}g(x)=f'(a)=0$ puisque f est dérivable en a ; je vois prendre $L=f'(a)=0$. Alors φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b]$ donc sur $]a,b[$ et $\varphi(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\underbrace{=}_{car\ f(b)=f(a)}0=\varphi(a)$. Alors le théorème de Rolle assure qu'il existe un réel $c\in]a,b[$ tel que : $\varphi'(c)=0$. Or, $\forall x\in]a,b[,\varphi'(x)=g'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2}$.

Ainsi, $\frac{f'(c)(c-a)-(f(c)-f(a))}{(c-a)^2}=0$ et finalement, $f(c)-f(a)=f'(c)(c-a)$.

Interprétation géométrique :

On a donc $\underbrace{\frac{f(c)-f(a)}{c-a}}_{pente\ de\ la\ droite\ (AC)}=\underbrace{f'(c)}_{pente\ de\ la\ tanagente\ au\ point\ C(c,f(c))}$. Les deux pentes étant égales, la droite (AC) et la tangente en C sont parallèles et comme elles passent par C, la droite (AC) et la tangente en C sont confondues.



Egalité des accroissements finis :

1. Montrer que : $\forall p\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\},\ \frac{1}{p+1}\le ln\left(\frac{p+1}{p}\right)\le\frac{1}{p}$. On pose $S_n=\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}_{T_n}-\ln(n)$. Démontrer la convergence de (S_n).

On doit prouver que $\forall p\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\},\ \frac{1}{p+1}\le ln(p+1)-\ln(p)\le\frac{1}{p}$.

Posons $f(x)=\ln(x)$. f est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$.

Soit $p\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. f est continue sur $[p,p+1]$ et dérivable sur $]p,p+1[$ donc l'égalité des accroissements finis assure qu'il existe un réel $c\in]p,p+1[$ tel que : $f'(c)=\frac{f(p+1)-f(p)}{(p+1)-p}=f(p+1)-f(p)$. On a donc :

$\ln(p+1)-\ln(p)=\frac{1}{1+c}$. Or, $0<p<c<p+1$ donc $\frac{1}{p+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{p}$. Donc, $\frac{1}{p+1}<\ln(p+1)-\ln(p)=\ ln\left(\frac{p+1}{p}\right)<\frac{1}{p}$ $(**)$.

Prenons $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$. Alors, en sommant $(**)$,j^' obtiens $\sum_{p=2}^{n-1}\frac{1}{p+1}\le\underbrace{\sum_{p=2}^{n-1}ln(p+1)-\ln(p)}_{somme\ télescopique}<\sum_{p=2}^{n-1}\frac{1}{p}$. Donc,

$\sum_{p=3}^{n}\frac{1}{p}\le\ln(n)-\ln(2)<\sum_{p=2}^{n-1}\frac{1}{p}$; donc, $-1-\frac{1}{2}+\underbrace{\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}}_{T_n}\le\ln(n)-\ln(2)<-\frac{1}{n}-1+\underbrace{\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}}_{T_n}$ et ainsi,

$1-\ln(2)\le 1+\frac{1}{n}-\ln(2)\le S_n=T_n-\ln(n)\le\ln(2)+\frac{3}{2}$. La suite (S_n) est donc bornée.

De plus, $S_{n+1}-S_n=T_{n+1}-T_n-\ln(n+1)+\ln(n)=\frac{1}{n+1}-[\ln(n+1)-\ln(n)]\le 0$. Donc La suite (S_n) est donc décroissante. J'en déduis que (S_n) est donc convergente.

2. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \frac{1}{(x+1)^2+1}\le Arctan(x+1)-Arctan(x)\le\frac{1}{x^2+1}$.

En déduire : $Arctan(x+1)-Arctan(x)\sim_{+\infty}\frac{1}{x^2}$ puis $\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}=1+\frac{2}{\pi x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

- Soit $x > 0$. $Arctan$ est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. Donc l'égalité des accroissements finis assure qu'il existe $c \in]x, x+1[$ tel que : $Arctan(x+1) - Arctan(x) = Arctan'(c)(x+1-x) = \frac{1}{1+c^2}$.

Comme $c \in]x, x+1[$, $\frac{1}{1+(x+1)^2} . \leq \frac{1}{1+c^2} . \leq \frac{1}{1+x^2}$. Ainsi, $\frac{1}{(x+1)^2+1} \leq Arctan(x+1) - Arctan(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$ valable pour tout réel $x > 0$.

Enfin, $\frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{4} = Arctan(1) - Arctan(0) \leq \frac{1}{1}$. Ainsi, $\forall x \geq 0, \frac{1}{(x+1)^2+1} \leq Arctan(x+1) - Arctan(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$

- Soit $x > 0$. $\frac{x^2}{(x+1)^2+1} \leq x^2[Arctan(x+1) - Arctan(x)] = \frac{Arctan(x+1)-Arctan(x)}{\frac{1}{x^2}} \leq \frac{x^2}{x^2+1}$.

Or, $\frac{x^2}{x^2+1} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ et , $\frac{x^2}{(x+1)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+2x+2} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$. Donc les deux fonctions qui encadrent $\frac{Arctan(x+1)-Arctan(x)}{\frac{1}{x^2}}$ tendent vers 1 quand $x \to +\infty$; j'en déduis que $\lim_{x\to+\infty} \frac{Arctan(x+1)-Arctan(x)}{\frac{1}{x^2}} = 1$.

J'en conclus que $Arctan(x+1) - Arctan(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$.

- $Arctan(x+1) - Arctan(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$ donc $\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)} - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{Arctan(x)x^2}$. Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{Arctan(x)} = \frac{2}{\pi} \neq 0$. Donc $\frac{1}{\arctan(x)} \sim_{+\infty} \frac{2}{\pi}$ et par conséquent, $\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)} - 1 \sim_{+\infty} \frac{2}{\pi x^2}$. Ainsi, $\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)} = 1 + \frac{2}{\pi x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{2}{\pi x^2}\right) = 1 + \frac{2}{\pi x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

$$\left(\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}\right)} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{2}{\pi x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} \overset{\substack{car \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\pi x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0 \\ et \ln(1+u)=u+o_0(u)}}{\cong} e^{\frac{1}{x^2}\left[\frac{2}{\pi x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]} = e^{\frac{2}{\pi}+o_{+\infty}(1)]}$$. Ainsi,

$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{2}{\pi}}$.

3. Soit $f \in D^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que : $\forall x > 0, \exists c > 0 / f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$.

g est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, x]$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0, x[$. Alors le théorème d'égalité des accroissements finis assure qu'il existe $c \in]0, x[$ tel que : $g(x) - g(0) = g'(c)(x - 0)$ $(**)$

Or, $g(0) = 0$ et $\forall t, g'(t) = f'(t) - (-f'(-t)) = f'(t) + f'(-t)$. Ainsi , $(**)$ s'écrit : $f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$.

Inégalité des accroissements finis : Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+x}$ et (u_n) la suite de réels vérifiant : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

g) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n exsiste et $\forall n \geq 1, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
h) Déterminer les limites possibles des suites (u_n), (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
i) Justifier que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. On note α leur limite commune. Qu'en déduit-on sur (u_n) ?
j) Montrer que : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], |f\,'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
k) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Retrouver la convergence de u .
l) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Donnant une valeur approchée rationnelle de $\sqrt{5}$ à ε près . Créer un programme, en lien avec l'étude de (u_n), permettant de donner cette valeur approchée.

a) f est définie au moins sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \in \mathbb{R}^+$. Comme $u_0 \in \mathbb{R}^+$, on peut affirmer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \in \mathbb{R}^+$.
De plus, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$ et $f(1) = \frac{1}{2}$. Par conséquent, $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. De plus, $u_1 = f(u_0) = 1$. Donc $u_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Donc on peut affirmer : $\forall n \geq 1, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

b) Comme f est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, les limites possibles de (u_n) sont les réels L de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tels que $f(L) = L$.
et les limites possibles de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont les réels L de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tels que $f \circ f(L) = L$.

Soit $L \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$\frac{1}{1+L} = L \Leftrightarrow L^2 + L - 1 = 0 \Leftrightarrow L = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$\frac{1}{1+\frac{1}{1+L}} = L \Leftrightarrow \frac{1+L}{2+L} = L \Leftrightarrow L^2 + L - 1 = 0 \Leftrightarrow L = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Donc, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ est la seule limite possible des suites (u_n), (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

c) Comme f est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonie contraire. De plus, comme (u_n) est bornée, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont bornées. Ainsi, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la seule limite possible $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} - u_{2n+1} = 0$. Donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. Comme (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, (u_n) converge aussi vers la même limite $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

d) f est dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $donc$ $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], |f\,'(x)| = \frac{1}{(1+x)^2} \underset{\substack{car \\ \frac{9}{4} \leq (1+x)^2 \leq 1}}{\leq} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{9}$.

e) Appliquons l'inégalité des accroissements finis à f sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$:

f est dérivable donc continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ et $\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $|f\,'(x)|\leq\frac{4}{9}$. Donc f est $\frac{4}{9}$ $-$contractante sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ c'est-à-dire :
$\forall(x,y)\in\left[\frac{1}{2},1\right]^2, |f(x)-f(y)|\leq\frac{4}{9}|x-y|$.

Soit $n\in\mathbb{N}$; prenons $x=u_n$ et $y=\alpha$, $\left|\underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}}-\underbrace{f(\alpha)}_{=\alpha}\right|\leq\frac{4}{9}|u_n-\alpha|$ i.e $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{4}{9}|u_n-\alpha|$.

<u>Montrons par récurrence sur n que</u> : $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{4}{9}\right)^n|u_0-\alpha|$.

Init°: $|u_0-\alpha|=\left(\frac{4}{9}\right)^0|u_0-\alpha|$. OK !

Propagat°: Soit n un entier naturel. Supposons que $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{4}{9}\right)^n|u_0-\alpha|$. Alors $\frac{4}{9}|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|$.

Or, $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{4}{9}|u_n-\alpha|$. Donc par transitivité de la relation d'ordre, $|u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|$.

Conclus° : Le théorème de récurrence simple permet alors de conclure que $\forall n\in\mathbb{N}, |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{4}{9}\right)^n|u_0-\alpha|$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n=0$ (car $\frac{4}{9}\in]-1;1[$), je peux à nouveau dire que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$.

f) $\forall n\in\mathbb{N}, \left|u_n-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right|\leq\left(\frac{4}{9}\right)^n|\alpha|\underset{car\ \alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right]}{\underbrace{\leq}}\left(\frac{4}{9}\right)^n$. Donc, $\forall n\in\mathbb{N}, \left|2u_n+1-\sqrt{5}\right|\leq 2\left(\frac{4}{9}\right)^n$. $\lim\limits_{n\to+\infty}2u_n+1=\sqrt{5}$ et pour que $2u_n+1$ soit une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à ε près, il suffit de choisir un entier naturel n tel que $2\left(\frac{4}{9}\right)^n\leq\varepsilon$. Or,

$2\left(\frac{4}{9}\right)^n\leq\varepsilon\Leftrightarrow\ln(2)+n[ln(4)-\ln(9)]\leq\ln(\varepsilon)\Leftrightarrow n[ln(4)-\ln(9)]\leq\ln(\varepsilon)\Leftrightarrow n\geq\frac{\ln(\varepsilon)-\ln(2)}{2\ln(2)-2\ln(3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\varepsilon)-\ln(2)}{\ln(2)-\ln(3)}\right)$.

Posons $N=\left\lfloor\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\varepsilon)-\ln(2)}{\ln(2)-\ln(3)}\right)\right\rfloor+1$. Alors $2u_N+1$ est une valeur approchée rationnelle de $\sqrt{5}$ à ε près.

main.py

```python
from math import*
from fractions import*
def approx(E):
  u=1
  n=int((log(E)-log(2))/(2*(log(2)-log(3))))+1
  for i in range(1,n+1):
    u=Fraction(1,1+u)
  return 2*u+1
print(approx(1/10000), ' est une valeur approchée de racine de 5 à E près')
```

Réponse :

```
682/305  est une valeur approchée de racine de 5 à E près
```

Inégalité de Taylor-Lagrange : Montrer que : $\forall h\in[-1;1], \forall x>0, |e^{-hx}-1+hx|\leq\frac{h^2x^2}{2}e^x$.

Soit $x>0$.

exp est de classe C^2 sur $[-x,x]$ et $\forall t\in[-x,x], \left|exp^{(2)}(t)\right|=e^t\leq e^x$. Donc comme $0\in[-x,x]$, l'inégalité de Taylor Lagrange assure que : $\forall t\in[-x,x]$, $|e^t-(1+t)|\leq e^x\frac{|t-0|^2}{2}=\frac{t^2}{2}e^x$.

En particulier, $\forall h\in[-1;1], -hx\in[-x,x]$, donc $|e^{-hx}-(1-hx)|\leq\frac{(-hx)^2}{2}e^x=\frac{(hx)^2}{2}e^x$.

Critère de classe C^∞: Soit $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}\ si\ x>0\\ 0\ si\ x\leq 0\end{cases}$. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N}, f(x)=o_0(x^n)$.

Posons $\forall x>0, g(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ et $\forall x>0, h(x)=0$. Alors, $f(x)=\begin{cases}g(x) si\ x>0\\ 0\ si\ x=0\\ h(x) si\ x<0\end{cases}$.

g est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et h est C^∞ sur $\mathbb{R}^{-*}$ donc f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}^*, f^{(n)}(x)=\begin{cases}g^{(n)}(x)\ si\ x>0\\ 0\ si\ x<0\end{cases}$ car $h^{(n)}(x)=0$.

Cherchons la forme de $g^{(n)}(x)$:

$\forall x>0, g^{(0)}(x)=e^{-\frac{1}{x}}$, $g^{(1)}(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ et $g^{(2)}(x)=\left(\frac{-2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ ....

Posons $H(n)$: « il existe une fonction polynomiale P_n telle que : $\forall x>0, g^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$."

<u>Initialisation</u> : Posons $P_0(t)=1$ et $P_1(t)=t^2$.

Alors P_0 et P_1 sont polynomiales et $\forall x>0, g^{(0)}(x)=P_0\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ et $g^{(1)}(x)=P_1\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$. Donc $H(0)$ et $H(1)$ sont vraies.

<u>Propagation</u> : Soit n un entier naturel. Supposons que $H(n)$ est vraie. Donc, il existe une fonction polynomiale P_n telle que :

$\forall x>0, g^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$. Alors $g^{(n+1)}(x)=-\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}+P_n\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}[-P_n'\left(\frac{1}{x}\right)+P_n\left(\frac{1}{x}\right)]e^{-\frac{1}{x}}$.

Posons $P_{n+1}(t) = t^2[-P_n{}'(t) + P_n(t)]$.
Comme P_n, P_n' et $(t \mapsto t^2)$ sont polynomiales, P_{n+1} est polynomiale. De plus, $\forall x > 0, g^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$.
Donc $H(n+1)$ est vraie dès que $H(n)$ est vraie.
Conclusion : Le théorème de récurrence assure que pour tout entier naturel n, $H(n)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f^{(n)}(x)$. Pour cela, déterminons $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g^{(n)}(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} h^{(n)}(x)$.

D'une part, $\lim\limits_{x\to 0^-} f^{(n)}(x) = 0$. D'autre part, $\forall x > 0, g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} \underset{\substack{en\ posant\\ P_n(t)=\sum_{k=0}^{N} a_k t^k}}{\underbrace{=}} \sum_{k=0}^{N} a_k \left(\frac{1}{x}\right)^k e^{-\frac{1}{x}}$.

De plus, $\left(\frac{1}{x}\right)^k e^{-\frac{1}{x}} = e^{k\ln\left(\frac{1}{x}\right)}e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}-k\ln(x)} = e^{-\frac{1}{x}(1+kx\ln(x))}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) \overset{CC}{=} 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^k e^{-\frac{1}{x}}=0$
Par suite, $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g^{(n)}(x) = 0$.
J'en conclus que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f^{(n)}(x) = 0$.

Conclusion : le critère de classe C^∞ assure que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \begin{cases} g^{(n)}(x)\ si\ x > 0 \\ 0\ si\ x = 0 \\ 0\ si\ x < 0 \end{cases}$.

Conséquence : On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$. Donc le polynôme de Taylor en 0 de f de rang n est le polynôme nul. Et la formule de Taylor Young assure que $f(x) = o_0(x^n)$.

INTEGRATION :

Inégalités et intégration : Démontrons, ici, que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt = 0$.

Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} sin^n(t)dt$ et $v_n = \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt$.

e) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
f) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right], 0 \leq sin^n(t) \leq sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Que peut-on dire de la suite $\left(sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$?
g) En déduire que: $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0,\ \ 0 \leq u_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
h) Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt = 0$.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq sin^n(t) \leq 1\ donc\ 0 \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1dt = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.sin est croissante et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right]$. Donc $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq sin(t) \leq sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)$. La fonction « puissance n » étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right], 0 \leq sin^n(t) \leq sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)$.
La suite $\left(sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ est géométrique de raison $sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Comme $0 < \frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\pi}{2}, 0 < sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) < 1$.Donc la suite géométrique $\left(sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

c) Par conséquent, $\exists n_0 \in \frac{\mathbb{N}}{\forall n} \geq n_0,\ \ 0 \leq sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{\pi}$.Donc, par croissance de l'intégrale sur $\left[0, \frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right]$, on a :
$\forall n \geq n_0,\ \ 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} sin^n(t)\,dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\varepsilon}{\pi}dt = \frac{\varepsilon}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$.
Ainsi, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0,\ \ 0 \leq u_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

d) Et finalement $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ \ 0 \leq u_n + v_n \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Or, $u_n + v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} sin^n(t)dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt$. J'en conclus que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ \ 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt \leq \varepsilon$.
Ainsi, je peux conclure que $\forall \varepsilon \in]0, \pi/2[, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ \ \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt\right| \leq \varepsilon$. Cette phrase est évidemment vrai pour tout réel $\varepsilon \geq \frac{\pi}{2}$ (puisque $\forall n,\ \ 0 \leq sin^n(t) \leq 1$). Nous pouvons donc conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt = 0$ par définition de la limite d'une suite.

Sommes de Riemann : Calculer les limites quand $n \to +\infty$ de $w_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}$ et $s_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}$

1. $\forall n > 0, w_n > 0$ donc $u_n = ln(w_n)$ existe et $w_n = e^{u_n}$.

$\forall n > 0, u_n = \ln\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ où $f(t) = \ln(1+t)$.

Comme f est continue sur $[0,1]$ et $u_n$est une somme de Riemann de f sur $[0,1]$,
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 ln(1+t)dt \underbrace{=}_{CV\ u=1+t} \int_1^2 ln(u)du = [uln(u)-u]_1^2 = 2ln(2)-1.$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = e^{2ln(2)-1} = e^{2ln(2)}e^{-1} = e^{ln(4)}e^{-1} = \frac{4}{e}.$

2. Soit $n > 0$.
$s_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2} \underbrace{=}_{\substack{k=p+n\\p=k-n}} \sum_{p=0}^{n} \frac{p+n}{(p+n)^2+n^2} = \sum_{p=0}^{n} \frac{n(\frac{p}{n}+1)}{n^2[(\frac{p+n}{n})^2+1]} = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n} \frac{(\frac{p}{n}+1)}{[(\frac{p}{n}+1)^2+1]} = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$ $où\ f(t) = \frac{(t+1)}{[(t+1)^2+1]}$. Ainsi,
$s_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} f\left(\frac{p}{n}\right) + \frac{1}{n}f(1)$. Comme $\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} f\left(\frac{p}{n}\right)$ est une somme de Riemann de f sur $[0,1]$ et f est continue sur $[0,1]$,
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} f\left(\frac{p}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$ et par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} f\left(\frac{p}{n}\right)$ (puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}f(1) = 0$).
Or, $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{(t+1)}{[(t+1)^2+1]}dt = \int_1^2 \frac{u}{[u^2+1]}du = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2u}{[u^2+1]}du = \frac{1}{2}[\ln(u^2+1)]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$.

Lemme d'annulation : Soit f et g deux fonctions réelles et continues sur $[0,1]$ telles que : $\int_0^1 f^2(t)+f(t)g(t)+g^2(t)dt = 0$.
Montrer que $\forall t \in [0,1], f(t) = g(t) = 0$.

- $(t \mapsto f^2(t)+f(t)g(t)+g^2(t))$ est continue sur $[0,1]$
- $\forall t \in [0,1], f^2(t)+f(t)g(t)+g^2(t) = \left(f(t)+\frac{1}{2}g(t)\right)^2 + \frac{3}{4}g^2(t) \geq 0$
- $\int_0^1 f^2(t)+f(t)g(t)+g^2(t)dt = 0.$

Alors le lemme d'annulation assure que $\forall t \in [0,1], f^2(t)+f(t)g(t)+g^2(t) = 0$.
Autrement dit, $\forall t \in [0,1], \underbrace{\left(f(t)+\frac{1}{2}g(t)\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{3}{4}g^2(t)}_{\geq 0} = 0$ $\leftarrow$ **somme nulle de réels positifs**.
J'en déduis que $\forall t \in [0,1], \frac{3}{4}g^2(t) = 0\ et\ \left(f(t)+\frac{1}{2}g(t)\right)^2 = 0$. Alors, $\forall t \in [0,1], g(t) = 0$ puis $f(t) = 0$.

Théorème fondamental de l'intégration et théorème fondamental de calcul intégral : Soit $f : (x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}dt)$.

7) Justifier que f est définie, continue et dérivable sur $]1,+\infty[$ et sur $]0,1[$.
8) Déterminer les variations de $f$sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

1) Soit $g(t) = \frac{1}{ln(t)}$.
$g(t) existe \iff \begin{cases}\ln(t)\ existe\\ \ln(t) \neq 0\end{cases} \iff t \in]0,1[\cup]1,+\infty[. Donc, Dg =]0,1[\cup]1,+\infty[$. De plus, g est continue sur $Dg =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
Sur l'intervalle $]0,1[$, le ***TFI*** assure que g admet une primitive G_1. Alors le TFCI assure que pour tous réels a et b dans $]0,1[$,
$\int_a^b g(t)dt = G_1(b)-G_1(a)$. En particulier, si $x \in]0,1[$ alors $x^2 \in]0,1[$ donc $f(x) = \int_x^{x^2} g(t)dt = G_1(x^2)-G_1(x)$ existe !!
Sur l'intervalle $]1,+\infty[, le\ TFI$ assure que g admet une primitive G_2. Alors le ***TFCI*** assure que pour tous réels a et b dans $]1,+\infty[$, $\int_a^b g(t)dt = G_2(b)-G_2(a)$. En particulier, si $x \in]1,+\infty[$ alors $x^2 \in]1,+\infty[$ donc $f(x) = \int_x^{x^2} g(t)dt = G_2(x^2) - G_2(x)$ existe !!
2) $\forall x \in]0,1[$, $f(x) = G_1(x^2)-G_1(x)$. Comme $(x \mapsto x^2)$ et G_1 sont de classe C^1 sur $]0,1[$ $et\ \forall x \in]0,1[, x^2 \in]0,1[$, $(x \mapsto G_1(x^2))$ est de classe C^1 sur $]0,1[$ et finalement f est de classe C^1 sur $]0,1[$.
De plus, $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) = 2xG_1'(x^2)-G_1'(x) = 2xg(x^2)-g(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)} > 0$ $(car\ x <$ 1 donc $\ln(x) < 0)$. Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $]0,1[$.
De même, f est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et $f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} > 0$ et f est strictement croissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

Croissance de l'opérateur intégral. Théorème des gendarmes (encore appelé le théorèln(t)-ln(1)me de LIMITE PAR ENCADREMENT) et égalité des accroissements finis
(suite de l'exercice précédent)

9) Déterminer les limites de f en 0 puis $+\infty$.
10) Soit $x \in]1,+\infty[$. Montrer, grâce à l'égalité des accroissements finis, que $\forall t \in [x,x^2]. \frac{1}{x^2} \leq \frac{\ln(t)}{t-1} \leq 1$.
11) En déduire la limite de f en 1^+.
12) Déterminer la limite de f en 1^-.

3) <u>limite de f en $+\infty$:</u>
Soit $x > 1$. Alors $x < x^2$. $\forall t \in [x,x^2], 0 < \ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(x^2) = 2\ln(x)\ donc\ \frac{1}{2\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x)}$. Alors par croissance de l'opérateur intégral appliqué aux fonctions $\left(t \mapsto \frac{1}{2\ln(x)}\right), \left(t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}\right) et \left(t \mapsto \frac{1}{\ln(x)}\right)$ continues sur le segment $[x,x^2]$,

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{2\ln(x)}dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)}dt.$$

Donc, $\forall x \in]1,+\infty[, \frac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$ $(*)$.

Or, $\frac{x^2-x}{2\ln(x)} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{2\ln(x)}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln(x)} \overset{cc}{=} +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{2\ln(x)} = +\infty$. Alors, l'encadrement $(*)$ permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

De plus, $\forall x \in]1,+\infty[, \frac{x-\frac{1}{x}}{2\ln(x)} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x-\frac{1}{x}}{\ln(x)}$ $(*)$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Donc Cf a une branche parabolique de direction asymptotique (Oy)

limite de *f* en 0 :

Soit $x \in]0,1[$. Alors $x^2 < x$. $\forall t \in [x^2,x], \ln(x^2) \leq \ln(t) \leq \ln(x) < 0$ *donc* $\frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{2\ln(x)} < 0$. Alors par croissance de l'opérateur intégral appliqué aux fonctions $\left(t \mapsto \frac{1}{2\ln(x)}\right), \left(t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}\right)$ *et* $\left(t \mapsto \frac{1}{\ln(x)}\right)$ continues sur le segment $[x^2,x]$,

$$\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x)}dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{2\ln(x)}dt.$$

Donc, $\forall x \in]0,1[, \frac{x-x^2}{\ln(x)} \leq -f(x) \leq \frac{x-x^2}{2\ln(x)}$ et finalement, $\frac{x^2-x}{\ln(x)} \geq f(x) \geq \frac{x^2-x}{2\ln(x)}$ $(**)$.

Or, $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2-x}{2\ln(x)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x^2-x}{\ln(x)} = 0$. Donc, l'encadrement $(**)$ permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$.

4) Soit $x \in]1,+\infty[$ et $t \in [x,x^2]$. ln est continue et dérivable sur $[1,t]$. Donc l'EAF assure qu'il existe $c \in]1,t[$ tel que : $\frac{\ln(t)-\ln(1)}{t-1} = ln'(c) = \frac{1}{c}$. Comme $c \in]1,t[, \frac{1}{c} \in]\frac{1}{t},1[$. $\frac{1}{t} \leq \frac{\ln(t)}{t-1} \leq 1$. Comme $t \in [x,x^2], \frac{1}{t} \geq \frac{1}{x^2}$. Ainsi, $\frac{1}{x^2} \leq \frac{\ln(t)}{t-1} \leq 1$.

5) **limite de *f* en 1^+:**

D'après ce qui précède, pour tous $x \in]1,+\infty[$ et $t \in [x,x^2]$, $1 \leq \frac{t-1}{\ln(t)} \leq x^2$ et $\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t-1}$ (car $t-1 > 0$).

Donc par croissance de l'opérateur intégral appliquée aux fonctions $(t \mapsto \frac{1}{t-1})$, $\left(t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}\right)$et $(t \mapsto \frac{x^2}{t-1})$ continues sur $[x,x^2]$,

$\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}dt \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t-1}dt = x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}dt$ et finalement, $[\ln|t-1|]_x^{x^2} \leq f(x) \leq x^2[\ln|t-1|]_x^{x^2}$.

Donc $\forall x \in]1,+\infty[$, $\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) \leq f(x) \leq x^2\ln\left(\frac{1-x^2}{1-x}\right)$ i.e. $\ln(x+1) \leq f(x) \leq x^2\ln(x+1)$ $(***)$.

Or, $\lim\limits_{x\to1^+} \ln(x+1) = \lim\limits_{x\to1^+} x^2\ln(1+x) = \ln(2)$. Donc, l'encadrement $(***)$ permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \ln(2)$.

6) Soit $x \in]0,1[$ et $t \in [x^2,x]$. ln est continue et dérivable sur $[t,1]$. Donc l'EAF assure qu'il existe $c \in]t,1[$ tel que : $\frac{\ln(t)-\ln(1)}{t-1} = ln'(c) = \frac{1}{c}$. Comme $c \in]t,1[, \frac{1}{c} \in]1,\frac{1}{t}[$. $1 \leq \frac{\ln(t)}{t-1} \leq \frac{1}{t}$. Comme $t \in [x^2,x], \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x^2}$. Ainsi, $1 \leq \frac{\ln(t)}{t-1} \leq \frac{1}{x^2}$.

7) Alors, pour tous $x \in]0,1[$ et $t \in [x^2,x]$, $x^2 \leq \frac{t-1}{\ln(t)} \leq 1$ et $\frac{x^2}{t-1} \geq \frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{t-1}$.

Donc par croissance de l'opérateur intégral appliquée aux fonctions $(t \mapsto \frac{1}{1-t})$, $\left(t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}\right)$ *et* $(t \mapsto \frac{x^2}{1-t})$ continues sur $[x^2,x]$,

$\int_{x^2}^{x} \frac{x^2}{t-1}dt \geq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}dt \geq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{t-1}dt$ et finalement, $[\ln|t-1|]_{x^2}^{x} \leq -f(x) \leq x^2[\ln|t-1|]_{x^2}^{x}$.

Donc $\forall x \in]0,1[$, $x^2\ln\left(\frac{1-x}{1-x^2}\right) \geq -f(x) \geq \ln\left(\frac{1-x^2}{1-x}\right)$ i.e. $-\ln\left(\frac{1}{x+1}\right) \leq f(x) \leq x^2\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$.

Or, $\lim\limits_{x\to1^-} x^2\ln\left(\frac{1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to1^+} \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$. Donc, je peux affirmer que $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \ln(2)$ et ainsi conclure que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \ln(2)$.

Ainsi, f est prolongeable par continuité en 1 par $\ln(2)$ *et* en 0 par 0.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit u et v deux fonctions continues sur $[0,1]$,réelles, positives et telles que : $\forall x \in [0,1], u(x)v(x) \geq 1$.

Montrer que $\left[\int_0^1 u(x)dx\right] \times \left[\int_0^1 v(x)dx\right] \geq 1$.

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $\sqrt{u}$ *et* $\sqrt{v}$ qui sont définies set continues sur $[0,1]$ puisque u et v sont continues et positives sur $[0,1]$: $\left[\int_0^1 \sqrt{u(x)}\sqrt{v(x)}dx\right]^2 \leq \left[\int_0^1 u(x)dx\right] \times \left[\int_0^1 v(x)dx\right]$.

Or, $\forall x \in [0,1], u(x)v(x) \geq 1$ donc, par croissance de la fonction racine carrée, $\forall x \in [0,1], \sqrt{u(x)v(x)} \geq 1$ donc puisque $u(x) \geq 0$ *et* $v(x) \geq 0$, $\sqrt{u(x)}\sqrt{v(x)} \geq 1$. Alors par croissance de l'opérateur intégral appliquée aux fonctions $\sqrt{u}\sqrt{v}$ *et* 1 continues sur $[0,1]$, $\int_0^1 \sqrt{u(x)}\sqrt{v(x)}dx \geq \int_0^1 1dx = 1$. Alors, j'en déduis que : $\left[\int_0^1 u(x)dx\right] \times \left[\int_0^1 v(x)dx\right] \geq 1$.