Sup PCSI 2024-2025 Mathématiques A rendre vendredi 28 février 2025 : faire au moins un problème en entier….mais pas tous le même !!!!!

DL 10

PROBLEME 1 Convexité et sommes de Riemann et inégalité de la moyenne

1. Soit φ une fonction convexe sur un intervalle ouvert I .
   1.1 Rappeler sans démonstration les propriétés de continuité et de dérivabilité vérifiées par φ.
   1.2 Démontrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $H(n)$: "pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$,
   $\varphi\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\dots+\varphi(x_n)}{n}$ ". (indication : remarquer que : $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right]+\frac{x_{n+1}}{n+1}$)
2. Soit f une fonction continue sur un intervalle J tel que $f(J) \subset I$. Soit $(a,b) \in J^2$ tel que $a < b$.
   2.1 Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$ et justifier que cette limite appartient à I.
   2.2 Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)$.
   2.3 Déduire de tout ce qui précède que $\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b (\varphi\circ f)(t)dt$ (indication : utiliser 1.2 en choisissant bien les x_k).
   2.4 Enoncer un résultat analogue au 2.3 dans le cas où φ est une fonction concave sur I.

PROBLEME 2 Encore du Wallis … une autre version !

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in [0,1[$, $f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) Justifier que f_n est bien définie sur [0,1[.
   b) Calculer f_0 et sa limite I_0 en 1^-.
   c) Montrer que la fonction f_n est majorée par I_0 .
   d) En déduire l'existence de la limite I_n de f_n en 1^-.
2. a) Montrer que la suite (I_n) est monotone et convergente.
   b) Trouver une relation entre f_n et f_{n-2} pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.
   c) En déduire la relation $nI_n = (n-1)\,I_{n-2}$ valable pour tout entier naturel $n \geq 2$.
   d) Montrer que (nI_nI_{n-1}) est une suite constante et déterminer cette constante.
   e) Montrer que $I_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
   f) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt$ par deux méthodes.

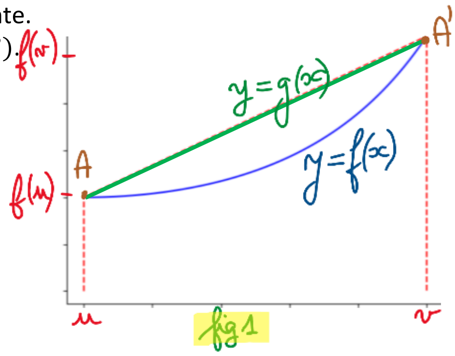
PROBLEME 3 Méthode des trapèzes d'approximation d'une intégrale

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$.

A. Justifier que $M = sup_{[a,b]}|f''|$ existe et est finie.

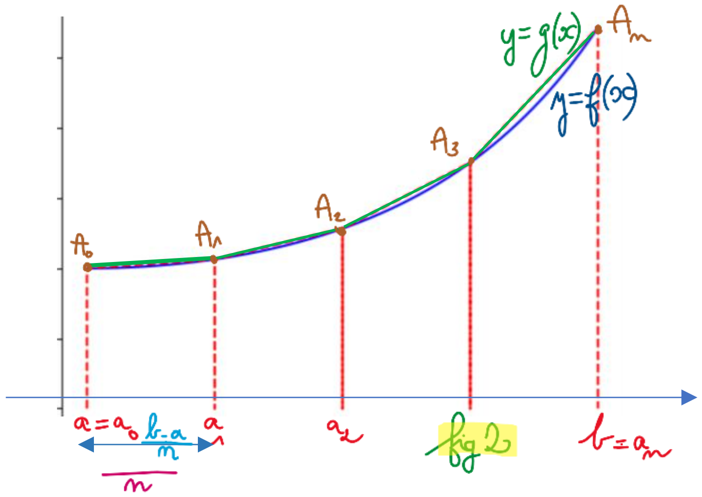
B. Soit u et v deux réels de $[a,b]$ tels que $u < v$. (Cf fig1)

1. Donner l'expression de la fonction $g: [u,v] \to \mathbb{R}$ dont la courbe est le segment d'extrémités $A(u, f(u))$ et $A'(v, f(v))$.
2. Soit $x \in [u,v]$. On pose $h(t) = f(t) - g(t) + K(t-u)(t-v)$ où K est une constante.
   2.1 Choisissez K de sorte qu'il existe $\alpha \in]u,x[$ et $\beta \in]x,v[$ tel que : $h'(\alpha) = 0 = h'(\beta)$.
   2.2 En déduire qu'il existe $c_x \in]u,v[$ tel que : $f(x) - g(x) = f''(c_x)\frac{(x-u)(x-v)}{2}$.
   2.3 Montrer que $\forall x \in [u,v], |f(x) - g(x)| \leq M\frac{(x-u)(v-x)}{2}$.



C. On pose $\forall k \in [\![0,n]\!], u_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ et $A_k(u_k, f(u_k))$ point de Cf. On définit (Cf fig2) la fonction $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ dont la courbe est la ligne brisée qui relie les points $A_0, A_1, \dots, A_n$.

3. Montrer que $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx \leq M\sum_{k=0}^{n-1}\int_{u_k}^{u_{k+1}}\frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2}dx$.
4. En déduire que $\left|\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$.



D. Prenons la fonction $f: (x \mapsto e^{x^2})$. Calculer avec Python une valeur approchée de l'intégrale de f sur [0,1] à la précision 0,001 en utilisant la méthode des trapèzes.