DL 9
Une équation fonctionnelle

On rappelle que $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$
On note $E = \{ f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \}$.
On note F l'ensemble des éléments $f \in E$ tels que f ne soit pas la fonction nulle et f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

PARTIE 1 Exemples et premières propriétés des éléments de E.

1. Quelles sont les fonctions constantes éléments de E ?
2. Déterminer une fonction élément de F.
3. Démontrer que ch est élément de $E \backslash F$.
4. Montrer que si f est un élément de E et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(x \mapsto f(\alpha x))$ est élément de E.
5. Soit f un élément de E.
   a. Montrer que $f(0) = 0 \; ou \; 1$.
   b. Montrer que si $f(0) = 0$ alors f est identiquement nulle.
   c. Montrer que si $f(0) = 1$ alors f est paire.

PARTIE 2 Description complète de E et F.

Soit f un élément de E tel que : $f(0) = 1$.

6. Justifier qu'il existe un réel $r > 0$ tel que : $\forall x \in [0,r], f(x) > \frac{1}{2}$. En déduire que $\int_0^r f(x)dx > 0$.
7. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^r f(x+y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du$.
8. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x)\int_0^r f(y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du + \int_{x-r}^{x} f(v)dv$.
9. En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
10. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
11. Montrer qu'il existe un réel $c > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, cf'(x) = f(x+r) - f(x-r)$.
12. Montrer qu'il existe un réel λ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \lambda f(x)$.
13. En déduire tous les éléments de E qui vérifient $f(0) = 1$.
14. Quels sont les éléments de E et ceux de F ?

PARTIE 3 On se propose de décrire F par une autre méthode.

Soit f un élément de F. On note $U = \{x \in \mathbb{R}^{+*} / f(x) = 0\}$.

15. **<u>PRELIMINAIRE</u>** : Soit $a > 0$, on note $D_a = \{a\frac{p}{2^q} / p \in \mathbb{Z} \; et \; q \in \mathbb{N}\}$.
   Nous allons montrer, dans cette question, que tout réel est la limite d'une suite d'éléments de D_a.
   Soit x un réel.
   a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $q_n \in \mathbb{N}$ tel que : $1 \leq \frac{1}{an} 2^{q_n}$.
   b. Montrer qu'il existe $p_n \in \mathbb{Z}$ tel que : $0 \leq x - a\frac{p_n}{2^{q_n}} \leq \frac{1}{n}$.
   c. En déduire que x est la limite d'une suite d'éléments de D_a.
16. **<u>BORNE SUP DE U</u>**
   a. Montrer que U admet une borne inférieure finie notée a.
   b. Montrer, en utilisant la caractérisation séquentielle de la borne inf, que $f(a) = 0$.
   c. En déduire que $a > 0$.
   d. Montrer que $\forall x \in [0, a[, f(x) > 0$.
17. **<u>QUI EST f ?</u>**
   On pose $\omega = \frac{\pi}{2a} \; et \; g : (x \mapsto \cos(\omega x))$.
   a. Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que, $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2$.
   b. Montrer que : $\forall q \in \mathbb{N}, \; f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.
   c. Soit $q \in \mathbb{N}$. Démontrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, \; f\left(a\frac{p}{2^q}\right) = g\left(a\frac{p}{2^q}\right)$.
   d. En déduire que $\forall x \in D_a, f(x) = g(x)$.
   e. En déduire que $f = g$.
   f. Retrouver alors tous les éléments de F.