Corrigé DL 9 - Une équation fonctionnelle

On rappelle que $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$

On note $E = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \underbrace{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)}_{(**)} \right\}$.

On note F l'ensemble des éléments $f \in E$ tels que f ne soit pas la fonction nulle et f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

PARTIE 1 Exemples et premières propriétés des éléments de E.

1. Quelles sont les fonctions constantes éléments de E ?
2. Déterminer une fonction élément de F.
3. Démontrer que ch est élément de $E \backslash F$.
4. Montrer que si f est un élément de E et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(x \mapsto f(\alpha x))$ est élément de E.
5. Soit f un élément de E.
   a. Montrer que $f(0) = 0$ *ou* 1.
   b. Montrer que si $f(0) = 0$ alors f est identiquement nulle.
   c. Montrer que si $f(0) = 1$ alors f est paire.

1. Soit λ un réel et $f : (x \mapsto \lambda)$.

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = \lambda + \lambda = 2\lambda$ *et* $2f(x)f(y) = 2\lambda^2$. Alors, f est solution de notre problème sietssi $2\lambda = 2\lambda^2$ sietssi $\lambda - \lambda^2 = 0$ sietssi $\lambda(1-\lambda) = 0$ sietssi $\lambda = 0$ *ou* $\lambda = 1$.

Ainsi, les fonctions constantes éléments de E sont les fonctions constantes égales à 0 ou à 1.

2. La fonction cos est élément de F car cos est continue sur $\mathbb{R}$, s'annule en $\frac{\pi}{2}$ mais ne s'annule pas partout et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \quad = 2\cos(x)\cos(y).$$

3. La fonction ch est continue sur $\mathbb{R}$, ne s'annule jamais donc $ch \notin F$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y) = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} + \frac{e^{x-y} + e^{y-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{2}e^{-x}(e^{-y} + e^y) = \left(\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^x\right)(e^{-y} + e^y) = \mathrm{ch}(x)(2\,\mathrm{ch}(y)).$$

Donc, $h \in E$.

4. Soit f un élément de E et $\alpha \in \mathbb{R}$. f est donc continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^2, f(X+Y) + f(X-Y) = 2f(X)f(Y)$ $(**)$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $g_\alpha : (x \mapsto f(\alpha x))$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$g_\alpha(x+y) + g_\alpha(x-y) = f(\alpha(x+y)) + f(\alpha(x-y)) = f(\alpha x + \alpha y) + f(\alpha x - \alpha y) \underbrace{=}_{\substack{on\ applique (**)\\ avec\ X = \alpha x\ et\ Y = \alpha y}} 2f(\alpha x)f(\alpha y) = 2g_\alpha(x)g_\alpha(y).$$

Donc $g_\alpha \in E$.

5. f est donc continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^2, f(X+Y) + f(X-Y) = 2f(X)f(Y)$ $(**)$

a) Alors, en prenant $X = Y = 0$ et $f(0+0) + f(0-0) = 2f(0)f(0)$. Donc $f(0)\big(1 - f(0)\big) = 0$ et finalement $f(0) \in \{0,1\}$.

b) Supposons ici que $f(0) = 0$. Alors $\forall X \in \mathbb{R}, f(X) + f(X) = 2f(X)f(0) = 0$ *i.e.* $2f(X) = 0$. Donc $\forall X, f(X) = 0$. f est donc la fonction nulle.

c) Supposons que $f(0) = 1$. Alors $\forall Y \in \mathbb{R}, f(0+Y) + f(0-Y) = 2f(0)f(Y) = 2f(Y)$. *Donc* $f(-Y) = f(Y)$. Ainsi f est paire.

PARTIE 2 Description complète de E et F.

Soit f un élément de E tel que : $f(0) = 1$.

> On montre ici que tout fonction continue, telle que $f(0) = 1$ et vérifiant $(**)$ est de classe C^∞.

6. Justifier qu'il existe un réel $r > 0$ tel que : $\forall x \in [0,r], f(x) > \frac{1}{2}$. En déduire que $\int_0^r f(x)dx > 0$.
7. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^r f(x+y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du$.
8. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x)\int_0^r f(y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du + \int_{x-r}^x f(v)dv$.
9. En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
10. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
11. Montrer qu'il existe un réel $c > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, cf'(x) = f(x+r) - f(x-r)$.
12. Montrer qu'il existe un réel λ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \lambda f(x)$.
13. En déduire tous les éléments de E qui vérifient $f(0) = 1$.
14. Quels sont les éléments de E et ceux de F ?

f est continue sur $\mathbb{R}$, $f(0) = 1$ et $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^2, f(X+Y) + f(X-Y) = 2f(X)f(Y)$ $(**)$.

6. f est continue en 0 donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Il existe un réel r>0 tel que $\forall x \in [-r,r], |f(x) - 1| \leq \frac{1}{2}$ *i.e.* $-\frac{1}{2} \leq f(x) - 1 \leq \frac{1}{2}$. Donc $\forall x \in [0,r],\ \frac{1}{2} \leq f(x)$.

Alors, $\int_0^r \frac{1}{2}dx \leq \int_0^r f(x)dx$ donc, $0 < \frac{r}{2} \leq \int_0^r f(x)dx$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. $(y \mapsto f(x+y))$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur [0,r]. Par suite $\int_0^r f(x+y)dy$ existe.

$$\int_0^r f(x+y)dy \underbrace{=}_{\substack{CV\\ u = x+y\\ du = dy\\ y = 0 \Leftrightarrow u = x\\ y = r \Leftrightarrow u = x+r}} \int_x^{x+r} f(u)du.$$

De même, $(y \mapsto f(x-y))$ est continue sur $\mathbb{R}$ et par suite, $\int_0^r f(x-y)dy \overset{\substack{CV\\ u = x-y\\ du = -dy}}{=} \int_x^{x-r} f(u)(-du) = \int_{x-r}^x f(u)du$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^r f(x+y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du$ *et* $\int_0^r f(x-y)dy = \int_{x-r}^x f(u)du$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. $(y \mapsto 2f(y)f(x))$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,r]$.

De plus, $\forall y \in [0,r], f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$. Donc $\int_0^r f(x+y)dy+\int_0^r f(x-y)\,dy=\int_0^r 2f(x)f(y)\,dy$. Alors d'après 7 ., $\int_x^{x+r} f(u)du+\int_{x-r}^{x} f(u)du=2f(x)\int_0^r f(y)dy$ et par Chasles, $\int_{x-r}^{x+r} f(u)du=2f(x)\int_0^r f(y)dy$.

9. f étant continue sur $\mathbb{R}$, f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Comme $\rho=\int_0^r f(y)dy \neq 0$, je peux affirmer , en utilisant 6., que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\rho}\int_{x-r}^{x+r} f(u)du=\frac{1}{\rho}[F(x+r)-F(x-r)]$(⁂).
F étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $\big(x \mapsto F(x+r)\big)\ et\ \big(x \mapsto F(x-r)\big)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. J'en déduis que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

10. Alors F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, en utilisant (⁂) , je conclus que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.
Init : f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
Propag : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$. Alors F est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, en utilisant (⁂) , je conclus que f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.
CCL : pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ ce qui signifie que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

11. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\rho}[F(x+r)-F(x-r)]$donc $f'(x)=\frac{1}{\rho}[F'(x+r)-F'(x-r)]=f(x)=\frac{1}{\rho}[f(x+r)-f(x-r)]$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \rho f'(x)=f(x+r)-f(x-r)$.

12. Alors, $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x)=\frac{1}{\rho}[f'(x+r)-f'(x-r)]=\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\rho}[f(x+r+r)-f(x+r-r)]-\ \frac{1}{\rho}[f(x-r+r)-f(x-r-r)]\right]$

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x)=\frac{1}{\rho^2}\,[2f(x)+f(x-2r)-f(x+2r)]=\frac{1}{\rho^2}\,[2f(x)+2f(x)f(2r)]$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x)=\lambda f(x)$ où $\lambda=\frac{2(1+f(2r))}{\rho^2}$.

13. Cherchons tous les éléments de E vérifiant $f(0)=1$.

D'après ce qui précède , si f est élément de E telle que $f(0)=1$, alors f est donc solution d'une équation différentielle d'ordre 2 homogène et à coefficients constants dont l'équation caractéristique est : $(e.c): r^2-\lambda=0$ et dont le discriminant est $\Delta = 4\lambda$.

1er cas $\lambda<0$. Posons $\omega=\sqrt{|\lambda|}$. Il existe deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=a\cos(\omega x)+b\sin(\omega x)$. Alors $a=f(0)=1$ et $\omega b=f'(0)=\frac{1}{\rho}[f(r)-f(-r)] \underbrace{=}_{car\ f\ est\ paire} 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=\cos(\omega x)$.

2èmz cas $\lambda=0$. Il existe deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=a+bx$. Alors $a=f(0)=1\ et\ \omega b=f'(0)=0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=1$.

3ème cas $\lambda>0$. Posons $\omega=\sqrt{\lambda}$. Il existe deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=a\,\mathrm{ch}(\omega x)+b\,\mathrm{sh}(\omega x)$. Alors $a=f(0)=1\ et\ \omega b=0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=\mathrm{ch}(\omega x)$.

CCL : les éléments de E qui valent 1 en 0 sont donc de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x)), (x \mapsto \mathrm{ch}(\omega x))\ ou\ (x \mapsto 1)$

Réciproquement, chacune des fonctions de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x)), (x \mapsto \mathrm{ch}(\omega x))\ ou (x \mapsto 1)$ tq $\omega \in \mathbb{R}^*$ est élément de E car cos et ch sont éléments de E alors d'après 4., $(x \mapsto \cos(\omega x)), (x \mapsto \mathrm{ch}(\omega x))$ tq $\omega \in \mathbb{R}^*$sont éléments de E. De plus, chacune de ces fonctions vaut 1 en 0.

Ainsi, ces fonctions de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x)), (x \mapsto \mathrm{ch}(\omega x))\ ou (x \mapsto 1)$ tq $\omega \in \mathbb{R}^*$ sont les fonctions recherchées.

14. Les éléments de E sont donc toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x)), (x \mapsto \mathrm{ch}(\omega x))\ ou (x \mapsto 1)$ ou $(x \mapsto 0)$ tq $\omega \in \mathbb{R}^*$.

autrement dit, E est constitué de toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x)), (x \mapsto \mathrm{ch}(\omega x))$ ou $(x \mapsto 0)$ tq $\omega \in \mathbb{R}$(car pour $\omega=0, \forall x, \mathrm{ch}(\omega x)=\mathrm{ch}(\omega x)=1$).

Parmi ces éléments de E, les éléments qui s'annulent sans être toutes nulles sont les fonctions de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x))$ tq $\omega \in \mathbb{R}^*$.
Ainsi, F est constitué de toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x))$ tq $\omega \in \mathbb{R}^*$.

PARTIE 3 On se propose de décrire F par une autre méthode.

Soit f un élément de F. On note $U=\{x \in \mathbb{R}^{+*} / f(x)=0\}$.

15. **PRELIMINAIRE** : Soit $a>0$, on note $D_a=\{a\frac{p}{2^q} / p \in \mathbb{Z}\ et\ q \in \mathbb{N}\}$.

Nous allons montrer, dans cette question, que tout réel est la limite d'une suite d'éléments de D_a.
Soit x un réel.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $q_n \in \mathbb{N}$ tel que : $1 \le \frac{1}{an}2^{q_n}$.
b. Montrer qu'il existe $p_n \in \mathbb{Z}$ tel que : $0 \le x-a\frac{p_n}{2^{q_n}} \le \frac{1}{n}$.
c. En déduire que x est la limite d'une suite d'éléments de D_a.

15.a. $1 \le \frac{1}{an}2^{q_n} \Leftrightarrow an \le 2^{q_n} \Leftrightarrow \ln(a)+\ln(n) \le q_n \ln(2) \Leftrightarrow \frac{\ln(a)+\ln(n)}{\ln(2)} \le q_n$.

Posons $q_n=\left\lfloor \frac{\ln(a)+\ln(n)}{\ln(2)} \right\rfloor+1$. Ainsi, il existe $q_n \in \mathbb{N}$ tel que : $1 \le \frac{1}{an}2^{q_n}$.

b.$0 \le x-a\frac{p_n}{2^{q_n}} \le \frac{1}{n} \Leftrightarrow\ p_n \le 2^{q_n}\frac{x}{a} \le p_n+\frac{2^{q_n}}{an}$. Posons $p_n=\left\lfloor 2^{q_n}\frac{x}{a} \right\rfloor$. Alors, $p_n \le 2^{q_n}\frac{x}{a} < p_n+1 \le p_n+\frac{1}{an}2^{q_n}$. Ainsi, $p_n$convient.

c. Posons $\forall n>0, d_n=a\frac{p_n}{2^{q_n}} \in D_a$. Alors $\forall n>0, 0 \le x-d_n \le \frac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}=0$, je peux conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n=x$.

16. **BORNE SUP DE U**

a. Montrer que U admet une borne inférieure finie notée a.
b. Montrer ~~par l'absurde~~ que $f(a)=0$. En déduire que $a>0$.
c. Montrer que $\forall x \in [0,a[, f(x)>0$.

16 f est continue sur $\mathbb{R}$ non toute nulle donc $f(0)=1$ et f paire et f s'annule au moins une fois et $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^2, f(X+Y)+f(X-Y)=2f(X)f(Y)(**)$.

a. $U=\{x \in \mathbb{R}^{+*} / f(x)=0\}$.

$U \subset \mathbb{R}^{+*} \subset \mathbb{R}$. De plus, comme f est élément de F, f s'annule au moins une fois donc U est non vide. Enfin, U est minoré par 0. Ainsi, U admet une borne inférieure finie notée a.

b. f est continue en a donc $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$. Comme a est la borne inférieure de U , il existe une suite (u_n) d'éléments de U de limite a.
Alors le théorème de caractérisation séquentielle de la limite, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n)=f(a)$. Or, $\forall n, u_n \in U$ donc $f(u_n)=0$ et par suite

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 0$. J'en déduis par unicité de la limite que $f(a) = 0$. De plus, $\forall n, u_n > 0$ donc $a = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$. De plus, $f(0) = 1 \neq 0 = f(a)$.
Ainsi, $a \neq 0$ et finalement, $f(a) > 0$.
c. $f(0) = 1$ et $f(a) = 0$. De plus, $a = \inf(U)$ donc tout réel inférieur à a n'appartient pas à U $i.e.$ f ne s' annule pas sur $[0, a[$. Comme f est continue, f ne change pas de signe sur $[0, a[$. Comme $f(0) = 1$, $\forall x \in [0, a[, f(x) > 0$.

17. **QUI EST f ?**

On pose $\omega = \frac{\pi}{2a}$ et $g: (x \mapsto \cos(\omega x))$.

a. Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2$.
b. Montrer que : $\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.
c. Soit $q \in \mathbb{N}$. Démontrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ f\left(a\frac{p}{2^q}\right) = g\left(a\frac{p}{2^q}\right)$.
d. En déduire que $\forall x \in D_a, f(x) = g(x)$.
e. En déduire que $f = g$.
f. Retrouver alors tous les éléments de F.

a. Soit $q \in \mathbb{N}$. Prenons $X = \frac{a}{2^{q+1}} = Y$ dans (**). Alors $f\left(\frac{a}{2^{q+1}} + \frac{a}{2^{q+1}}\right) + f\left(\frac{a}{2^{q+1}} - \frac{a}{2^{q+1}}\right) = 2f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$ i.e. $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$.

b. Comme g vérifie aussi (**), $\forall q \in \mathbb{N},\ g\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left(g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$. Montrons par récurrence sur q que $\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.
Init : $f(a) = 0 = g(a)$.
Propag : Soit $q \in \mathbb{N}$. Je suppose que $f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$. Alors $\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1\right] \underbrace{=}_{\substack{car\\ f\left(\frac{a}{2^q}\right)=g\left(\frac{a}{2^q}\right)}} \frac{1}{2}\left[g\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1\right] = \left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$.

Comme $\frac{a}{2^{q+1}} \in [0, a[, f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) > 0$ et $\frac{\pi}{2a}\frac{a}{2^{q+1}} \in [0, \frac{\pi}{2}[$ donc $g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) > 0$. J'en déduis que $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$.
CCL : J'en conclus, par le théorème de récurrence simple, que $\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.

c. Soit $q \in \mathbb{N}$. Démontrons par récurrence double sur p que : $\forall p \in \mathbb{N},\ \underbrace{f\left(a\frac{p}{2^q}\right) = g\left(a\frac{p}{2^q}\right)}_{H_p}$.

$f\left(a\frac{0}{2^q}\right) = f(0) = g(0) = g\left(a\frac{0}{2^q}\right)$ et $f\left(\frac{a}{2}\right) = g\left(\frac{a}{2}\right)$ d'après b. Donc H_0 et H_1 sont vraies

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Je suppose que H_p et H_{p-1} sont vraies . Alors

$$f\left(a\frac{p+1}{2^q}\right) = f\left(\frac{ap}{2^q} + \frac{a}{2^q}\right) \overset{\substack{par\ (**)\\ avec\ X=\frac{ap}{2^q}\ et\ Y=\frac{p}{2^q}}}{=} 2f\left(\frac{ap}{2^q}\right)f\left(\frac{a}{2^q}\right) - f\left(\frac{ap}{2^q} - \frac{a}{2^q}\right)$$

$$= 2f\left(\frac{ap}{2^q}\right)f\left(\frac{a}{2^q}\right) - f\left(\frac{a(p-1)}{2^q}\right) \underbrace{=}_{\substack{car\ H_{p-1}, H_p\ et\ H_1\\ sont\ vraies}} 2g\left(\frac{ap}{2^q}\right)g\left(\frac{a}{2^q}\right) - g\left(\frac{a(p-1)}{2^q}\right) \overset{\substack{par\ (**)\\ avec\ X=\frac{ap}{2^q}\\ et\ Y=\frac{p}{2^q}}}{=} g\left(a\frac{p+1}{2^q}\right).$$

J'en conclus, par le théorème de récurrence double, que $\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.
En considérant l'ensemble D_a défini au 15. En prenant $a = Inf U$, je peux affirmer que $\forall d \in D_a, f(d) = g(d)$.

d. Soit x un réel. Il existe une suite (d_n) d'éléments de D_a telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = x$. Alors $\forall n, f(d_n) \overset{\blacksquare}{=} g(d_n)$. Et comme f et g sont continues en x, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(d_n) = f(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(d_n) = g(x)$. Alors, en passant à la limite dans ■, je peux conclure que $f(x) = g(x)$. Ainsi, $f = g$.

e. Les éléments de F sont donc de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x))$ où $\omega > 0$. Réciproquement, nous savons que toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x))$ où $\omega > 0$ sont éléments de F. Ainsi, $F = \{(x \mapsto \cos(\omega x)) / \omega \in \mathbb{R}^{+*}\}$.