Programme de colle 15

Chap 10 Suites réelles et suites complexes.

I Définitions

- suite réelle , suite complexe , représentation.
- suite constante et suite stationnaire.
- suite réelle majorée, minorée, croissante, décroissante.
- suite bornée :

Une suite (u_n) est bornée lorsque : $\forall M \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$

Une suite réelle (u_n) est bornée sietssi elle est majorée et minorée sietssi elle est bornée à partir d'un certain rang.

- suite ayant une limite finie :

Une suite réelle (u_n) tend vers le réel L lorsque : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon)$

- suite réelle ayant une limite infinie :

Une suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque : $\forall A \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_A \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_A \Longrightarrow u_n \geq A)$.
Une suite réelle (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque : $\forall B \in \mathbb{R}^{-*}, \exists n_B \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_B \Longrightarrow u_n \leq B)$.

- suite convergente, suite divergente :

Une suite réelle (u_n) est convergente lorsqu'elle a une limite finie.
Une suite réelle (u_n) est divergente lorsqu'elle n'est pas convergente i.e. lorsqu'elle n'a pas de limite ou a une limite infinie.

II Propriétés fondamentales des suites

- Caractère borné ou pas :

Toute suite convergente est bornée.

Si (u_n) est une suite réelle de limite finie L et a et b sont deux réels tels que : $a < L < b$ alors à partir d 'un certain rang, $a < u_n < b$. En particulier, toute suite ayant une limite strictement positive est strictement positive à partir d'un certain rang.

Toute suite réelle ayant une limite infinie n'est pas bornée...

- Théorème Unicité de la limite.

Une suite (u_n) ne peut avoir qu'une seule limite quand $n \to +\infty$. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ cette limite lorsqu'elle existe.

- Caractérisation d'une suite convergente : Soit une suite (u_n)réelle (resp. complexe) et L un réel (resp. complexe)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - L = \cdots \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - L| = \cdots \Leftrightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon_n \ tel\ que\ \lim\limits_{n} \varepsilon_n = 0.$

- Théorème des gendarmes ou de limite par encadrement :

Soit u, v et w des suites réelles.
Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L \in \mathbb{R}$ alors (v_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

III Densité.

- Définition :

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. A est dense dans B lorsqu'entre deux éléments quelconques et distincts de B se trouve au moins un élément de A.

- Caractérisation séquentielle.

Soient B un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et A une partie de B. A est dense dans B sietssi tout élément de B est la limite d'une suite d'éléments de A.

- Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Tout réel est la limite d'une suite de nombres rationnels et aussi limite d'une suite de nombres irrationnels.

IV Borne sup. ou inf.

- Définition et théorème d'existence :

L'ensemble des majorants d'une partie A de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet un plus petit élément appelé borne supérieure de A et noté $sup(A)$; $sup(A)$ est donc le plus petit majorant de A.
L'ensemble des minorants d'une partie A de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet un plus grand élément appelé borne inférieure de A et noté $inf(A)$; $inf(A)$ est donc le plus grand minorant de A.
Lorsque A n'est pas majorée, $\sup(A) = +\infty$. Lorsque A n'est pas minorée, $\sup(A) = -\infty$.

- Relation entre plus petit (resp. grand) élément et borne inférieure (resp. supérieure). Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

Si il existe un élément m de A qui minore A alors $m = \min(A) = \inf(A)$.
Si il existe un élément m' de A qui majore A alors $m' = \max(A) = \sup(A)$.
Si A admet une borne inf M' et $M' \notin A$ alors A n'admet pas de minimum.
Si A admet une borne sup M et $M \notin A$ alors A n'admet pas de maximum.

- Caractérisation par les epsilon d'une borne sup. ou inf. finie.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée et m un réel. Alors, $m = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \leq m \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists a_\varepsilon \in A / m - \varepsilon < a_\varepsilon. \end{cases}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée et m un réel. Alors, $m = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \geq m \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists a_\varepsilon \in A / m + \varepsilon > a_\varepsilon. \end{cases}$

- Caractérisation séquentielle d'une borne sup. ou inf. (même infinie).

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et m un réel ou un infini.

$m = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \geq m \\ il\ existe\ une\ suite\ (a_n)\ d'éléments\ A\ telle\ que\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = m. \end{cases}$

$m = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \leq m \\ il\ existe\ une\ suite\ (a_n)\ d'éléments\ A\ telle\ que\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = m. \end{cases}$

V Autres propriétés fondamentales des suites

- Théorème d'opérations sur les limites
- Limite d'une suite monotone

Toute suite monotone a un limite (finie ou infinie).
Une suite croissante (resp. décroissante) admet une limite finie sietssi cette suite est majorée (resp. minorée).

- Passage à la limite dans une inégalité

Si u et v sont deux suites réelles telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ existent et à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

- Théorème de Césaro :

Si u est une suite de limite L alors $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend aussi vers L.

VI Comparaison des suites

- Définition d'une suite négligeable, équivalent ou dominée
- Caractérisation par le quotient
- Si $\forall n, u_n > 0\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L\ alors\ (L \in]0,1[\Longrightarrow (u_n)\ CV\ vers\ 0) et\ (L \in]1,+\infty[\Longrightarrow (u_n)\ DV\ vers +\infty)$
- Croissances comparées $\forall(\alpha,\beta,a) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \times]1,+\infty[,\ \ln(\mathrm{n})^\alpha \ll_{+\infty} n^\beta \ll_{+\infty} a^n \ll_{+\infty} n! \ll_{+\infty} n^n.$
- Opérations sur les suites négligeables et sur les suites équivalentes.
- Utilisation d'un équivalent (resp. développement limité) d'une fonction pour obtenir un équivalent ou un développement asymptotique d'une suite :

Si $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ alors $f(u_n) \sim_{n\to+\infty} g(u_n)$.
Si $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + o_0(x^p)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $f(u_n) = a_0 + a_1 u_n + a_2 {u_n}^2 + \cdots + a_p {u_n}^p + {u_n}^p o_{+\infty}(1)$.

VII Suites extraites

- Définition :

la suite v est extraite de la suite u lorsqu' il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

- Théorème de limite d'une suite extraite d'une suite ayant une limite; application : preuve de la divergence d'une suite :

Si la suite u admet une limite L alors toute suite extraite de u tend vers cette même limite L . Donc, par contraposée, si deux suites extraites de u ont des limites différentes alors u n'a pas de limite . Application : $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$n'a pas de limite car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 1 \neq -1 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$.

- Caractérisation de la limite d'une suite u par les deux suites extraites particulières : $(u_{2n})\ et\ (u_{2n+1})$.

La suite u admet une limite L <u>sietssi</u> les deux suites extraites $(u_{2n})\ et\ (u_{2n+1})$ tendent vers la même limite L.

VIII Suites adjacentes

- Définition

les suites réelles u et v sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante et la différence des deux tend vers 0 i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

- Théorème de convergence et d'approximation de la limite.

Si les suites u et v sont adjacentes alors u et v convergent vers la même limite finie L et $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |u_n - L| \leq |v_n - u_n|$.

- Valeur décimale approchée d'un réel.

Soit x un réel. Les suites $(10^{-n}\lfloor 10^n x \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor + 10^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$sont adjacentes et convergent vers x et $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x - 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor \leq 10^{-n}$; $10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor$ est appelé la valeur décimale approchée de x à 10^{-n}près.

- Théorème des segments emboités.

Si $\forall n, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$ alors il existe un réel x tel que : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}$.

IX Suites complexes

- Définition et caractérisation de la convergence :

La suite complexe u converge vers le nombre complexe L lorsque : $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon)$
La suite complexe u converge vers le nombre complexe L sietssi $(Re(u_n))$ converge vers $Re(L\ )$ et $(Im(u_n))$ converge vers $Im(L\ )$.

Chap. 11 Suites particulières.

I Suites explicites

- Définition
- Suite explicite de la forme à $u_n = f(n)$.

Si f est monotone sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall n, u_n = f(n)$ alors u est monotone et de même monotonie que f.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ et $\forall n, u_n = f(n)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

II Suites récurrentes

- Définition ; calcul des termes.

III Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

- Expression explicite d'une suite h vérifiant $\forall n, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ (où a et b indépendants de n).

Suite complexe : Soit a et b deux complexes fixés. Posons $(e.c)\ : r^2 + ar + b = 0$ *équation caractéristique*
Si $\Delta_{e.c} \neq 0\ i.e.\ (e.c)$ a deux solutions complexes distinctes r_1 *et* r_2 alors les suites $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ sont les suites de la forme $(\alpha r_1^n + \beta r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que α *et* β deux constantes complexes.
Si $\Delta_{e.c} = 0\ i.e. (e.c)$ a une solution complexe double r_0 alors *les suites* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ sont les suites de la forme $((\alpha + \beta n)r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que α *et* β deux constantes complexes.
Suite réelle : Soit a et b deux réels fixés . Posons $(e.c): r^2 + ar + b = 0$.
Si $\Delta_{e.c} > 0\ i.e. (e.c)$ a deux solutions réelles distinctes r_1 *et* r_2 alors les suites $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ sont les suites de la forme $(\alpha r_1^n + \beta r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que α *et* β deux constantes réelles.
Si $\Delta_{e.c} = 0\ i.e. (e.c)$ a une solution réelle double r_0 alors les suites $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ sont les suites de la forme $((\alpha + \beta n)r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que α *et* β deux constantes réelles
Si $\Delta_{e.c} < 0\ i.e. (e.c)$ a deux solutions complexes conjuguées $r = |r|e^{i\theta}$ *et* $\bar{r}$ alors les suites $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ sont les suites de la forme $([\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)]|r|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que α *et* β deux constantes réelles.

- ✓ Méthode quand le second membre est non nul : suite particulière + suite « homogène » :

Soit a, b des et (v_n) une suite. Si (t_n) est une suite particulière vérifiant $\forall n, s_{n+2} + as_{n+1} + bs_n = v_n$ alors les suites (u_n) telles que : $\forall n, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n$ sont les suites de la forme $(s_n + h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que (h_n) vérifie $\forall n, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$.

IV Suites périodiques

- ✓ Définition. Ecriture sous forme d' « infini-uplets ».

La suite u est périodique lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n;$ p est alors la période de u et on écrit
$u = (u_0, u_1, u_2, \dots u_{p-1}, u_0, u_1, u_2, \dots u_{p-1}, u_0, u_1, u_2, \dots \dots)$.

- ✓ Propriétés : valeurs, caractère borné et convergence.

Une suite p-périodique prend au plus p valeurs distinctes, est entièrement connue par la donnée de ses p premiers termes, est bornée ; Une suite p-périodique est convergente sietssi elle est constante.

V Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f fonction réelle définie sur D.

- Définition.

si $f(D) \subset D$ *et* $u_0 \in D$ alors $\forall n, u_n$ *existe et* $u_n \in D$.

- Limites possibles de u

si f est continue sur D et $\forall n,\ u_n \in D$ alors les limites possibles de u sont les points fixes de f sur D et les extrémités T de D qui n'appartiennent pas à D et qui vérifient : $T = \lim\limits_{x\to T} f(x)$.

- Monotonie de u

si f est croissante sur D et $\forall n, u_n \in D$, alors (u_n) est montone croissante si $u_1 - u_0 \geq 0$ et décroissante sur $u_1 - u_0 \leq 0$.
si f est décroissante sur D et $\forall n, u_n \in D$, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont montones et de monotonie contraire.

- Utilisation de $g: (x \mapsto f(x) - x)$:
  - pour connaitre le nombre de points fixes de f
  - pour connaitre le signe de $u_1 - u_0$ (et donc le sens de monotonie de u lorsque f est croissante)
- Cas où f est contractante

f est lipschitzienne sur I lorsqu'il existe un réel K tel que $\forall(x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.
f est contractante sur I lorsqu'il existe un réel $K \in [0,1[$ tel que $\forall(x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.
Si f est contractante sur D et $\forall n, u_n \in D$ et L est un point fixe de f sur D alors $\forall n, |u_n - L| \leq K^n|u_0 - L|$ et (u_n) converge vers L.

VI Suites implicites

- Définition :

Une suite implicite est une suite dont le terme de rang n , u_n , est la solution d'une équation $\varphi_n(x) = 0$ dans un intervalle I_n donné . u_n est alors entièrement défini par : $\begin{cases} \varphi_n(u_n) = 0 \\ u_n \in I_n \end{cases}$.

- Méthode d'étude.

  - Existence de chaque terme u_n : par le TVI + *stricte* monotonie ou le $TBCSM$ appliqué à φ_n sur I_n. On peut alors introduire ${\varphi_n}^{-1}$ et dire que $u_n = {\varphi_n}^{-1}(0)$.
  - Caractère bornée : lorsque $\forall n, I_n = I$ *et* I est bornée alors $\forall n, (u_n)$ est bornée.
  - Monotonie :

- lorsque $\forall n, I_n = I$ et φ_n est strictement croissante sur I alors le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $\varphi_n(u_{n+1}) - \varphi_n(u_n) = \varphi_n(u_{n+1})$.
- Lorsque $\forall n, sup(I_n) \leq inf(I_{n+1})$, u est croissante.

○ Limites possibles :
- Lorsque $\lim_{n\to+\infty}(inf(I_n)) = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Sinon, en supposant ou sachant que u a une limite, passer à la limite, quand $n \to +\infty$, dans l'égalité $\varphi_n(u_n) = 0$.

CONNAITRE ET SAVOIR ENONCER TOUS LES DEFINTIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DU COURS.

<u>Savoir énoncer et démontrer les résultats suivants :</u>

Q1) Si (u_n) est une suite réelle de limite finie L et a et b sont deux réels tels que : $a < L < b$ alors à partir d 'un certain rang, $a < u_n < b$. En particulier, toute suite ayant une limite strictement positive est strictement positive à partir d'un certain rang.

Q2) Si u et v convergent vers respectivement L_1 et L_2 alors $u + v$ converge vers $L_1 + L_2$.

Q3) Toute suite croissante et majorée a une limite finie et toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Q4) Le théorème de convergence de deux suites adjacentes.

Q5) Soit u une suite vérifiant $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$.

a) si $f(D) \subset D\ et\ u_0 \in D$ alors $\forall n, u_n\ existe\ et\ u_n \in D$.

b) si $\lim_{n\to+\infty} u_n = L \in D$ et f est continue sur D alors $f(L) = L$.

c) si f est croissante sur D et $\forall n, u_n \in D$, alors (u_n) est montone.

d) si f est décroissante sur D et $\forall n, u_n \in D$, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont montones et de monotonie contraire.