Programme de colle 17

Chap 13 Fonctions réelles dérivables - Fonctions convexes

I Généralités

1. **Définition d'une fonction dérivable en a, dérivable à gauche et à droite en a , dérivable sur un domaine**

- f est dérivable en $un\ réel\ a$ lorsque $a \in Df$ et $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $existe\ et\ est\ finie$. Dans ce cas, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) =$ $nombre\ dérivé\ de\ f\ a\ en\ a$ et la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est la tangente à Cf en a.
- f est continue à droite en a lorsque $a \in Df$ et $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $existe\ et\ est\ finie$. Alors, $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f_d{}'(a) =$ $nombre\ dérivé\ à\ droite\ de\ f\ \ en\ a$ et la droite d'équation $y = f(a) + f_d{}'(a)(x-a)$ est la demi-tangente à droite de Cf en a.
- f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I.

2. **Caractérisation de la dérivabilité par la dérivabilité à gauche et à droite**

f dérivable en a sietssi $f\ est\ dérivable\ à\ droite\ et\ à\ gauche\ en\ a\ et\ f_d{}'(a) = f_g{}'(a)$.

3. **Caractérisation de la dérivabilité par le DL**

f dérivable en a et $L = f'(a)$ sietssi f $admet\ le\ DL_1(a).: f(x) = f(a) + L(x-a) + o_a(x-a)$.

4. **Opérations sur les fonctions dérivables**

- Si f et g sont dérivables en a et λ est une constante alors $\lambda f, f+g\ et\ fg$ sont dérivables en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a), (f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)\ et\ (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- Si f et g sont dérivables en a et $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g} et \frac{f}{g}$ sont dérivables en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$
- Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$
- Si f et g sont dérivables sur D et λ est une constante alors $\lambda f, f+g\ et\ fg$ sont dérivables sur D et $\forall a \in D, (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$
$$et\quad (f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)\quad et\quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
- Si f et g sont dérivables sur D et $\forall a \in D, g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g} et \frac{f}{g}$ sont dérivables sur D et
$$\forall a \in D \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)}\ et\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$
- Si f est dérivable sur D et g est dérivable sur E et $\forall a \in D, f(a) \in E$ alors $g \circ f$ est dérivable sur D et
$$\forall a \in D,\ (g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)).$$

5. **Dérivabilité et fonction dérivée des fonctions usuelles.** Parmi nos fonctions usuelles, seules les fonctions partie entière, Arcsin, Arccos, valeur absolue et racine nième ne sont pas dérivables sur leur propre domaine de définition.

Connaitre parfaitement toutes les dérivées usuelles.

II Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle

6. **Théorème de condition nécessaire d'extremum**

Si I est un intervalle et $a \in \mathring{I}\ et\ f: I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a et admet un extremum (local ou global) en a alors $f'(a) = 0$.

7. **Théorème de Rolle.**

Si a et b sont des réels tq $a < b$ et f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a,b[, f'(c) = 0$.

8. **Théorèmes d'égalité et d'inégalités des accroissements finis.**

Si a et b sont des réels tq $a < b$ et f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$alors $\exists c \in]a,b[, f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Si f est continue sur l'intervalle I et dérivable sur $\mathring{I}$ et il existe un réel M tel que : $\forall t \in \mathring{I}, |f'(t)| \leq M$ alors f est M-lipschitzienne sur I.

Applications à l'obtention d'inégalités, à l'estimation d'approximation et aux suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

9. **Théorème « monotonie et signe de la dérivée ».**

Si f est continue sur **l'intervalle** I et dérivable sur l'intérieur de I alors

f est croissante sur l'intervalle I sietssi f' est positive sur l'intérieur de I .
f est décroissante sur l'intervalle I sietssi f' est négative sur l'intérieur de I .
f est constante sur l'intervalle I sietssi f' est nulle sur l'intérieur de I .

Applications à l'obtention d'inégalités et à l'étude de fonctions.

10. **Théorème de critère de dérivabilité (ou critère de limite du taux d'accroissement).**

Si a est un élément de l' **intervalle** I et est continue en a et dérivable au moins sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim_{x\to a} f'(x) = L$ alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$.

Si a est un élément de l' intervalle I et f est continue en a et dérivable au moins sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim_{x\to a} f'(x) = L \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = L$ et f' est continue en a.

Applications à l'étude de la dérivabilité

11. **Théorème de critère de classe C^n.**

$Soit\ n \in \mathbb{N}^*$. I un intervalle, a un élément de $I, L_0\ un\ réel\ et\ f$: $\left(x \mapsto \begin{cases} g(x)\ si\ x \in I\backslash\{a\} \\ L_0\ si\ x = a \end{cases}\right)$.

Si g est continue en a et de classe C^n sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim_{x\to a} g(x) = L_0\ et\ \forall k \in [\![1,n]\!], \lim_{x\to a} g^{(k)}(x) = L_k \in \mathbb{R}$

alors f est de classe C^n sur I et $\forall k \in [\![1,n]\!], f^{(k)}$: $\left(x \mapsto \begin{cases} g^{(k)}(x)\ si\ x \in I\backslash\{a\} \\ L_k\ si\ x = a \end{cases}\right)$.

III Formules de Taylor

12. Formule de Taylor reste- intégral

Si f est de classe C^{n+1} sur l'intervalle I alors $\forall (x,a) \in I^2, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

Application à l'obtention d'inégalités.

13. Inégalité de Taylor Lagrange.

Si f est de classe C^{n+1} sur l'intervalle I et il existe un réel M tel que : $\forall t \in I, \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq \underbrace{M}_{\substack{\textit{Indépendant de } t \\ \textit{mais dépendant} \\ \textit{de } I \textit{ et } n}}$ alors

$\forall (a,b) \in I^2,\ \left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Application à l'obtention d'inégalités, de valeurs approchées, aux calculs de limite de somme.

14. Application : pour tout réel x, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

15. Formule de Taylor-Young.

Si f est de classe C^n sur l'intervalle I et $a \in I$ alors $\forall (x,a) \in I^2, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n)$.

IV Fonctions convexes-concaves

16. Définition d'une fonction convexe/concave

Une fonction réelle f est convexe sur l'intervalle I lorsque $\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], f(tx+(1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.
Une fonction réelle$f$ est concave sur l'intervalle I lorsque $\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], f(tx+(1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$.

17. Caractérisation d'une fonction convexe. Inégalité vérifiée par une fonction convexe

Une fonction réelle$f$ est convexe sur l'intervalle I sietssi $\forall a \in I, \tau_a: \left(x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ est croissante sur $I\backslash\{a\}$.

Csq : si f est convexe sur l'intervalle I alors $\forall (a,b,c) \in I^3, (a<b<c \Longrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c})$

18. Régularité d'une fonction convexe

Si f est convexe sur l'intervalle I alors f est continue en tout point intérieur à I et est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur à I.

19. Caractérisations d'une fonction convexe dérivable

Soit f une fonction réelle et dérivable sur l'intervalle I. Alors ,
f est convexe sur l'intervalle I **sietssi** f'est croissante sur I **sietssi** $\forall (a,x) \in I^2, f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$.

20. Caractérisation d'une fonction convexe deux fois dérivable

Soit f une fonction f réelle et deux fois dérivable sur l'intervalle I. f est convexe sur l'intervalle I **sietssi** $f'' \geq 0$ sur I .

Application à l'obtention d'inégalités.

QDC :

Q1 : Théorème de dérivation d'un produit de deux fonctions et théorème de dérivation d'une fonction composée.
Q2 : Condition nécessaire d'extremum. Théorème de Rolle.
Q3 : Egalité et inégalité des accroissements finis

Q4 : Critère de dérivabilité
Q5 : pour tout réel x, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$.