Intégrale d'une fonction continue sur un segment

I. Définition officielle

1Définition : Soit a *et* b deux rées tq $a < b$ et φ une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$

1) Si φ est constante égale à λ sur $]a,b[$ alors par définition, $\int_{[a,b]} f = \lambda(b-a)\ (= \int_a^b f\,(t)dt)$.

2) Une **subdivision de** $[a,b]$ est une famille $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ d'éléments de $[a,b]$ telle que: $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$.

3) La fonction φ est **en escalier** sur le segment $[a,b]$ lorsqu' il existe une subdivision $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ telle que sur chaque $]a_k, a_{k+1}[$, φ est constante. Dans ce cas, la subdivision $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est dite adaptée à φ. Si $\forall x \in]a_k, a_{k+1}[, \varphi(x) = \lambda_k$ alors par définition, $\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k(a_{k+1} - a_k)\ (= \int_a^b \varphi\,(t)dt)$. Cette définition ne dépend pas de la subdivision choisie adaptée à φ et $\int_{[a,b]} \varphi$ est l'aire algébrique de la surface délimitée par C_φ, les droites d'équation $x = a, x = b$ et l' axe des abscisses.

2Théorème et définition admis : Soit f une fonction réelle et continue sur le segment $[a,b]$.

Pour tout réel $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction en escalier e_n telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left[\forall x \in [a,b], 0 \le |f(x) - e_n(x)| \le \frac{1}{n}\right]$.

Il existe donc une suite de fonctions en escalier (e_n) telle que : $\underbrace{sup_{[a,b]}|f - e_n|}_{\text{écart max entre } f(x) \text{ et } e_n(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ (**)$

Pour toutes les suites de fonctions en escalier $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient $(**)$, les suites $\left(\int_{[a,b]} e_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ont toutes une **même** limite finie commune qui est par définition, $\int_{[a,b]} f(t)dt$.

3Définition : pour toute suite de fonctions en escalier (e_n) qui vérifie $(**)$, $\int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f(t)dt \overset{def}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} e_n(t)dt$.

La fonction que l'on intègre s'appelle **l'intégrande.**

4. Conséquence : L'intégrale d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ est l'aire algébrique $^{(*)}$ de la surface délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses , les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$. Cette aire est notée $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_{[a,b]} f$.

5NB : 1)L'aire géométrique de la même surface est $\int_a^b |f(t)|dt$.

2)L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ ne dépend pas de t , $\int_a^b f(t)dt$ ne dépend que de l'expression de f , de a et de b. La variable t est dite muette, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(\theta)d\theta$.

6 Définition : Soit a *et* b deux réels. L'intégrale d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue sur $[a,b]$ est $\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b Re(f)(t)dt + i\int_a^b Im(f)(t)dt$. Alors $Re\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b Re(f)(t)dt$ *et* $Im\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b Im(f)(t)dt$.

Par convention, $\int_a^a f(t)dt = 0$ et $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$ pour tous a *et* b réels tels que $a < b$.

7Définition : Une fonction f est **continue** sur $]a,b]$ et prolongeable par continuité en a alors $\int_{[a,b]} f(t)dt \overset{def}{=} \int_{[a,b]} \tilde{f}(t)dt$

8Définition : Une fonction φ est **continue par morceaux** (« par mcx ») sur le segment $[a,b]$ lorsque il existe une subdivision $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ telle que : sur chaque $]a_k, a_{k+1}[$ tq $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\varphi = \varphi_k$ avec φ_k continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ et ayant des limites finies en ${a_k}^+$ et à gauche en ${a_{k+1}}^-$. Dans ce cas, la subdivision $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est dite adaptée à φ.

Et, par définition, $\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \tilde{\varphi}_k(x)dx$ où $\tilde{\varphi}_k$ est le prolongement par continuité de φ_k sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$.

9NB : 1) les valeurs de $\varphi(a_k)$ n'ont aucune influence sur le calcul de $\int_{[a,b]} \varphi$.

2) on peut prouver que cette définition ne dépend pas de la subdivision choisie adaptée à φ. Autrement dit , quelle que soit la subdivision adaptée à la fonction φ **continue par morceaux** sur $[a,b]$, $\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \tilde{\varphi}_k(x)dx$ vaut toujours le même réel $\int_{[a,b]} \varphi$.

11Def : f est continue par morceaux sur un intervalle I lorsque f est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.

12CONSEQUENCE : Si f est continue par morceaux sur tout segment inclus dans l'intervalle I et à valeurs réelles ou complexes alors pour tout $(a,b) \in I^2$, $\int_a^b f(t)dt$ existe.

13Exemple : Justifier l'existence et calculer $I = \int_0^2 f(t)dt$ *où* $f(t) = \begin{cases} tln(t) \text{ si } t \in]0,1] \\ \frac{1}{t^2+2t+4} \text{ si } t \in]1,\frac{3}{2}] \\ \frac{t}{t^2+7t+6} \text{ si } t > \frac{3}{2} \end{cases}$.

II. Rappel des premières propriétés déjà rencontrées.

14**Théorème Relation de Chasles** : Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit a, b, c trois réels de I.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

(Valable si f est complexe et/ou continue par morceaux)

15**Théorème Linéarité de l'opérateur intégral :** Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . Soit a, b deux réels de I . soit α et β deux constantes réelles ou complexes . $\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

(Valable si f est complexe et/ou continue par morceaux)

16**Théorème Positivité de l'opérateur intégral :** Si a, b sont deux réels tels que $a < b$ et f est réelle et continue et positive sur $[a, b]$ alors $\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \geq 0$. (valable si f continue par morceaux)

17**Théorème Croissance de l'opérateur intégral :** Si a, b sont deux réels tels que $a < b$ et f et g sont réelles et continues sur $[a, b]$ et $\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)$ alors $\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt = \int_{[a,b]} g(t)dt$

(valable si f et g continues par morceaux)

18**NB** : L'ordre des bornes est important !!! Il doit un ordre CROISSANT !!

19Méthode : Pour majorer (minorer ou encadrer) une intégrale , il suffit de majorer (minorer ou encadrer) la fonction sur le **segment d'intégration.** (rappel : pour encadrer une somme , il suffit d'encadrer chaque terme de la somme)

20**Exemple :** Soit f une fonction réelle et continue sur $[0\,;1]$. $\forall n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \int_0^1 \underbrace{x^n f(x)}_{g(x)} dx$. Calculons $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Existence : Soit $n \in \mathbb{N}$. u_n existe car g est continue sur $[0\,;1]$ (car f et $(x \mapsto x^n)$ le sont).

Calcul de la limite : f est continue sur le segment $[0\,;1]$ donc f est bornée sur $[0\,;1]$: il existe m et M réels tels que :$\forall x \in [0\,;1], m \leq f(x) \leq M$. Alors, $\forall x \in [0;1], x^n \geq 0, et\ ainsi$, $mx^n \leq x^n f(x) \leq x^n M$. Alors, $\int_0^1 mx^n dx \leq \int_0^1 f(x)x^n dx \leq \int_0^1 Mx^n dx$ par croissance de l'opérateur intégral. Il s'en suit que : $m\int_0^1 x^n dx \leq u_n \leq M\int_0^1 x^n dx$. Or, $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Donc,$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{m}{n+1} \leq u_n \leq \frac{M}{n+1}$. Ainsi, par encadrement, je peux conclure que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

III. Inégalité triangulaire

21**Prop d' inégalité triangulaire intégrale:** Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Si f est continue (réelle ou cpxe) sur $[a, b]$ alors $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$ i.e. $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$. démo

22**NB** : l'ordre des bornes est important et doit être CROISSANT car $\left|\int_b^a f\right| \geq 0$ et $|f|$ positive sur le segment $[a, b]$ donc $\int_a^b |f| \geq 0$ et $\int_b^a |f| \leq 0$. L'inégalité est grossièrement fausse si les bornes sont inversées.

Généralisation :

23**Inégalité triangulaire intégrale bis :** Si f est continue sur l'intervalle I contenant c et d alors $\left|\int_c^d f(t)dt\right| \leq \left|\int_c^d |f(t)|dt\right|$.

Formule valable si $c \geq d$ et si f est complexe (admis) et/ou continue par morceaux démo

24**Exemples**: 1. Soit f une fonction complexe de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t)dt = 0$.

2. Soit f une fonction continue sur [0,1]. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t^n)dt = f(0)$.

IV. Primitive

25**Théorème fondamental :** Si f est **continue sur un intervalle** I et a est un élément de I alors F , l'application définie sur I par : $\forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t)dt$, est la primitive de f qui s'annule en a . ***(valable si f est complexe).*** démo

26**Attention** : toutes les primitives de f n'ont pas cette forme … celles qui ne s'annulent pas n'ont pas cette forme . Par contre celles qui sont définies sur un intervalle et s'annulent en un point de cet intervalle ont cette forme . Mais de manière générale , on note $\int^x f(t)dt$ ou $\int f(x)dx$ une primitive quelconque de f.

27**Conséquence fondamentale** : Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle et chacune de ces primitives est de classe C^1sur cet intervalle. ***(valable si f est complexe).***

28Propriété : Si f est de classe C^1 sur l'intervalle I contenant a alors $\forall x \in I, f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$. ***(valable si f est complexe).***

29Théorème : Soit f continue sur un intervalle I et $(a\,,b) \in I^2$.

Pour toute primitive F de f sur I , on a : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \overset{notation}{=} [F(t)]_a^b$. ***(valable si f est complexe).***

30Théorème d'intégration par parties (IPP) : Soit u *et* v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I et $(a\,,b) \in I^2$. Alors, $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$. (valable si u et v est complexe).

31Théorème de changement de variables (CV) ***(valable si f est complexe).***

Soit f une fonction continue sur un intervalle J et φ une fonction réelle de classe C^1 sur un intervalle I telles que : $\varphi(I) \subset J$.

Soit $(a\,,b) \in I^2$. Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

$$x = \varphi(t)$$
$$dx = \varphi'(t)dt$$
$$t = a \Rightarrow x = \varphi(a)$$
$$t = b \Rightarrow x = \varphi(b)$$

32Application aux fonctions paires-impaires et /ou périodiques :

1. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et impaire alors pour tout réel a, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$
2. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire alors pour tout réel a, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$
3. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique alors pour tous réels a *et* b , $\int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt$ et $\int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt$

33Application à la recherche des primitives usuelles : $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = aArctan\left(\frac{x}{a}\right) + cste$ et $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = Arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + cste$

V. Lemme fondamental d'annulation

34Théorème ou lemme d'annulation

Si f est réelle et **continue** et $\forall t \in [a,b], f(t) \geq 0$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors f est nulle sur $[a,b]$. démo

35Sa contraposée : Si f est réelle et **continue** sur le segment $[a,b]$ et positive sur $[a,b]$ et prend une valeur non nulle alors l'intégrale de f sur $[a,b]$ est strictement positive. démo

VI. Moyenne d'une fonction continue sur un segment

36Théorème d'inégalités de la moyenne :

1) Si f est réelle et **continue** sur le segment $[a,b]$ tq a, b *réels et* $a < b$ alors $min_{[a,b]}f \leq \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f \leq max_{[a,b]}f$.
2) Si f est continue sur l'intervalle I alors pour tous réels a et b de I, $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq |b-a|sup_I|f|$. démo

37Théorème de l' égalité de la moyenne : Si f est continue sur l'intervalle I alors pour tous réels a et b de I, il existe un élément x_0 compris entre a et b tel que : $f(x_0) = \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(t)dt\right)$. démo

38Définition : $\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(t)dt\right)$ est appelée **la valeur moyenne de f entre a *et* b.**

39Exercice classique : Egalité de la moyenne généralisée (A SAVOIR DEMONTRER): Si f et g sont réelles et **continues** sur le segment $[a,b]$ et g est positive sur $[a,b]$ alors $\exists x_0 \in [a,b]$ tq: $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(x_0)\int_a^b g(t)dt$ (encore valable si $a \geq b$; dans ce cas, $x_0 \in [b,a]$).

40Rque : Si g n'est pas toute nulle, alors le réel $\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt}$ est appelée **la moyenne** $\underbrace{pondérée}_{coefficientée}$ **par g de f entre a *et* b.**

VII. Inégalité de la Cauchy-Schwarz

41Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz : Soit a et b réels tels que $a \leq b$.

SI f *et* g sont réelles et continues sur $[a,b]$ alors $\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2dt\right)$. démo

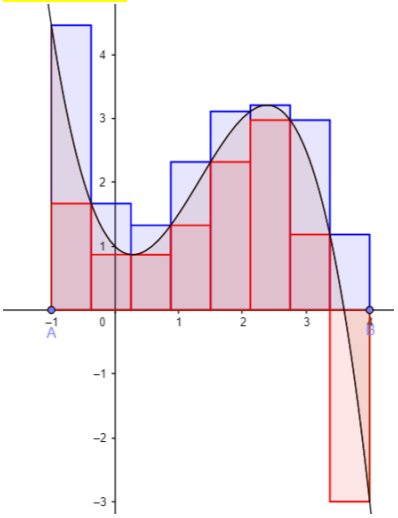
VIII. Sommes de Riemann-Approximation par la méthode des rectangles -

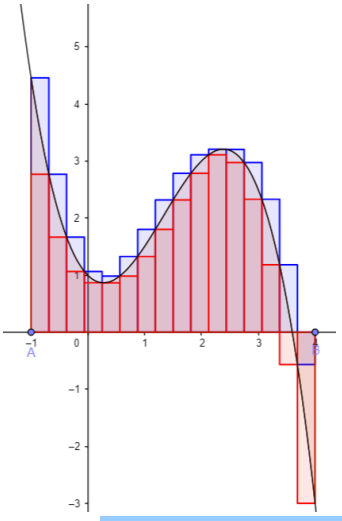
42Théorème : Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ alors

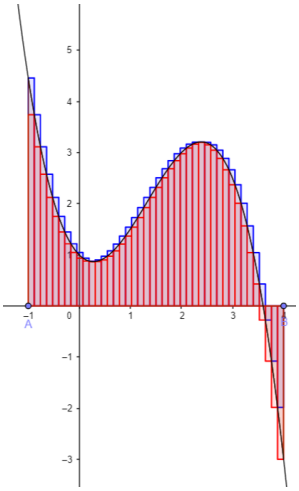
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)}_{\substack{\text{une somme de Riemann} \\ \text{associée à } f \text{ sur } [a,b]}} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)}_{\substack{\text{une AUTRE somme de Riemann} \\ \text{associée à } f \text{ sur } [a,b]}}.$$

démo

42bis Illustration : Plus n augmente, plus la fonction en escalier e_n définie par: $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall x \in [a+k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}[, e_n(x) = f(x)$ et $e_n(b) = f(b)$ se rapproche de f. La courbe en escalier la représentant vient, à mesure que n grandit, épouser la courbe de f.







D'une part, ce théorème des sommes de Riemann sert à calculer des limites de sommes (dite de Riemann) Cf 43 et ex 44.
D'autre part, il sert à obtenir des valeurs approchées d'intégrales qu'on ne sait pas calculer. On applique alors la méthode dite des rectangles : on approche l'intégrale sur $[a,b]$ d'une fonction f par des sommes d'aires de rectangle correspondant aux intégrales des fonctions en escalier e_n définie par $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall x \in [a+k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}[, e_n(x) = f(x)$ et $e_n(b) = f(b)$. Cf programme de 45.

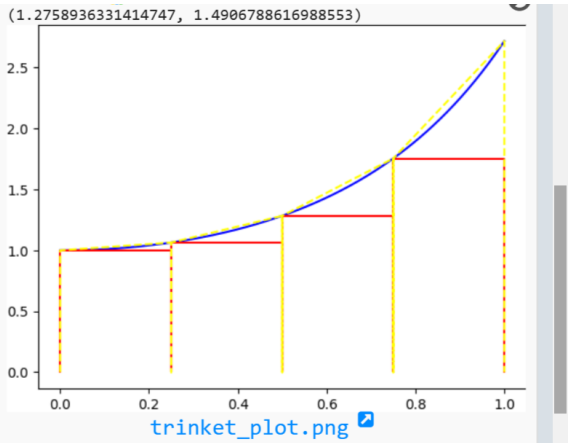
43Cas particulier : Si f une fonction continue sur [0,1] alors $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

44Exemple : Posons $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+4k^2}}$. Calculons $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

45Programmation de la méthode de Riemann

```
from pylab import *
import matplotlib.pyplot as pl
from math import*
#approchons l'intégrale sur [0,1] de la fonction f(t)=exp(t²)
#par la méthode des rectangles et celle des trapèzes.
#cette intégrale vaut 1,46265.
def Riemann(n):
  U=[k/(4**n) for k in range(4**n+1)]
  V=[exp(x**2) for x in U]
  plot(U,V,color='blue',)
  X=[]
  Y=[]
  Z=[]
  S=0
  T=0
  for i in range (n):
    X+=[i/n,i/n,(i+1)/n,(i+1)/n]
    Y+=[0,exp((i/n)**2),exp(((i)/n)**2),0]
    Z+=[0,exp((i/n)**2),exp(((i+1)/n)**2),0]
    S+=exp((i/n)**2)/n
    T+=(exp((i/n)**2)+exp(((i+1)/n)**2))/(2*n)
  plot(X,Y,color='red')
  plot(X,Z,'--',color='yellow')
  return(S,T)
print(Riemann(4))
show()
()
```

```
(1.2758936331414747, 1.4906788616988553)
```



Etude de fonctions définies par une intégrale i.e. de la forme :

$\varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ où f ,u et v sont des fonctions.

Domaine de définition de φ : Considérons $D = \{x \in \mathbb{R}/u(x) \in I \; et \; v(x) \in I\}$.

$\forall x \in D, u(x) \in Iet \; v(x) \in I$, comme I est un intervalle, le segment d' extrémités $u(x)$ et $v(x)$ est inclus dans I et donc f est continue sur ce segment et par conséquent $\varphi(x)$ existe. Donc φ est au moins définie sur D . Si f est continue sur une réunion d'intervalles disjoints : $I_1 \cup I_2$, alors on fait le même travail sur chacun de ces intervalles, on trouve deux domaines $D_1 \; et \; D_2$, et φ est au moins définie sur $D_1 \cup D_2$.

Continuité et dérivabilité de φ : Considérons une primitive F de f sur I (F existe puisque f est continue sur I) .

Alors $\forall x \in D, \varphi(x) = F\big(v(x)\big) - F\big(u(x)\big) = F \circ v(x) - F \circ u(x)$.

On sait que F est de classe C^1sur I et $u(D) \subset I \; et \; v(D) \subset I$. Donc si $u \; et \; v$ sont continues sur D alors φ est continue sur D.

Et si $u \; et \; v$ sont dérivables sur D alors φ est dérivable sur D et

$$\forall x \in D, \varphi'(x) = v'(x)F'\big(v(x)\big) - u'(x)F'\big(u(x)\big) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

Exemples : 1) Etudions F et G telles que $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ et $G(x) = \int_x^{3x} e^{-t^2}dt$.

Domaine de définition : $f: (t \mapsto e^{t^2})$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) \; et \; G(x)$existent . $D_F = D_G = \mathbb{R}$.

Etude de F :D'après le théorème fondamental, F est la primitive de f qui s'annule en 0 .

- Donc, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = e^{-x^2}$. Par conséquent, F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(-x) = -\int_{-x}^{0} e^{-t^2}dt \underset{u=-t}{\overset{CV}{=}} -\int_x^0 e^{-u^2}(-1)du = -F(x)$. Donc F est impaire .
- F étant croissante , $\forall x \in [0;1], F(0) \le F(x) \le F(1) et \;\; \forall x > 1, F(x) = \int_0^1 e^{-t^2}dt + \int_1^x e^{-t^2}dt = F(1) + H(x)$. Or, $\forall t \in [1;x], -t^2 \le -t \; donc, e^{-t^2} \le e^{-t}$. Donc par croissance de l'intégrale ,$H(x) = \int_1^x e^{-t^2}dt \le \int_1^x e^{-t}dt = [-e^{-t}]_1^x = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^x} \le \frac{1}{e}$ .Alors $\forall x > 1, F(1) \le F(x) \le F(1) + \frac{1}{e}$. F est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$ et par imparité sur $\mathbb{R}^-$aussi . Ainsi F est bornée.
- F étant croissante et bornée, F a une limite finie en $+\infty$ et une limite finie en $-\infty$ et par imparité ces deux limites sont opposées.

Etude de G $\forall x \in \mathbb{R}, \; G(x) = F(3x) - F(x)$.

- Par conséquent, $G(-x) = F\big(3(-x)\big) - F(-x) = -G(x)$; donc G est impaire.
- De plus, G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = 3F'(3x) - F'(x) = 3e^{-9x^2} - e^{-x^2} = 3e^{-x^2}\left(e^{-8x^2} - \frac{1}{3}\right)$. Alors,$G'(x) >$ $0 \;\; \boldsymbol{si \; et \; ssi} \;\; e^{-8x^2} - \frac{1}{3} > 0 \;\; \boldsymbol{si \; et \; ssi} \;\; -8x^2 > -\ln(3) \;\; \boldsymbol{si \; et \; ssi} \; x^2 < \frac{\ln(3)}{8} \;\; \boldsymbol{si \; et \; ssi} \; x \in]-\sqrt{\frac{\ln(3)}{8}}, \sqrt{\frac{\ln(3)}{8}}[$.

Donc, G est strictement croissante sur $]-\sqrt{\frac{\ln(3)}{8}}, \sqrt{\frac{\ln(3)}{8}}[$ et strictement décroissante sur $]\sqrt{\frac{\ln(3)}{8}}, +\infty[$ et sur $]-\infty; -\sqrt{\frac{\ln(3)}{8}}[$

- Enfin, fixons $x > 0$. pour tout $t \in [x, 3x], -9x^2 \le -t^2 \le -x^2$. Donc, $e^{-9x^2} \le e^{-t^2} \le e^{-x^2}$.
  Alors , par croissance de l'intégrale , $\int_x^{3x} e^{-9x^2}dt \le \int_x^{3x} e^{-t^2}dt \le \int_x^{3x} e^{-x^2}dt$ **le .** $2xe^{-9x^2} \le G(x) \le 2xe^{-x^2}$.
  Or , $\lim\limits_{t\to+\infty} \sqrt{t}e^{-t} \overset{CC}{=} 0$ donc par composition , $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2}e^{-x^2} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2}e^{-9x^2}$.Donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

2)Soit $f: (x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}dt)$. Calculons les limites de f aux bords de son domaine de définition.

Domaine de définition : $Soit \; g : \left(t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}\right). Dg =]0,1[\cup]1, +\infty[$ et g est continue sur Dg.

Soit $x \in]0,1[$. Alors $x^2 \in]0,1[\; et \; x^2 < x \; donc$, $[x^2, x] \subset]0,1[$. Ainsi, g est continue sur $[x^2, x]$ et $f(x)$ existe .

Soit $x \in]1,+\infty[$. Alors $x^2 \in]1,+\infty[\; et \; x < x^2 \; donc, [x, x^2] \subset]1,+\infty[$. Ainsi, g est continue sur $[x^2, x]$ et $f(x)$ existe. Ainsi, $Df = Dg$.

Limites aux bords de son domaine de définition.

En 0 ? Soit $x \in]0,1[$. Alors$\forall t \in [x^2, x], \ln(x^2) \le \ln(t) \le \ln(x) < 0 \; donc, \frac{1}{\ln(x)} \le \frac{1}{\ln(t)} \le \frac{1}{\ln(x^2)} < 0$ et par croissance de l'opérateur intégral $\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x)}dt \le \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}dt \le \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x^2)}dt < 0$.

Ainsi, $\forall x \in]0,1[$, $\frac{x-x^2}{\ln(x)} \le -f(x) \le \frac{x-x^2}{2\ln(x)} < 0$. Or, $\lim\limits_{x\to0} \frac{x-x^2}{\ln(x)} = 0$. Donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$.

Mais, $\frac{x-x^2}{\ln(x)} = x\frac{(1-x)}{\ln(x)} = \frac{-x}{\frac{\ln(x)}{x-1}}. Donc$, $\lim\limits_{x\to1} \frac{x-x^2}{\ln(x)} = -1 \; et \; alors \; \lim\limits_{x\to1} \frac{x-x^2}{2\ln(x)} = -\frac{1}{2}$. Donc cet encadrement ne permet pas de conclure sur la limite de f en 1^-.

En +∞ ? Soit $x \in]1,+\infty[$. Alors$\forall t \in [x, x^2], 0 < \ln(x) \le \ln(t) \le \ln(x^2) \; donc, \frac{1}{\ln(x)} \ge \frac{1}{\ln(t)} \ge \frac{1}{\ln(x^2)} > 0$ et par croissance de l'opérateur intégral $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)}dt \ge \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}dt \ge \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)}dt > 0$. Ainsi, $\forall x \in]1,+\infty[, \frac{x^2-x}{\ln(x)} \ge f(x) \ge \frac{x^2-x}{2\ln(x)} > 0$. Or, $\frac{x^2-x}{2\ln(x)} = \frac{x^2}{\ln(x)}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\right)$. Et grâce aux croissances comparées , $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{2\ln(x)} = +\infty$. Donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Mais ce deuxième encadrement ne permet toujours pas de conclure sur la limite de f en 1^-.

En 1 ? Soit $x \in]1,+\infty[$ et $t \in [x, x^2]$.la fonction ln est continue et dérivable sur $[1, t]$. Alors d'après l'EAF , $\exists c_{(t)} \in]1, t[$ tel que : $\frac{\ln(t)-ln(1)}{t-1} = ln'(c) = \frac{1}{c}$. Or , $c \in]1, x^2[\; donc$, $\frac{1}{x^2} \le \frac{1}{c} \le 1 \; et \; alors, 0 < \frac{1}{x^2} \le \frac{\ln(t)-\ln(1)}{t-1} = \frac{\ln(t)}{t-1} \le 1$.

Alors, $\forall t \in [x, x^2], 0 < \frac{1}{t-1} \le \frac{1}{\ln(t)} \le \frac{x^2}{t-1}$. Donc par croissance de l'opérateur intégral, $\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}dt \le f(x) \le \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t-1}dt$

i.e. $[ln|t-1|]_x^{x^2} \le f(x) \le x^2[ln|t-1|]_x^{x^2}$ i.e. $ln\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| \le f(x) \le x^2 ln\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right|$. Alors $\forall x \in]1,+\infty[, ln|x+1| \le f(x) \le x^2 ln|x+1|$. Or , $\lim\limits_{x\to1^+} ln|x+1| = \ln(2) = \lim\limits_{x\to1^+} x^2 ln|x+1|$.Ainsi, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \ln(2)$. Idem en 1^- : il faut travailler avec $x \in]0,1[\; et \; t \in [x^2, x] \subset [x^2, 1]$ et intégrer entre x^2et x ,on obtient $\int_{x^2}^{x} \frac{1}{t-1}dt \le -f(x) \le \int_{x^2}^{x} \frac{x^2}{t-1}dt$ et finalement $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \ln(2)$.

METHODES DE RESOLUTION D'EXERCICES D'INTEGRATION

Etude de la fonction f définie par : $f(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} g(t)dt$	
$Domaine\ de\ définition\ de\ f$	• Chercher le domaine de définition de g . • Chercher le domaine D de continuité (ou de prolongement par continuité possible) de g. • Chercher l'ensemble D' les réels x tels que tout l'intervalle d'extrémités $u(x)$ et $v(x)$ soit inclus dans D. f est alors définie sur D' (au moins : vous verrez l'an prochain comment étendre ce domaine) .
$Parité\ de\ f$	• Je regarde si D' est centré en 0 • Si oui , je calcule $f(-x)=\int_{u(-x)}^{v(-x)} g(t)dt$ .Si $u\ et\ v$ sont paires alors f est paire . sinon, il est souvent utile de faire le changement de variable $u=-t$.
$Périodicité\ de\ f$	• Je regarde si D' est périodique de périodique T • Si oui , je calcule $f(x+T)=\int_{u(x+T)}^{v(x+T)} g(t)dt$. Si $u\ et\ v$ sont T-périodiques alors f l'est aussi. Sinon, il est souvent utile de faire le changement de variable $u=t-T$.
$Signe\ de\ f$	**Le signe de f :** • Fixer x dans D' . **si g est de signe constant** sur tout l'intervalle d'extrémités $u(x)$ et $v(x)$alors par positivité de l'intégrale (attention les bornes doivent être croissantes : le signe de $v(x)-u(x)$ dépend parfois de x), j'obtiens le signe de $f(x)$. • Sinon , **l'étude des variations** pourra donner son signe **.**
$Continuité\ et\ Dérivation\ de\ f$	Introduire une **primitive G de g** sur D . • Ecrire f en fonction de G : $\forall x\in D', f(x)=G\big(v(x)\big)-G\big(u(x)\big)=(G\circ v)(x)-(G\circ u)(x)$.(**) • Justifier la continuité de f grâce à la continuité de u , $v\ et\ G$. • Justifier la dérivabilité de f grâce à la dérivabilité de u , $v\ et\ G$. • Déterminer la dérivée de $f$grâce à (**) . Attention ,il y a des **fonctions composées** : $f'(x)=v(x)G'\big(v(x)\big)-u'(x)G'\big(u(x)\big)$ $f'(x)=v'(x)g(v(x))-u'(x)g(u(x))$.
$Variations\ de\ f$	**En revenant à la définition de la monotonie** Soit x,y deux éléments de D' tels que $x<y$. Etudier le signe de $f(x)-f(y)$. **Par dérivation :** • Justifier la dérivabilité de f et calculer f' (Cf paragraphe précédent) • Etudier le signe de f'.
$Limite\ de\ f au\ bord\ a\ de\ D'$	**Par encadrement :** le but est d'encadrer $f(x)$ par deux fonctions de même limite en a. • Fixer x dans D' . Pour t compris entre $u(x)$ et $v(x)$,encadrer $g(t)$. • « Intégrer » cet encadrement entre les bornes $u(x)\ et\ v(x)$ **<u>croissantes</u>** en utilisant la croissance de l'intégrale . • Calculer les intégrales qui encadrent . • Conclure en faisant tendre $x\ vers\ a$. Parfois , l'encadrement prouve simplement que f est **bornée** ou majorée ou minorée . Si f est minorée et décroissante (resp. croissante)alors f admet une limite finie au bord supérieur (resp. inférieur) de D' (…). On peut ainsi **justifier l'existence d'une limite sans déterminer la valeur de cette limite.**
Etude de la suite I définie par : $I_n=\int_a^b g_n(t)dt$ (où $n\in\mathbb{N}$).	
$Existence\ de\ I_n$	• Chercher le domaine de définition de g_n . • Chercher le domaine D de continuité de g_n. • Vérifier que le segment d'extrémités $a\ et\ b$ est inclus dans D .
$Variation\ de\ la\ suite\ (I_n)$	Le but est d'étudier le signe de $I_{n+1}-I_n$: • Ecrire $I_{n+1}-I_n$ =$\int_a^b g_{n+1}(t)-g_n(t)dt$ en utilisant la linéarité de l'intégrale • Etudier le signe de $g_{n+1}(t)-g_n(t)$ pour t compris entre a et . • Conclure en utilisant la propriété de positivité de l'intégrale entre les bornes $a\ et\ b$ **<u>croissantes</u>**.
$Convergence\ de\ la\ suite\ (I_n)$	Le but est souvent de montrer que $la\ suite\ (I_n)$ est minorée si elle est décroissante ou majorée si elle est décroissante.

	• Le signe de $la\ suite\ (I_n)$permet de démontrer que la suite est majorée ou minorée par 0. Pour connaitre ce signe , il suffit de connaitre le signe de $g_n(t)$ pour t compris entre $a\ et\ b$ et d'appliquer la positivité de l'intégrale. Plus généralement , • Minorer (ou majorer) $g_n(t)$ pour t compris entre $a\ et\ b$ par une CONSTANTE (indépendante de t) et d'appliquer la croissance de l'intégrale entre $a\ et\ b$ avec bornes croissantes.
$Limite\ de\ la\ suite\ (I_n)$	**Par encadrement ,** le but est d'encadrer I_n par deux suites de même limite quand n tend vers l'infini. • Fixer n .Pour tout t compris entre a et b ,encadrer $g_n(t)$. • « Intégrer » cet encadrement entre les bornes $a\ et\ b$ **croissantes** en utilisant la croissance de l'intégrale . • Calculer les intégrales qui encadrent . • Conclure en faisant tendre n vers l'infini . **Par intégration par parties** , en choisissant la fonction à intégrer et celle à dériver de sorte de faire apparaitre des suites de limite nulle $(par\ ex: \frac{1}{n})$ **En revenant à la définition de la convergence d'une suite (avec les $epsilon$)**
Etude de la fonction f définie par : $f(x) = \int_a^b g(x,t)dt$	
$Domaine\ D\ de\ déf°\ de\ f$	• Chercher les réels x tels que $h: \big(t \mapsto g(x,t)\big)$ soit continue (par mcx) sur $[a,b]$.
$Variations\ de\ f$	• Comparer $f(x)$ et $f(y)\ en\ comparant\ g(x,t)\ et\ g(y,t)$ à $t\ fix$é.
$Limite\ de\ f$	**Par encadrement .** **Par intégration par parties**. **En revenant à la définition de la limite et de la dérivabilité d'une fonction.**