

d. Déterminer la limite de I_n .

3. Soit $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t) dt$.

a. Etudier le sens de variation de (I_n) . En déduire que (I_n) est convergente.

b. Calculer $I_n + I_{n+1}$. En déduire la valeur de la limite de (I_n) .

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$. Montrer que la suite u est convergente.

Soit $a = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a - u_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite u .

5. Soit $\forall n, S_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \right)$.

a. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Qu'en déduit-on ?

b. En remarquant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\ln(2)$.

Ex 5 Théorique...

1. Soit f une fonction continue sur $[0,2]$. Objectif : calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 \underbrace{\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) dx}_{u_n}$.

a. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n$ existe et $u_n = n \left[\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt \right]$.

b. En utilisant une primitive de f , déterminer la limite de la suite u .

2. Soit f une fonction réelle et continue sur $[a, b]$. Montre qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que : $\int_a^c f(t) dt = \int_c^b f(t) dt$.

3. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x^n) dx = f(0)$. En déduire un équivalent simple en $+\infty$ de

$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$. (on pourra faire une I.P.P).

Ex 6 Suite $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha})_{n \geq 1}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

A. Convergence ou divergence $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha})_{n \geq 1}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et la suite (Z_n) définie par : $Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Montrer que si $\alpha \leq 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n = +\infty$

2. Montrer que si $\alpha > 0$ alors pour tout entier naturel k non nul, $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$.

a. En déduire la limite et un équivalent de (Z_n) quand $\alpha \leq 1$.

b. Montrer que la suite (Z_n) converge quand $\alpha > 1$.

B. Limite de $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2})_{n \geq 1}$.

1. Justifier que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

2. Prouver que si f est une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = 0$

3. Montrer que : $\varphi : \left(t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{\sin(t)} & \text{si } t \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} \right)$ est de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on donnera une expression φ' .

4. Trouver une fonction polynomiale h de degré 2 et telle que $h(0) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi h(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall t \in [0, \pi], h(t) \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \left(\frac{t}{2\pi} - 1 \right) \varphi\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right)$.

6. En déduire que : $S_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{u}{\pi} - 1 \right) \varphi(u) \sin((2n+1)u) du - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt$.

7. En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ex 7 A. Dérivation de fonctions définies par un intégrale.

1. Montrer que la fonction $\left(x \mapsto \int_0^x \frac{\sin(xt)}{t} dt \right)$ est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer cette dérivée.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{1+t^8} dt$.

3. Montrer que $f : \left(x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}(\sqrt{t}) dt \right)$ est constante (par deux méthodes).

B. Limite d'une fonction définie par un intégrale.

4. Etude de la limite en 0 des fonctions $\left(x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt \right)$ et $\left(x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\sin(2t)}{t} dt \right)$.

5. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

C. Etude de fonctions définies par un intégrale .

6. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.
 - a. Montrer que f est impaire.
 - b. Etudier les variations de f .
 - c. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
7. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$. Montrer que f est strictement croissante sur \mathbb{R}^{+*} et déterminer sa limite en 0 et sa limite en $+\infty$.
8. Soit Φ la fonction définie par : $\Phi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} dt$.
 - a. Déterminer D_Φ et calculer $\Phi(0)$.
 - b. Montrer que : $\forall x > 0, \frac{\pi}{4} e^{-2x} \leq \Phi(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x}$. En déduire la limite de Φ en $+\infty$ et la branche infinie C_Φ en $+\infty$.
 - c. Faites de même en $-\infty$.
 - d. Etudier les variations de Φ et représenter son graphe.
9. Soit $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$.
 - a. Déterminer Df . Etudier la parité de f .
 - b. Etudier la dérivabilité de f et donner une expression de $f'(x)$. Reconnaître f .

Ex 8 Etude d'une primitive

Soit f et I les fonctions définies par : $f(t) = \frac{\text{Arctan}(2t) - \text{Arctan}(t)}{t}$ et $I(x) = \int_0^x f(t) dt$

1. Calculer $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$.
2. Montrer que I est définie, impaire et dérivable sur \mathbb{R} et déterminer une expression de $I'(x)$. Dans la suite, on cherche à justifier l'existence et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$
3. Montrer que I est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ . Que peut-on en déduire sur $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$?
4. Montrer par IAF que $\forall x \geq 0, \text{Arctan}(2x) - \text{Arctan}(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$.
5. En déduire que I est majorée sur \mathbb{R}^+ . Que peut-on en déduire sur $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$?
6. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : $\int_0^x f(t) dt = \int_x^{2x} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$.
7. Prouver, par encadrement, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \ln(2)$.
8. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$.

Ex 9 Etude de deux primitives

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^+, I(x) = \int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$ et $J(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1. Justifier que I et J sont définies, continues et dérivables sur \mathbb{R}^+ et donner une expression de $I'(x)$ et de $J'(x)$.
2. Démontrer que I a une limite finie L en $+\infty$.
3. Démontrer que $\forall (x, \varepsilon) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, J(x) - J(\varepsilon) = \frac{1-\cos(x)}{x} - \frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} + I(x) - I(\varepsilon)$. Pourquoi a-t-on introduit ε ?
4. En déduire $J(x)$ en fonction de $I(x), \cos(x)$ et x .
5. Conclure que : $J(x)$ tend aussi vers L quand $x \rightarrow +\infty$.

Ex 10 INTEGRALES DE WALLIS

A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose. $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt$

1. Etablir une relation de récurrence entre W_n et W_{n-2} .
2. En déduire une expression de I_{2p} et de I_{2p+1} avec de factorielles puis de coefficients binomiaux.
3. Montrer que $nW_n W_{n-1}$ est indépendant de n et préciser sa valeur.
4. Montrer que la suite (W_n) est monotone et convergente.
5. Déterminer sa limite.
6. Remonter que $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$ par une autre méthode.
7. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
8. En déduire que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi p}}{4^p} \binom{2p}{p} = 1$.

B. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n$ existe et est finie.
2. Etablir une relation entre J_n et J_{n+1} .
3. Démontrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = W_{2n-1}$ et en déduire la limite de (J_n) .

C. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in [0,1[$, $f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Justifier que f_n est bien définie sur $[0,1[$.
 - b) Calculer f_0 et sa limite I_0 en 1^- .
 - c) Montrer que la fonction f_n est majorée par I_0 .
 - d) En déduire l'existence de la limite I_n de f_n en 1^- .
2.
 - a) Montrer que la suite (I_n) est monotone et convergente.
 - b) Trouver une relation entre f_n et f_{n-2} , pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$
 - c) En déduire la relation $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ valable pour tout entier naturel $n \geq 2$.
 - d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = W_n$ par deux méthodes.

Ex 11 Inégalité de Cauchy-schwarz

- A. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ à valeurs réelles et telle que $f(0) = 0$.
 - a) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que : $f(x)^2 \leq x \int_0^x f'(t)^2 dt$.
 - b) En déduire que : $\int_0^1 f(x)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x)^2 dx$.
- B. Soit f et g réelles et continues sur $[0,1]$ et telles que $\int_0^1 f = 0$.
 Montrer que $\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right) \left(\int_0^1 g(x)^2 dx - \left(\int_0^1 g(x)dx\right)^2\right)$.
- C. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que $\inf \left\{ \left(\int_a^b f\right) \left(\int_a^b \frac{1}{f}\right) / f \in C^\circ([a, b], \mathbb{R}^{+*}) \right\} = (b-a)^2$.

Ex 12 Une preuve de l'irrationalité de e

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

- a. Trouver une relation entre u_n et u_{n+1} .
- b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = e - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$. On note $v_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$.
- c. Démontrer que la suite v converge en croissant vers le réel e . On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} = e$.
- d. Supposons un instant que e soit rationnel. Posons alors $e = \frac{m}{q}$ tel que m et q entiers naturels non nuls.
 - a. Montrer que $q!(e - v_q) \in \mathbb{N}^*$.
 - b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tq $n > q$, $0 < q!(v_n - v_q) \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \dots + \frac{1}{(q+1)^{n-q}}$.
 - c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tq $n > q$, $0 < q!(v_n - v_q) < \frac{1}{q}$.
 - d. En déduire que $0 \leq q!(e - v_q) \leq \frac{1}{q}$.
 - e. Conclure.

Ex 13 Soit f une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + f'(x) = 0$.

1. On pose $h(x) = f(x) + f'(x)$. f est donc solution de l'ed1 : $y' + y = h(x)$.
 Montrer qu'il existe une constante réelle c telle que : $\forall x \geq 0$, $f(x) = e^{-x} \int_0^x h(t)e^t dt + ce^{-x}$.
2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

