POLYNÔMES À UNE INDÉTERMINÉE

Dans tout le chapitre, n , p , q , m , r et s désignent des entiers naturels et r et s non nuls .
K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de K sont encore et encore appelés des scalaires.
Dans tout le chapitre, n , p , q , m , r et s désignent des entiers naturels et r et s non nuls .
K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de K sont encore et encore appelés des scalaires.

Introduction : A LIRE EN AUTONOMIE ...

- Soit f une fonction polynomiale réelle telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_p t^p$

où p entier naturel et $a_0,.., a_p$ réels appelés coefficients de f (a_k étant le coefficient de rang k). Alors,
ou bien tous les a_k sont nuls et f est la fonction nulle et a pour degré $-\infty$.
ou bien l'un des a_k est non nul et le degré de f noté $deg(f)$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.
Deux fonctions polynomiales sont égales lorsqu'elles ont les mêmes coefficients.
Une racine réelle (resp. complexe) de f est un réel (resp complexe) α tel que $f(\alpha) = 0$. Lorsque α est racine de f, on peut factoriser $f(x)$ par $(x - \alpha)$.

- Soit f *et* g deux fonctions polynomiales telles que :

$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_p t^p = \sum_{k=0}^{p} a_k t^k$ et $g(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_q t^q = \sum_{k=0}^{q} b_k t^k$ où p et q entiers naturels et $a_0,.., a_p, b_0,.., b_q$ réels avec a_p et b_q non nuls. Donc $\deg(f) = p$ *et* $\deg(g) = q$.
Quitte à ajouter des termes nuls dans l'expression de f ou celle de g, on peut écrire :
$f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$ et $g(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m = \sum_{k=0}^{m} b_k t^k$ où $m = max(p, q)$.
Alors,

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)t + \ldots + (a_m + b_m)t^m = \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k) t^k$$

$$(f \times g)(t) = f(t) \times g(t) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + (a_0 b_2 + a_2 b_2 + a_0 b_2)t^2 \ldots + (a_p b_q) t^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} c_k t^k$$

$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$. De plus, $deg(f+g) \leq m = \max(p,q)$ car je ne sais pas si $a_m + b_m = 0$ et $\deg(fg) = p + q$ *car* $a_p b_q \neq 0$.

On va ci-dessous définir un ensemble plus abstrait et plus large que l'ensemble des fonctions polynomiales vérifiant quasiment les mêmes propriétés qui va nous permettre de travailler avec des polynômes de matrices, d'endomorphismes...
Pour cela, on va définir un polynôme par la suite de ses coefficients.

I Généralités

1. Définitions et opérations

1 Def : Un polynôme à coefficients dans K est une suite d'éléments de K nulle à partir d'un certain rang (dite presque nulle), c'est donc un objet de la forme $P = (a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n, 0, 0, \ldots\ldots)$ où $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ sont des éléments de K et sont appelés les coefficients de P.

2NB : D'après l'égalité de deux suites, deux polynômes sont égaux sietssi ils ont les mêmes coefficients.

On définit trois opérations sur les polynômes à coefficients dans K : une addition entre polynômes, une multiplication d'un polynôme par un scalaire et une multiplication entre polynômes.

3 Def : Soit P et Q deux polynômes à coefficients dans K . Soit $\alpha \in K$.
On pose $P = \big(a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_p, 0, 0, \ldots\ldots\big) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tel que* $\forall n > p, a_n = 0$
et $Q = \big(b_0, b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots, b_q, 0, 0, \ldots\ldots\big) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tel que* $\forall n > q, b_n = 0$.
$P + Q = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots\ldots\ldots, a_m + b_m, 0, 0, \ldots\ldots)$ où $m = \max(p, q)$.
$\lambda P = \big(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \ldots\ldots\ldots, \lambda a_p, 0, 0, \ldots\ldots\big) = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$P \times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$.
Prop : $P + Q, \lambda P$ *et* $P \times Q$ ainsi définis sont des polynômes à coefficients dans K.

4 Def : Soit P un polynôme à coefficients dans K. Par convention, $P^0 = (1,0,0, \ldots.)$ et $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $P^m = P^{m-1} \times P$.

4bisNB : cela revient à dire que $\forall m \in \mathbb{N}^*, P^m = \underbrace{P \times P \times \ldots \times P}_{m\ fois}$.

2. Indéterminée et nouvelle écriture d'un polynôme.

5 Déf.: On note X la suite presque nulle $X = (0,1,0,0, \ldots)$. X est appelée l'indéterminée.
X n'est pas un scalaire, c'est un polynôme i.e. une suite presque nulle. On ne doit pas écrire « $X = 2$ « ($HORREUR$!).

6 Théo.: $\forall k \in \mathbb{N}, X^k$ est la suite presque nulle : $X^k = \left(\underbrace{0}_{u_0}, 0, \dots\dots, 0, \underbrace{1}_{u_k}, 0, 0, \dots \right) = (\delta_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\delta_{n,k} = \begin{cases} 0 \ si \ n \neq k \\ 1 \ si \ n = k \end{cases}$.

7 Nouvelle définition d'un polynôme :

- Tout polynôme à coefficients dans K s'écrit de manière unique (**) sous sa forme développée:

$$P = a_0X^0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_kX^k \ avec \ la \ convention \ \forall k \geq n+1, a_k = 0$$

où $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots\dots, a_n$ sont des éléments de K, appelés **les coefficients de P** et X est l'indéterminée.

- P est aussi noté $P(X)$.
- On note $\boldsymbol{K[X]}$ l'ensemble des polynômes (à une indéterminée X et) à coefficients dans K.

8 NB :

1. (**) d'après l'égalité de deux polynômes , LES COEFFICIENTS a_k SONT UNIQUES . Autrement dit, $avec \ la \ convention$: $\forall k \geq n+1, a_k = 0 \ et \ \forall k \geq m+1, b_k = 0$, nous pouvons affirmer que :

$$\sum_{k=0}^{n} a_kX^k = \sum_{k=0}^{m} b_kX^k \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, \max(n,m)]\!], a_k = b_k \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \qquad a_k = b_k.$$

2. $0 = 0X^0 + 0X + 0X^2 + \dots + 0X^{n-1} + 0X^n$ est le polynôme nul. Le polynôme nul est le seul polynôme dont tous les coefficients sont nuls.

9 Des Polynômes particuliers :

- Tout polynôme βX^0 (où $\beta \in K$) est noté β et appelé polynôme constant. De même, $a_0X^0 \underbrace{=}_{noté} a_0$.
- Pour tout $\lambda \in K^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda X^k = 0 + 0X + 0X^2 + \dots + 0X^{k-1} + \lambda X^k + 0X^{k+1}$ est un monôme .

3. Opérations dans $K[X]$.

10 Nouvelles écritures de $P + Q, PQ \ et \ \lambda P$ - Combinaison linéaire.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_kX^k$ deux éléments de $K[X]$ et λ un élément de K .
Alors, avec la convention habituelle : $\forall k \geq n+1, a_k = 0 \ et \ \forall k \geq m+1, b_k = 0,$ on définit :

- $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k)X^k$
- $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_kX^k$
- $P \times Q = PQ = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}\right)X^k = \sum_{k=0}^{n+m} c_kX^k \quad tel \ que \ c_k = \sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j} = \sum_{l=0}^{k} a_{k-l}b_l = \underbrace{\sum_{\substack{0\leq i,j\leq k \\ i+j=k}} a_ib_j}_{somme \ double}$
- Pour tous scalaires $\alpha \ et \ \beta, \alpha P + \beta Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (\alpha a_k + \beta b_k)X^k$ est appelé une combinaison linéaire de $P \ et \ Q$ et est un élément de $K[X]$.

11 Généralisation : Soit $P_1, P_2, \dots, P_m$ des éléments de $K[X]$ et $\beta_1, .., \beta_m$ des éléments de K .

- $\prod_{k=1}^{m} P_k$ est un élément $K[X]$, c'est le produit des polynômes $P_1, P_2, \dots, P_m$.
- $\sum_{k=1}^{m} \beta_kP_k$ est un élément $K[X]$, c'est une combinaison linéaire des polynômes $P_1, P_2, \dots, P_m$.

12 Règles de calcul Soit P , $Q \ et \ R$ trois éléments de $K[X]$, $\mu \ et \ \gamma$ deux scalaires. Alors,

1. $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2, X^kX^l = X^{k+l} \ et \ (X^k)^l = X^{kl}$
2. $(P+Q)+R = P+(Q+R) \overset{noté}{\triangleq} P+Q+R$
3. $P + Q = Q + P$
4. $P + 0 = P = 0 + P$
5. $P + (-1)P = 0$
6. $\gamma(P+Q) = \gamma P + \gamma Q$
7. $(\gamma + \mu)P = \gamma P + \mu P$
8. $1P = P$
9. $(\mu\gamma)P = \mu(\gamma P) = \gamma(\mu P) \equiv \gamma\mu P$
10. $(PQ)R = P(QR) \equiv PQR$
11. $PQ = QP$
12. $(P+Q)R = PR + QR \ \ et \ R(P+Q) = RP + RQ$
13. $\gamma(PQ) = P(\gamma Q) = (\gamma P)Q \equiv \gamma PQ$
14. $PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0 \ ou \ Q = 0$ (le produit est **intègre**)

13Exemple : 1) Développons dans $\mathbb{R}[X]$: $P(X) = (2X^5 - 3X + 1)(4X^2 - X + 3) = 8X^7 - 2X^6 + 6X^5 - 8X^3 + 7X^2 - 10X + 3$

14 NB: ce sont quasiment les mêmes règles de calcul que dans K sauf que l'inverse d'un polynôme n'existe pas dans $K[X]$. Par contre, on pourra utiliser le théorème de division euclidienne.

15 Prop : Formule du binôme de Newton et formule de factorisation

$\forall (P,Q) \in K[X]^2$ et $\forall m \in \mathbb{N}$, $(P+Q)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} P^jQ^{m-j}$ et $P^{m+1} - Q^{m+1} = (P-Q)\left(\sum_{j=0}^{m} P^jQ^{m-j}\right)$.

16 Exemple : $X^n - 1 = X^n - 1^n = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k$

17Exercice : Démontrons $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k} = \binom{n+m}{n}$ en déterminant de deux manières le coefficient de X^n dans $(1+X)^n(1+X)^m$

4. Degré

18 Déf : Soit $P=\sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in K[X]$.
•Si $P=0$ (i.e. tous les a_k sont nuls) alors par **convention**, le degré de P est $-\infty$. On note $\deg(0)=-\infty$.
•Si $P\neq 0$ (i.e. au moins l'un des a_k est non nul) alors par **définition**, le degré de P est le plus grand entier k tel que $a_k\neq 0$. Autrement dit, $deg(P)$ est l'unique entier telle que : $a_{\deg(P)}\neq 0$ et $\forall k>\deg(P), a_k=0$.

Alors, $P=\sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ $avec\ n\geq \deg(P)$.

Si $P\neq 0$ alors
$\deg(P)=max\ \{k\in\mathbb{N}/a_k\ \neq 0\}$

$a_{\deg(P)}$ est appelé le coefficient dominant de P.
$a_{\deg(P)}X^{\deg(P)}$ est appelé le terme dominant de P.
•Le polynôme nul n'a pas de coefficient dominant, ni de terme dominant.
•Un polynôme unitaire est un polynôme non nul dont le coefficient dominant vaut 1.

19 Rques :1)Dans la suite du cours, on notera $codom(P)$ le coefficient dominant de P. Cette notation n'est pas officielle mais pratique ! Si vous souhaitez l'utiliser en devoir, vous devez donc la définir.
2) Quitte à ajouter des termes nuls, tout polynôme P s'écrit sous la forme $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $n\in\mathbb{N}\ et\ n\geq\deg(P)$.

20 Exercice : Soit $P_n=\frac{1}{2i}[(X-i)^n-(X+i)^n]$ où $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminons son degré et son coefficient dominant et vérifions que P_n est à coefficients réels.

21 Théo : Soit P et Q deux éléments de $K[X]$ et β un scalaire.
1. $\deg(\beta P)=\begin{cases}\deg(P)\ si\ \beta\neq 0\\ -\infty\ si\ \beta=0\end{cases}\leq\deg(P)$ et si P et β sont non nuls alors $codom(\beta P)=\beta codom(P)$.
2. $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$ et si P et Q sont non nuls alors $codom(PQ)=codom(P)codom(Q)$.
3. $\deg(P+Q)\leq\max(deg(P),deg(Q))$. Et, si $\deg(P)<\deg(Q)$ alors $\deg(P+Q)=\deg(Q)$ et $codom(P+Q)=codom(Q)$.

22 Conséquence essentielle : $PQ=0\Leftrightarrow P=0\ ou\ Q=0$ (le produit est **intègre**).

23 Généralisation : Soit $P_1,P_2,\dots,P_m$ des éléments de $K[X]$ et $\beta_1,..,\beta_m$ des éléments de K.
- $\deg(\prod_{k=1}^{m}P_k)=\sum_{k=1}^{m}\deg(P_k)$ et si $P_1,P_2,\dots,P_m$ sont tous non nuls, alors $\text{codom}(\prod_{k=1}^{m}P_k)=\prod_{k=1}^{m}codom(P_k)$.
- En particulier , $\forall P\in K[X],\forall m\in\mathbb{N}, \deg(P^m)=m\deg(P)\ et\ si\ P\neq 0\ alors\ \ codom(P^m)=\left(codom(P)\right)^m$.
- $\deg\left(\sum_{k=1}^{m}\beta_k P_k\right)\leq\max\left(\deg(P_1),\dots,\deg(P_m)\right)$ et si pour tout $k\in\{1,\dots,m-1\}$, $\deg P_m>degP_k$ et $\beta_m\neq 0$ alors $\deg(\sum_{k=1}^{m}\beta_k P_k)=degP_m$ et $\text{codom}(\sum_{k=1}^{m}\beta_k P_k)=\beta_m codom(P_m)$.

24 Exemples importants:
1) Les polynômes constants sont les polynômes de degré 0 ou $-\infty$. Un polynôme constant non nul est de degré 0.
2) Si $\mu\in K\ et\ n\in\mathbb{N}$ alors $\deg((X-\mu)^n)=n$ et si $\beta\in K^*$ alors $\deg(\beta(X-\mu_1)^{n_1}(X-\mu_2)^{n_2}\dots(X-\mu_r)^{n_r})=\sum_{k=1}^{r}n_k$.
De plus, $\text{codom}((X-\mu)^n)=1$ et si $\beta\in K^*$alors $\text{codom}(\beta(X-\mu_1)^{n_1}(X-\mu_2)^{n_2}\dots(X-\mu_r)^{n_r})=\beta$.

25 Exercice : Soit $f:\begin{pmatrix}\mathbb{R}\backslash\{1\} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{1}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}}\end{pmatrix}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.Montrer que pour tout entier $n\geq 1$,,il existe une fonction polynomiale P_n telle que $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}, f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$. Déterminer le terme dominant de P_n .

5. Composition

26 Déf : Soit $P=\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et Q deux éléments de $K[X]$. Alors, $P\circ Q=P(Q)=\sum_{k=0}^{p} a_k Q^k$ est un élément de $K[X]$ appelé composée de Q par P. En particulier, $X^p\circ X^k=(X^k)^p=X^{kp}$.

27 Exemple : $P=X^9+4X^3-5=T(X^3)=T\circ Q$ avec $T=X^3+4X-5$ et $Q=X^3$.

28 Attention :
1. Ne pas confondre la composée $P(Q)$ et le produit PQ .
2. En général, $P\circ Q\neq Q\circ P$. $\not\subset$ex : Si $P=X^2+1\ et\ Q=X+1$ alors, $P\circ Q=P(X+1)=(X+1)^2+1=X^2+2X+2$ et $Q\circ P=P(X)+1=X^2+2$.

29 Théo Soit P et Q deux polynômes. Si Q est non constant alors $deg(P\circ Q)=\deg(P)\times\deg(Q)$.
Et $si\ P\ est\ non\ nul\ et\ Q\ non\ constant\ alors\ codom(P\circ Q)=codom(P)(codom(Q))^{\deg(P)}$. 30

30Exercice : Soit $P\in K[X]\ et\ Q(X)=P(X+1)-P(X)$. Déterminons $deg(Q)$ en fonction de $deg(P)$ et le cas échéant $codom(Q)$.

31 Application aux polynômes pairs ou impairs.

- $Si\ P(X) = P(-X)$ (P est dit pair) alors $P = \sum_{k=0}^{n} a_{2k}X^{2k} = T(X^2) = T \circ X^2$ où $T = \sum_{k=0}^{n} a_{2k}X^k$ et $\deg(T) = \frac{\deg(P)}{2}$
- $Si\ P(X) = -P(-X)$ (P est impair) alors $P = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}X^{2k+1} = X \times T(X^2) = X \times (T \circ X^2)\ tq\ T = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}X^k$ et $\deg(T) = \frac{\deg(P)-1}{2}$.

6. L'ensemble $K_n[X]$.

32 Def Soit n un entier naturel. On note $\boldsymbol{K_n[X]}$ l'ensemble des polynômes (à une indéterminée) à coefficient dans K et de degré **inférieur ou égal** à n .

33 Exemples : $K_0[X]$ est l'ensemble des polynômes constants et $K_1[X] = \{aX + b\ /(a,b) \in K^2\}$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.
34 NB : $\forall n, K_0[X] \subset K_n[X] \subset K_{n+1}[X] \subset K[X]$.

35 Théorème Tout polynôme de $K_n[X]$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $1, X, X^2, \dots, X^n$.
On dira que la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $K_n[X]$.

7. Fonction polynomiale associée à un polynôme

36 Déf: A tout polynôme $P = a_0X^0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$, on associe la fonction polynomiale $\tilde{P}$, de K dans K, définie par : $\forall t \in K\ , \tilde{P}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_{n-1}t^{n-1} + a_nt^n = \sum_{k=0}^{n} a_kt^k$.
Si $P \neq 0$ alors $\deg(\tilde{P}) = \deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0\}$.

37 Attention : P et $\tilde{P}$ sont deux objets de natures mathématiques distinctes : $P \neq \tilde{P}$ **mais en pratique $\tilde{P}$ est souvent notée P.**
38 Notation :
- **Par abus, $\tilde{P}(\alpha)$ est souvent noté $P(\alpha)$ et correspond à l'évaluation de $\tilde{P}$ en α.**
- On note souvent E l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on note E_n l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. Tout élément de E_n s'écrit de manière unique comme combinaison des fonctions $(t \mapsto t^k)\ tq\ k \in \mathbb{N}$.

39 Prop: Soit P et Q deux éléments de $K[X]$.
● $\widetilde{(\alpha P + \beta Q)} = \alpha\tilde{P} + \beta\tilde{Q}$ ● $\widetilde{(PQ)} = \tilde{P}\tilde{Q}$ ● $\widetilde{(P \circ Q)} = \tilde{P} \circ \tilde{Q}$

40Exercice : $\forall t \in]-1, +\infty[, \Phi(t) = \frac{\ln(1+t)}{1+t}$. Justifier que Φ admet un développement limité à tout ordre s au voisinage de 0 .On note $\Phi(t) = \sum_{j=0}^{s} c_jt^j + o_0(t^s)$. Montrer que : $\forall j \in \mathbb{N}^*, c_j = (-1)^{j+1}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k}$.

II Polynômes dérivés

1. Définition, écriture et degré

41 Déf: Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_kX^k$. Le polynôme dérivé de P est : $P^{(1)} = P' = \begin{cases} \sum_{k=1}^{p} ka_kX^{k-1} = \sum_{i=0}^{p-1}(i+1)a_{i+1}X^i & si\ degP \geq 1. \\ 0\ si\ depP \leq 0. (\ i.e. P\ est\ constant) \end{cases}$
On définit alors les polynômes dérivés successifs : par convention, $P^{(0)} = P$ est le polynôme dérivé $0^{\text{ème}}$ de P
Et $\forall j \in \mathbb{N}^*, P^{(j)} = (P^{(j-1)})'$ est le polynôme dérivé $j^{\text{ème}}$ de P.

42 Règles de calcul Soit j un entier naturel, α , β , γ des scalaires et $P\ et\ Q$ des polynômes .
■$(\beta P + \gamma Q)^{(j)} = \beta P^{(j)} + \gamma Q^{(j)}$ ■$(PQ)^{(j)} = \sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}P^{(l)}Q^{(j-l)}$ $(Leibniz)$ ■$\left(\prod_{j=1}^{m} P_j\right)' = \sum_{i=1}^{m} P_i'\left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} P_j\right)$
■$(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$ ■$(P \circ (X + \alpha))^{(j)} = P^{(j)}(X + \alpha)$ ■ $\forall j \in \mathbb{N}, \tilde{P}^{(j)} = \widetilde{P^{(j)}}$.

43 Prop : Pour tous entiers naturels $k\ et\ j$, $(X^k)^{(j)} = \begin{cases} 0\ si\ j > k \\ \frac{k!}{(k-j)!}X^{k-j} & si\ j \leq k \end{cases}$.

44 Thorème : Pour tout entier naturel j , $si\ P = \sum_{k=0}^{d} a_kX^k$, alors $P^{(j)} = \begin{cases} 0\ si\ j > d \\ \sum_{k=j}^{d} a_k \frac{k!}{(k-j)!}X^{k-j} & si\ j \leq d \end{cases}$.

45 Conséquences : Pour tout entier naturel j et tout polynôme P non nul, $deg\left(P^{(j)}\right) = \begin{cases} -\infty & si\ j > \deg(P) \\ \deg(P) - j & si\ j \leq \deg(P) \end{cases}$.

- Si P est non nul et $j \leq d = \deg(P)$ alors $codom\left(P^{(j)}\right) = \frac{d!}{(d-j)!} codom(P)$ et $P^{(\mathrm{d})} = cst = d! \times codom(P) \neq 0$.
- P est nul sietssi tous ses polynômes dérivés son nuls.

46 Exercice: Soit $P \in \mathbb{R}[X]^*$ de degré n et $Q = (X^2+1)P'' - 6P$. Déterminons $\deg(Q)$ et le cas échéant $codom(Q)$. Quels polynômes P donnent $Q = 0$?

2. Formule de Taylor pour les polynômes

47 Théo de formule de Taylor pour les polynômes :

- Si $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ un polynôme alors $\forall j \in \mathbb{N},\ a_j = \frac{\tilde{P}^{(j)}(0)}{j!}$ et $P = \sum_{k=0}^{N} \frac{\tilde{P}^{(k)}(0)}{k!} X^k$.
- Soit P un élément de $K_n[X]$ et α un élément de K . Alors , $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\tilde{P}^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$ et cette écriture est l'unique manière d'écrire P comme combinaison linéaire des polynômes $1, X-\alpha, (X-\alpha)^2, \dots, (X-\alpha)^n$. démo

On dira que la famille $(1, X-\alpha, (X-\alpha)^2, \dots, (X-\alpha)^n)$ est une base de $K_n[X]$.

48 Exemple : Appliquons la formule de Taylor au polynôme $P(X) = X^2 + 2X - 5$ en $\alpha = 1$.

Comme $P \in \mathbb{R}_2[X], P(X) = \sum_{k=0}^{2} \frac{\widetilde{P^{(k)}}(1)}{k!}(X-1)^k = \tilde{P}(1) + \tilde{P}'(1)(X-1) + \frac{\widetilde{P''}(1)}{2}(X-1)^2$. Or, $P'(X) = 2X + 2$ et $P''(X) = 2$. Donc, $\tilde{P}(1) = -2,\ \widetilde{P}'(1) = 4$ et $\widetilde{P''}(1) = 2$. Ainsi, $P(X) = -2 + 4(X-1) + (X-1)^2$ est l'unique écriture de P comme combinaison linéaire de $1, (X-1)$ et $(X-1)^2$.

49 Corollaire

- Si deux polynômes ont toutes leurs dérivées successives qui prennent les mêmes valeurs en un scalaire α alors ces polynômes sont égaux.
- Le polynôme nul est le seul polynôme dont toutes les dérivées successives s'annulent en α. Si $\deg(P) \leq n$ et il existe un réel α tq : $\tilde{P}(\alpha) = \tilde{P}^{(1)}(\alpha) = .. = \tilde{P}^{(n)}(\alpha) = 0$ alors P est le polynôme nul.

50 Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminons tous les polynômes P de $K_n[X]$ vérifiant : $\tilde{P}'(2) = 2\tilde{P}^{(4)}(2)$.

III Divisibilité

1. Définition

51 Déf Soit A et B deux polynômes de $K[X]$.
On dit que B divise A (dans $K[X]$) lorsqu' il existe un polynôme Q (de $K[X]$) tel que : $A = BQ$.

52 Exemples

1) La formule de factorisation assure que $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall (A,B) \in K[X]^2, A - B$ divise $A^m - B^m$.
2) $X^2 + X + 1$ et $X - 1$ divise $X^3 - 1$ dans $\mathbb{R}$[X] et $X - j, X - j^2, X - 1$ divisent $X^3 - 1$ dans $\mathbb{C}$[X].

53 Remarques: • Tout polynôme divise 0, 0 ne divise que 0.

- Les polynômes constants non nuls divisent tout polynôme. Si P est non nul alors pour tout $\beta \in K^*$, βP divise P.
- Si B divise A non nul alors $deg(B) \leq deg(A)$.

2. Théorème de la division euclidienne

54 Théorème de la division euclidienne : Soit A et B deux éléments $K[X]$ tels que $B \neq 0$.

Alors il existe un unique polynôme Q et un unique polynôme R tels que : $A = BQ + R$ **et** de **56 En pratique.** On peut poser la division euclidienne comme ci-dessous (valable quand $\deg(A)$ est connu) :

$$\begin{array}{r|l} 2X^5 - 3X^4 + X^2 - 4X + 1 & 3X^2 - 2X - 2 \\ \cline{2-2} -\left(X^5 - \frac{4}{3}X^4 - \frac{4}{3}X^3\right) & \frac{2}{3}X^3 - \frac{5}{9}X^2 + \frac{2}{27}X + \frac{1}{81} \\ \hline -\frac{5}{3}X^4 + \frac{4}{3}X^3 + X^2 - 4X + 1 & \\ -\left(-\frac{5}{3}X^4 + \frac{10}{9}X^3 + \frac{10}{9}X^2\right) & \\ \hline \frac{2}{9}X^3 - \frac{1}{9}X^2 - 4X + 1 & \\ -\left(\frac{2}{9}X^3 - \frac{4}{27}X^2 - \frac{4}{27}X\right) & \\ \hline \frac{1}{27}X^2 - \frac{104}{27}X + 1 & \\ -\left(\frac{1}{27}X^2 - \frac{2}{81}X - \frac{2}{81}\right) & \\ \hline -\frac{310}{81}X + \frac{83}{81} & \end{array}$$

$gR < degB$. démo

57 Premier critère de divisibilité : B divise A si et ssi le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

IV Racines d'un polynôme

1. Définition, caractérisation

58 Déf : Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$. α est une racine de P (dans K) lorsque $\tilde{P}(\alpha) = 0$.

59 Rques: • le polynôme nul admet tous les scalaires comme racines.

- $X^2 + 1$ n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$ mais a deux racines dans $\mathbb{C}$ qui sont i et $-i$.
- Si $B = \beta(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \dots (X-\alpha_s)^{m_s}$ avec β , $\alpha_1, .., \alpha_s$ éléments de K *et* $m_1, \dots, m_s$ des entiers naturels non nuls alors les racines de B dans K sont les scalaires $\alpha_1, .., \alpha_s$ car, $\tilde{B}(t) = \beta(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\dots(t-\alpha_s) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t-\alpha_1 = 0 \\ ou\ t-\alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ ou\ t-\alpha_s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$.

60 En pratique : Trouver les racines complexes de P, c'est résoudre l'équation $\widetilde{P}(z) = 0$ avec z inconnue complexe. Les racines réelles de P sont les réels solutions de cette même équation.

61ATTENTION : LORSQUE VOUS CHERCHEZ LES RACINES DE P, polynôme non nul**, il est interdit d'ecrire $\cancel{P(X) = 0}$** car X n'est pas un scalaire et $P(X)$ n'est pas le polynôme nul ....**Vous devez résoudre $\widetilde{P}(z) = 0$**

62 Théorème fondamental : Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$. α est racine de P si et ssi $X - \alpha$ divise P. démo

63 Généralisation : $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sont des racines distinctes de P si et ssi il existe un polynôme Q tel que :

$$P(X) = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_s)Q(X)$$

(Q est le quotient de la division euclidienne de P par $(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_s)$).

2. Racines multiples

64 Déf: Soit $P \in K[X]$, $\alpha \in K$ et $m \in \mathbb{N}$.
α est une racine de P **d'ordre de multiplicité** **(exacte)** $\boldsymbol{m}$ lorsqu'il existe $Q \in K[X]$ tq $P(X) = (X-\alpha)^m Q(X)$ et $\tilde{Q}(\alpha) \neq 0$.
α est une racine de P **d'ordre de multiplicité au moins** $\boldsymbol{m}$ lorsqu'il existe $Q \in K[X]$ tq $P(X) = (X-\alpha)^m Q(X)$.
(Q est le quotient de la division euclidienne de P par $(X-\alpha)^m$).

65 Vocabulaire : α n'est pas racine de P lorsque α est racine de P de multiplicité 0.
α est une racine simple (resp. double ou triple) de P lorsque α est une racine de P d'ordre de multiplicité 1(resp. 2 ou 3).
Lorsque l'on compte les racines d'un polynôme, on peut compter ses racines distinctes ou bien compter ses racines avec leur multiplicité : une racine de P d'ordre de multiplicité m compte alors pour m racines de P.

66 Attention : le polynôme nul admet tous les scalaires comme racines mais sans ordre de multiplicité exacte.

67Exemple: ●Si $P(x) = aX^2 + bX + c$ où a, b, c complexes et $a \neq 0$ alors

- $P(X) = a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2$ et $\frac{-b}{2a}$ est racine double de P si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
- $P(X) = a\left(X - \frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(X - \frac{-b+\delta}{2a}\right)$ et $\frac{-b+\delta}{2a}$ *et* $\frac{-b-\delta}{2a}$ sont les racines de P si $\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2 \neq 0$.

●Si $P(x) = aX^2 + bX + c$ où a, b, c réels et $a \neq 0$ alors

- $P(X) = a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2$ et $\frac{-b}{2a}$ est racine double de P si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
- $P(X) = a\left(X - \frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(X - \frac{-b+\delta}{2a}\right)$ et $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$ sont les racines simples et réelles de P si $\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2 > 0$
- P n'a pas de racines réelles et $P(X) = a\left(X - \frac{-b-i\delta}{2a}\right)\left(X - \frac{-b+i\delta}{2a}\right)$ et $\frac{-b+i\delta}{2a}$ *et* $\frac{-b+i\delta}{2a}$ sont les racines simples et complexes non réelles et conjuguées si $\Delta = b^2 - 4ac = -\delta^2 < 0$.

68 Généralisation Soit $P \in K[X]$, $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ des scalaires distincts et $m_1, .., m_s$ des entiers naturels .

1) $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sont racines de P d'ordre de multiplicités respectives et **exactes** $m_1, .., m_s$ **si et ssi** il existe un polynôme Q de $K[X]$ tel que : $P = (X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\dots(X-\alpha_s)^{m_s}Q(X)$ et $\forall k \in \{1, .., s\}, \tilde{Q}(\alpha_k) \neq 0$.
2) $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sont racines de P d'ordre de multiplicités respectives **au moins** $m_1, .., m_s$ **si et ssi** il existe un polynôme Q de $K[X]$ tel que : $P = (X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\dots(X-\alpha_s)^{m_s}Q(X)$.

69 Exemple : Si $B = \beta(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\dots(X-\alpha_s)^{m_s}$ avec $\beta \in K^*$, $\alpha_1, .., \alpha_s$ éléments de K *et* $m_1, \dots, m_s$ des entiers naturels non nuls alors $\alpha_1, .., \alpha_s$ sont les racines de B et $\forall k \in [\![1, s]\!]$, m_k est la multiplicité de α_k dans B .

70 Théorème de caractérisation de la multiplicité d'une racine : Soit $P \in K[X]$, $\alpha \in K$ et $m \in \mathbb{N}$.

1. α est une racine de P d'ordre de multiplicité **(exactement)** m **si et ssi** $\forall k \in \{0, .., m-1\}, \tilde{P}^{(k)}(\alpha) = 0$ *et* $\tilde{P}^{(m)}(\alpha) \neq 0$
2. α est une racine de P d'ordre de multiplicité **au moins** m **si et ssi** $\forall k \in \{0, .., m-1\}, \tilde{P}^{(k)}(\alpha) = 0$. démo

71 SAVOIR FAIRE PARFAITEMENT : Déterminons le reste R de la division euclidienne de $P = X^n$ par $A = (X+1)^2(X-2)$.
72 SAVOIR FAIRE PARFAITEMENT : Soit $n > 1$. Montrons que $B = (X-1)^2$ divise $P_n = (n-1) - nX + X^n$ et déterminons le quotient.

73 Théo: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\omega \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$.
ω est racine de P d'ordre de multiplicité (ou au moins) m sietssi $\overline{\omega}$ est racine de P d'ordre de multiplicité (ou au moins) m. démo

74SAVOIR FAIRE PARFAITEMENT : Déterminons tous les entiers naturels n non nuls tq : $B = (X^2 + X + 1)^2$ divise $P = (1 + X)^n - X^n - 1$.

75Conséquence : Tout polynôme non nul à coefficients réels possède un nombre pair de racines complexes non réelles.

Rappel: $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{4i\frac{\pi}{3}} = \bar{j}$
$1, j$ *et* j^2 *sont les racines 3èmes de l'unité.*
j et j^2 sont les racines de $1 + X + X^2$
$1 + j + j^2 = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}, j^{3k} = 1, j^{3k+1} = j, j^{3k+2} = j^2$.

3. Relation entre le degré et le nombre de racines.

76 Théorème

• Si P est un polynôme non nul alors le nombre de racines de P (distinctes ou comptées avec leur multiplicité) est inferieur ou égal à $\deg(P)$.

• Seul le polynôme nul a un nombre de racines (distinctes ou comptées avec leur multiplicité) strictement supérieur à son degré.

• Seul le polynôme nul a une infinité de racines. démo

77 BILAN : Le polynôme nul est le seul polynôme dont tous les coefficients sont nuls
Le polynôme nul est le seul polynôme qui a plus de racines que son degré.
Le polynôme nul est le seul polynôme dont toutes ses dérivées s'annulent en un scalaire.

78 METHODE : pour prouver que $P = Q$, il suffit de montrer que $T = P - Q$ est le polynôme nul en justifiant que T a davantage de racines que son degré.

4. Relations coefficients / racines

79 Théorème de calcul de la somme et du produit des racines en fonction des coefficients .
Si P est un polynôme non nul de degré p et scindé tel que : $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k = \beta \underbrace{(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_p)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \text{ scalaires pas forcément distincts}}$

alors $\quad codom(P) = a_p = \beta$ et $\quad \prod_{k=1}^{p} \alpha_k = (-1)^p \frac{a_0}{a_p}$ et $\quad \sum_{k=1}^{p} \alpha_k = -\frac{a_{p-1}}{a_p}$. démo

80 Exemple : les racines nièmes de l'unité sont les racines complexes de $X^n - 1$. On retrouve alors le résultat déjà démontrée suivant : la somme des racines nièmes de l'unité est égale à $-\frac{a_{p-1}}{a_p} = -\frac{0}{1} = 0$.

V Factorisation en produit de facteurs irréductibles

1. Polynômes scindé. Polynômes irréductibles

81 Déf Un polynôme P de $K[X]$ est dit scindé (sur K) lorsqu'il s'écrit comme un produit de polynômes de $K[X]$ de degré 1.

82 Trois écritures sous forme scindée d'un même polynôme : $P = (a_1 X + b_1)(a_2 X + b_2) \ldots . (a_s X + b_s)$

$\underset{\substack{\text{en mettant} \\ a_k (\neq 0) \text{ en facteur} \\ \text{dans chaque} \\ \text{parenthèse}}}{\Longleftrightarrow} P = \beta (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_s) \underset{\substack{\text{en regroupant} \\ \text{les facteurs} \\ \text{contenant} \\ \text{le même } \alpha}}{\Longleftrightarrow} P = \beta (X - \mu_1)^{n_1} (X - \mu_2)^{n_2} \ldots (X - \mu_r)^{n_r}$.

83 Déf-prop. : Les polynômes βP tels que $\beta \neq 0$ sont appelés les **polynômes associés** de P. Tout polynôme non nul a un polynôme associé unitaire.

84 Déf: Un polynôme P *de* $K[X]$, non constant, est <u>irréductible</u> lorsque ses seuls diviseurs dans $K[X]$ sont les polynômes constants ou ses associés i.e . ses diviseurs sont les polynômes de la forme $\underbrace{\lambda}_{\substack{\text{polynômes} \\ \text{constants} \\ \text{non nuls}}}$ *ou* $\underbrace{\lambda P}_{\substack{\text{polynômes} \\ \text{associés à } P}}$ $tq\ \lambda \in K^*$.

85 Théo : Tout polynôme de $K[X]$ de degré 1 est irréductible dans $K[X]$.

2. Théorème de d'Alembert-Gauβ

86 Théo de d'Alembert Gauss : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant a au moins une racine complexe.

87Exercice très classique : Trouver tous les P polynômes de $K[X]$ tels que $P(X + 1) = P(X)$.

3. Factorisation dans ℂ[X] en produit de facteurs irréductibles.

88 Théo : Seuls les polynômes de degré 1 sont irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. démo

89 Théo : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant est scindé sur $\mathbb{C}$ et sa forme scindée est unique.

Autrement dit , pour tout P de $\mathbb{C}[X]$ non constant, il existe un unique entier naturel non nul s , une unique famille de s nombres complexes distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ et une unique famille de s entiers naturels non nuls $m_1, \dots, m_s$ tels que :

$$P = codom(P)\prod_{k=1}^{s}(X-\alpha_k)^{m_k} \ .$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sont alors les racines distinctes de P d'ordre de multiplicité respectives $m_1, .., m_s$. démo

90 Conséquence 1 Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non nul a un nombre de racines comptées avec leur multiplicité égal à son degré.

91 Conséquence 2 Soit P et Q deux polynômes non nuls.
$P = Q$ si et ssi P *et* Q ont exactement les mêmes racines complexes avec la même multiplicité et les mêmes coefficients dominants.

92 Deuxième critère de divisibilité Soit A *et* B deux polynômes non nuls.
B divise A **si et ssi** les racines complexes de B sont racines de A avec une multiplicité dans A supérieure ou égale à celle dans B .

93 Obtention de la forme scindée Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ des scalaires tous distincts, $m_1, .., m_s$ des entiers naturels et P un polynôme non nul. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sont des racines distinctes de P d'ordre de multiplicités respectives au moins $m_1, .., m_s$ et $deg(P) = \sum_{k=1}^{s} m_k$ *et* $\beta = codom(P)$ **alors** $P = \beta(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \dots (X-\alpha_s)^{m_s}$(forme scindée de P)
Dans ce cas, P n'a pas d'autres racines et $m_1, .., m_s$ sont les multiplicités exactes de $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ *dans* P.

94Méthode : pour déterminer la forme scindée de P , on cherche les ou des racines complexes de P, ainsi que leur multiplicité respective. On compte ces racines, on compare avec $deg(P)$ pour les avoir toutes !!

95 Exercice de factorisation sous forme scindée sur ℂ : Soit $P = 3X^5 - 10X^4 + 15X^3 - 15X^2 + 10X - 3$. Trouver la forme scindée de P sur $\mathbb{C}$.

4. Factorisation dans ℝ[X] en produit de facteurs irréductibles de ℝ[X].

96 Théorème de factorisation en produit de facteurs irréductibles de ℝ[X]

1. Les polynômes irréductibles dans ℝ[X] sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

2. Tout polynôme de ℝ[X] non constant se factorise de manière unique en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Plus précisément , pour tout P de ℝ[X] non constant, il existe deux uniques entiers naturels non tous nuls r et s, une unique famille de s nombres réels distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, une unique famille de r couples de réels $(b_1, c_1), \dots, (b_r, c_r)$ et une unique famille de $s + r$ entiers naturels non nuls $m_1, \dots, m_s, q_1, \dots, q_r$ tels que :

$$P = codom(P)\left[\underbrace{\prod_{k=1}^{s}(X-\alpha_k)^{m_k}}_{facteurs\ avec\ les\ racines\ réelles}\right]\left[\underbrace{\prod_{k=1}^{r}(X^2+b_kX+c_k)^{q_k}}_{\substack{facteurs\ avec\ les\ racines\\ complexes\ conjuguées}}\right]$$ et pour tout $k \in \{1, \dots, r\}, {b_k}^2 - 4c_k < 0.$ démo

97NB : $\deg(P) = \sum_{k=1}^{s} m_k + 2\sum_{k=1}^{r} p_k$.

98Csq Tout polynôme réel de degré impair a au moins une racine réelle.

99En pratique : comment factoriser un polynôme en produit de facteurs irréductibles

100<u>**Dans ℂ[X]**</u> **:** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors *la forme scindée de* P est l'écriture de P comme produit de facteurs irréductibles de ℝ[X]. Pour trouver la forme scindée de P , il suffit :

1) de trouver **soit** toutes les racines complexes de P en résolvant l'équation $\tilde{P}(z) = 0$ d'inconnue z complexe
   soit d'en trouver quelques-unes évidentes (mais alors je n'ai peut-être pas toutes les racines de P).
2) d'étudier leur multiplicité dans P :
   Ou bien $deg(P)$ =nbre de racines distinctes trouvées. Alors toutes les racines sont simples et
   $P = codom(P)\prod_{k=1}^{\deg(P)}(X-\alpha_k)$.

Ou bien $deg(P)>$nbre de racines distinctes trouvées. Je cherche alors à savoir quelles sont les racines multiples en calculant $\tilde{P}'(\alpha_k)$, $\tilde{P}''(\alpha_k)$, ... On compte, à nouveau, les racines mais cette fois avec leur multiplicité et on compare avec $deg(P)$. Si $deg(P)$ est égal à ce nombre alors je peux factoriser P sous forme scindée.

Dans le cas où je n'ai trouvé que quelques racines évidentes de P, il faut chercher leur multiplicité exacte dans P, factoriser par le facteur correspondant et chercher les racines de l'autre facteur......

3) Ecrire la forme scindée sans oublier le coefficient dominant de P.

101 Exerice: Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Factorisons sous forme scindée dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P_n=\left(1+\frac{X}{n}\right)^n-\left(1-\frac{X}{n}\right)^n$.

102 <u>Dans $\mathbb{R}[X]$</u>. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$non constant. Donc $P\in\mathbb{C}[X]$ *et* P est scindé sur $\mathbb{C}$. Pour écrire P comme produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, il suffit :

1) d'écrire P sous forme scindée dans $\mathbb{C}[X]$ avec la méthode précédente.
2) d'isoler les facteurs avec racines réelles (polynômes de degré 1 irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$).
3) de regrouper 2 à 2 les facteurs avec racines complexes conjuguées, afin de faire apparaitre les polynômes de degré 2 à coefficients réels et irréductibles :

$$(X-\alpha)^m(X-\bar{\alpha})^m=((X-\alpha)(X-\bar{\alpha}))^m=\left(X^2-\underbrace{(\alpha+\bar{\alpha})}_{2Re(\alpha)}X+\underbrace{\alpha\bar{\alpha}}_{|\alpha|^2}\right)^m=\left(\underbrace{X^2-2Re(\alpha)X+|\alpha|^2}_{polynôme\ irréductible\ de\ \mathbb{R}[X]}\right)^m.$$

103 Exercice Revenons à $P_n=\left(1+\frac{X}{n}\right)^n-\left(1-\frac{X}{n}\right)^n$<u>. Factorisons</u> $P_n$en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Parfois on parvient à factoriser P sans chercher les racines ...comme le prouve ce premier exercice

104 Exercice: Factorisons $1+X^2+X^4$ *dans* $\mathbb{R}[X]$.

105 Savoir-faire: Factorisons X^n-1 en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. X^n-1 admet les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité comme racine.
Comme $deg\,(X^n-1)=n$, ces racines sont toutes simples et
$X^n-1=1\times\prod_{k=0}^{n-1}(X-e^{i\frac{2k\pi}{n}})$ factorisation sous forme scindée dans $\mathbb{C}$[X].

<u>**Si n pair**</u> alors X^n-1 a deux racines réelles qui sont : 1 (pour $k=0$) et -1 $\left(k=\frac{n}{2}\right)$ et

$$X^n-1=(X-1)(X+1)\prod_{\substack{k=1\\k\neq\frac{n}{2}}}^{n-1}\left(X-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(X-\underbrace{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}_{\substack{de\ partie\\imaginaire\\positive}}\right)\prod_{k=\frac{n}{2}+1}^{n-1}\left(X-\underbrace{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}_{\substack{de\ partie\\imaginaire\ n\\égative}}\right).$$

$$X^n-1=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(X-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\left(X-e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right)\boxed{=(X-1)\underbrace{(X+1)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(X^2-2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X+1\right)}_{Q(X)}}.$$ Factorisation dans $\mathbb{R}$[X]....

<u>**Si n impair**</u> alors X^n-1 *a une seule racine réelles* et

$$X^n-1=(X-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)=(X-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\prod_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1}\left(X-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\boxed{=(X-1)\underbrace{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X^2-2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X+1\right)}_{Q(X)}}.$$

<u>Enfin,</u> $X^n-1\underbrace{=}_{\substack{formule\\de\ factorisation}}(X-1)\left(\underbrace{1+X+X^2+\cdots+X^{n-1}}_{T(X)}\right)\underbrace{=}_{d'apèrsce\ qui\ précède}(X-1)Q(X).$

Donc, $(X-1)[T(X)-Q(X)]=0$. Comme $\mathbb{R}[X]$ est intègre et $X-1$ n' est pas le polynôme nul, $T(X)-Q(X)=0$.

Je conclus que : $(1+X+X^2+\cdots+X^{n-1})=\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{i\frac{2k\pi}{n}})=\begin{cases}(X+1)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(X^2-2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X+1\right)si\ n\ pair\\ \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X^2-2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X+1\right)\ si\ n\ impair\end{cases}.$

106 Cas des polynômes réels réciproques : Un polynôme $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ réel et de degré n est dit réciproque lorsque : $\forall k, a_{n-k}=a_k$ (ce qui revient à dire que pour tout cpxe z *non nul*, $\tilde{P}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{P(z)}{z^n}$) Exemple : $P=5+2X-7X^2-7X^3+2X^4+5X^5$.
On remarque alors que :

- si n est impair alors -1 est racine de P , on a alors $P=(X+1)Q$ avec $degQ$ pair et Q réciproque.
- Si z est racine de P alors $\frac{1}{z}$ l'est aussi.

Pour déterminer les racines complexes <u>non nulles et non évidentes</u> d'un polynôme réciproque P de degré pair, on pose $w=z+\frac{1}{z}$ et on obtient : $\tilde{P}(z)=0\ (*)\ \underbrace{si\ etssi}_{\substack{en\ mettant\\z^{n/2}\ en\ facteur}}\ T(w)=0\ (**)$ où T polynomiale de degré $\frac{n}{2}$.

On résout (**) (on trouve les valeurs de w) puis on résout $w=z+\frac{1}{z}$ pour chaque valeur trouvée de w.

107 Exemple : Factorisons $P(X)=1+2X-X^2+2X^3+X^4$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}$[X].

<u>Cherchons tout d'abord les racines complexes de P .</u> $\tilde{P}(0)\neq 0$. Soit $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ et posons $w=z+\frac{1}{z}$.

$$P(z)=1+2z-z^2+2z^3+z^4=0\Leftrightarrow\underbrace{z^2}_{\neq 0}\left(\underbrace{z^2+\frac{1}{z^2}}_{w^2-2}+2\left(\underbrace{z+\frac{1}{z}}_{w}\right)-1\right)=0\Leftrightarrow(w^2-2)+2w-1=0\Leftrightarrow w^2+2w-3=0\Leftrightarrow w=1\ ou\ w=-3$$

$$\Leftrightarrow z+\frac{1}{z}=1\ \ ou\ \ z+\frac{1}{z}=-3\Leftrightarrow z^2-z+1=0\ ou\ z^2+3z+1=0\Leftrightarrow\underbrace{z=-j\ ou\ z=-j^2ou\ z=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\ ou\ z=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}_{\substack{P\ a\ 4\ racines\ distinctes\ \ et\ degP=4\\donc\ ces\ racines\ sont\ toutes\ simples}}.$$

Ainsi , $P = \underbrace{(X+j)(X+j^2)\left(X+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}_{\substack{la\ factorisation\ de\ P\ dans\ \mathbb{C}[X] \\ en\ porduit\ de\ fecteurs\ irréductibles}} = \underbrace{(X^2-X+1)\left(X+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}_{\substack{la\ factorisation\ de\ P\ dans\ \mathbb{R}[X] \\ en\ produit\ de\ facteurs\ irréductibles\ .}}.$

<u>Contrôle qualité</u> : somme des racines de P=$-j-j^2+\frac{-3-\sqrt{5}}{2}+\frac{-3+\sqrt{5}}{2} = 1-3 = -2 \underbrace{=}_{OK} -\frac{coeff\ de\ X^3}{coeff\ dominant}$.

Produit des racines de P=$(-j)(-j^2)\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \underbrace{=}_{OK} (-1)^4\frac{coeff\ constant}{coeff\ dominant}$.

V Familles de polynômes (encore des classiques !) .

1. Polynômes de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots a_n$ des réels distincts.

a. Soit $i\in[\![0,n]\!]$. Déterminer un polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall j \in [\![0,n]\!], L_i(a_j) = \delta_{ij}$ symbole de Kronecker.

b. Montrer l'unicité d'un tel polynôme. Déterminer $\deg(L_i)$ et $\mathrm{codom}(L_i)$.

c. Montrer que $\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$.

d. Soit $b_0, b_1, \dots, b_n$ des réels. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall j \in [\![0,n]\!], P(a_j) = b_j$.

e. Montrer l'unicité d'un tel P.

f. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $\tilde{P}(a_j) = f(a_j)$.

g. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \exists! \,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$.

2. Polynômes de Tchebychev

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons qu'il existe un polynôme P_n tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\tilde{P}_n(cos\theta) = cos(n\theta)$.

b. Montrons qu'un tel polynôme P_n est unique.

c. Montrer que $\deg(P_n) = n$.

d. Déterminer la forme scindée de P_n.

e. Montrer que : $P_0 = 1\ et\ P_1 = X\ et\ \forall n \in \mathbb{N}^*.\ P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$.

3. Polynômes de Legendre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P = (X^2-1)^n$ et $L_n = \frac{1}{2^n n!} P^{(n)}$.

a. Donner une expression de L_n. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

b. Justifier que : pour tout $l \in [\![0, n-1]\!]$, $X^2 - 1$ divise $P^{(l)}$.

c. Montrer que : pour tout $l \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(l)}$ a au moins l racines distinctes dans $]-1,1[$.

d. En déduire que L_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses racines sont dans $]-1,1[$.

4. Polynômes de Bernoulli

a. On va construire, par récurrence, la suite (B_n) de polynômes définie par : $\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, B'_{n+1} = (n+1)B_n \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 \widetilde{B_n}(t)dt = 0 \end{cases}$.

On pose $B_0(X) = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose construits les $(n+1)$ premiers polynômes $B_0, \dots, B_n$ tels que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!], B'_{k+1} = B_k$ et $\int_0^1 \widetilde{B_{k+1}}(t)dt = 0$. On pose $B_n = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$. Déterminer, en fonction des a_k, une expression de l'unique polynôme $B_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ tel que $B'_{n+1} = B_n$ et $\int_0^1 \widetilde{B_{n+1}}(t)dt = 0$.

b. Expliciter $B_1, B_2, B_3\ et\ B_4$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de B_n.

d. Etablir une relation entre $B_n^{(k)}\ et\ B_{n-k}\ si\ \ 0 \le k \le n$.

e. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{B_{n-k}}(0)}{k!} X^k$.

f. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \widetilde{B_n}(0) = \widetilde{B_n}(1)$.

g. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n(X+1) = B_n(X) + \frac{1}{(n-1)!} X^{n-1}$.

5. Calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Soit n un entier strictement positif et $P_n = \frac{1}{2i}[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}]$.

1. Montrer que P_n appartient à $\mathbb{R}\,[X]$. Préciser le terme dominant de P_n.
2. Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa forme scindée.

3. Montrer qu'il existe un polynôme Q_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $P_n(X) = Q_n(X^2)$.
4. Factoriser Q_n sous forme scindée dans $\mathbb{R}\,[X]$.
5. Calculer les sommes : $S_n = \sum_{k=1}^{n} cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.
6. Prouver l'inégalité suivante : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{sin^2 x}$.
7. En déduire $\lim\limits_{N \to +\infty} S_N$ où $S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$.