

TD 15 Polynômes

I Opérations, unicité des coefficients, degré, les polynômes dérivés.

Ex 1 Produit de deux fonctions polynomiales. Montrer que : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k x^k + o_0(x^n)$ où $a_k = \sum_{p=1}^k \frac{1}{p}$.

Ex 2 Déterminer tous les polynômes P tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ par analyse-synthèse. Dans l'analyse, on cherchera d'abord le degré d'un tel polynôme.

Ex 2 bis Solutions polynomiales d'une équ. diff.

1. Chercher toutes les fonctions polynomiales solutions de l'équation différentielle (E): $(x^2 + 1)y'' - 2y = -x$.
2. Déterminer une solution polynomiale φ non nulle de (EH).
3. En déduire toutes les solutions de (E) en les cherchant sous la forme $y(x) = k(x)\varphi(x)$ (c'est ce qu'on appelle la méthode de variation de la constante pour les équ. diff. d'ordre 2 à coefficients non constants)

Ex 2 ter On cherche à résoudre $(P')^2 = 4P$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

- 1) Déterminer le degré d'une solution non nulle.
- 2) En déduire les solutions.

Ex 3 Degré et unicité des coefficients

Soit $f(P) = (X^2 + X)P''(X) + (2X + 1)P'(X)$.

- 1) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$ et tel qu'il existe λ un réel vérifiant $f(P) = \lambda P$.
On note $d = \deg(P)$ et $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ tq $a_d \neq 0$.
 - a) Démontrer que : $\lambda = d(d+1)$ et $\forall k \in \{0, 1, \dots, d-1\}, a_{k+1} = \frac{(d-k)(d+k+1)}{(k+1)^2} a_k$.
 - b) En déduire que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, d\}, a_k = \frac{(d+k)!}{(d-k)!(k!)^2} a_0$.
 - c) Démontrer qu'il existe un seul polynôme Q_d unitaire, (i.e. $\text{codom}(Q_d) = 1$) tel que $f(Q_d) = d(d+1)Q_d$.

II Division euclidienne-Taylor-Divisibilité-Racines.

Ex 4 Formules de Taylor pour les polynômes

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que : $P(-1) = 1, P'(-1) = -2$ et $P''(-1) = 3$.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(3) = P'(3) + P''(3)$.

Ex 5

1. Déterminer un polynôme U de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ qui admet $1 + \sqrt{2}$ comme racine.
2. Soit $P = 2X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X - 4$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par U .
3. En déduire $P(1 + \sqrt{2})$

Ex 6

1. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient $P(X+1) = P(X)$.
2. En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $(X+3)P(X) = XP(X+1)$.

Ex 7 Déterminer le reste de la division euclidienne d'un polynôme P de $K[X]$ quelconque par $B = (X-a)(X-b)$ avec a et b deux scalaires.

Ex 7 bis Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P = (\cos(\theta)X + \sin(\theta))^n$ par $B = X^2 + 1$.

Ex 7 ter Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P = (X + \sqrt{3})^n$ par $B = X^2 + 1$.

Ex 8 $P(X) = X^{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n X^k$

1. Montrer que 1 est racine de P et trouver sa multiplicité dans P .
2. Calculer $Q = (X-1)P$. En déduire le nombre de racines distinctes de P et leur multiplicité.

Ex 9 Montrer que $X^4 + 2X^2 + 4X - 1$ n'a que des racines simples.

Ex 10 Déterminer tous les couples de réels (a, b) tels que $X^2 + aX + 1$ divise $X^4 - X + b$.

Ex 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(X-1)^3$ divise $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$. Factoriser P par $(X-1)^2$.

Ex 11 bis Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(X-1)^2$ divise $A = (\sum_{k=0}^{n-1} X^k)^2 - n^2 X^{n-1}$.

Ex 12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les réels a et b tels que : $(X - 1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$ et on déterminera alors le quotient.

Ex 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(X - 2)(X - 3)$ divise $(X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 1$
2. Déterminer le quotient. (indication : on écrira $(X - 2) = (X - 3) + 1$ puis $(X - 3) = (X - 2) - 1$).

Ex 14 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $X^2 - 2X \cos a + 1$ divise $X^n \sin a - X \sin(na) + \sin(n - 1)a$.

Ex 15 Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{311} + X^{82} + X^{15}$.

Ex 16 Pour quelles valeurs de n , $B = (X^2 + X + 1)^2$ divise-t-il $P = (1 + X)^n - X^n - 1$

Ex 17 Soit f la fonction sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par : $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$.

1. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f^{(n)}(x) = \frac{e^x \tilde{P}_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$.
3. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n et justifier votre réponse. Et Calculer $\tilde{P}_n(1)$.
4. Vérifier que f est solution d'une équation différentielle. En déduire que : $P_{n+1}(X) = n(X - 1)P_n(X) + ((n + 2) - X)P_n(X)$.
5. En déduire que : pour tout entier $n \geq 1$, $P'_n(X) = -nP_{n-1}(X)$.
6. Démontrer, par l'absurde, que pour tout entier $n \geq 1$, P_n n'a que des racines simples.
7. Soit n et k entiers tels que : $0 \leq k \leq n$. Trouver une relation entre $P_n^{(k)}$ et P_{n-k} et en déduire la valeur de $P_n^{(k)}(1)$.
8. En déduire que : $P_n(X) = n! \left(1 + (1 - X) + \frac{(1-X)^2}{2!} + \dots + \frac{(1-X)^n}{n!} \right) = n! \left(\sum_{k=0}^n \frac{(1-X)^k}{k!} \right)$.

III Relation nombre de racine/degré - Forme scindée - Relations coefficients/racines.

Ex 18 Déterminer tous les polynômes de degré 3 multiple de $X - 1$ et dont les restes des divisions euclidiennes par $(X - 2)$, par $(X - 3)$ et par $(X - 4)$ sont égaux.

Ex 19 Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ de degré 5 tels que $P + 10$ soit divisible par $(X + 2)^3$ et $P - 10$ soit divisible par $(X - 2)^3$ (indication : considérer P').

Ex 20 Soit P un polynôme de degré 2023 tel que $\tilde{P}(0) = 1$ et $\forall k \in \llbracket 1, 2023 \rrbracket, \tilde{P}(k) = k$. Calculer $\tilde{P}(-1)$.

Ex 21 Soit $P = X^3 + X^2 + 1$.

1. Justifier que P admet une racine réelle et deux racines complexes conjuguées. On ne demande pas de les déterminer. On les note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
2. Calculer $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ et $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3$.
3. En déduire $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3$, $\frac{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_1^2 + \alpha_3^2}{\alpha_2^2} + \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_3^2}$.
4. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^7 par $X^3 + X^2 + 1$. En déduire $\alpha_1^7 + \alpha_2^7 + \alpha_3^7$.

Ex 22 Montrer que $P = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \frac{X(X-1)(X-2)}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et trouver sa forme scindée.

Ex 23 Factorisation et application Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$. Factoriser P sous forme scindée dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \right)$ puis $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$.

Ex 24 Soit n un entier strictement positif et $P_n = \frac{1}{2i} [(X + i)^{2n+1} - (X - i)^{2n+1}]$.

1. Montrer que P_n appartient à $\mathbb{R}[X]$. Préciser le terme dominant de P_n .
2. Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa forme scindée.
3. Montrer qu'il existe un polynôme Q_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $P_n(X) = Q_n(X^2)$.
4. Factoriser Q_n sous forme scindée dans $\mathbb{R}[X]$.
5. Calculer les sommes : $S_n = \sum_{k=1}^n \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)$ et $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)}$.
6. Prouver l'inégalité suivante : $\forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[, \cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x}$.
7. En déduire $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$ où $S_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}$.

Ex 25

Soit $z_1, \dots, z_{100}$ les racines complexes de $P(X) = X^{100} + X^{10} - 1$.

1. Montrer que $z_1, \dots, z_{100}$ sont tous distincts.
2. Calculer $\sum_{k=1}^{100} \frac{z_k - 3}{z_k + 1}$. Indication : poser $u_k = \frac{z_k - 3}{z_k + 1}$ et trouver un polynôme dont les racines sont $u_1, \dots, u_{100}$.

Ex 26 Polynômes d'interpolation de Lagrange

Version simplifiée Soit a, b et c trois réels distincts. On pose $A(X) = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}$, $B(X) = \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)}$ et $C(X) = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$.

1. Montrer sans calcul que : $A + B + C = 1$
2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $P = \tilde{P}(a)A + \tilde{P}(b)B + \tilde{P}(c)C$ et que cette écriture de P comme combinaison linéaire de A, B et C est unique.

Version complète Soit $(a_k)_{k=0 \dots n}$ ($n+1$) réels distincts.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $L_i(a_i) = 1$ et $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}, L_i(a_k) = 0$. On donnera son expression sous forme factorisée (scindée).

2. Montrer que $\sum_{i=0}^n L_i = 0$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que P s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des polynômes $L_0, \dots, L_n$.

4. **Application** : On pose $N(X) = \prod_{k=0}^n (X - a_k)$.

Soit a et b deux réels tels $a < \min \{a_k/k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ et $b > \max \{a_k/k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

- a. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \tilde{P}(a_k) = f(a_k)$.

- b. On suppose de f est de classe $\mathcal{C}^{(n+1)}$ sur $[a, b]$.

- i. Montrer que $\forall x \in [a, b], \exists c \in]a, b[, f(x) - P(x) = \frac{\tilde{N}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$. (indication : on utilisera la fonction $W(t) = N(x)(f(t) - P(t)) - N(t)(f(x) - P(x))$).

- ii. Justifier que $M = \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$ existe.

- iii. En déduire que $\forall x \in [a, b], |f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |\tilde{N}(x)|$ et $\sup_{[a,b]} |f - P| \leq \frac{M}{(n+1)!} |b - a|^{n+1}$.

Ex 27 Soit $n \in \mathbb{N}^*, P = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = P^{(n)}$.

1. Donner une expression de L_n . En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.
2. Justifier que : pour tout $l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, X^2 - 1$ divise $P^{(l)}$.
3. Montrer que : pour tout $l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P^{(l)}$ a au moins l racines distinctes dans $] -1, 1[$.
4. En déduire que L_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses racines sont dans $] -1, 1[$.

Ex 28 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que P scindé sur $\mathbb{R}$ et $\deg(P) \geq 2$. On note λ le coefficient dominant de P et $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ les racines de P de multiplicités respectives non nulles $m_1, \dots, m_s$ où $s \in \mathbb{N}^*$. $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ étant réels, on peut les ordonner. On impose donc : $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_s$. On a ainsi, $P = \lambda \prod_{k=1}^s (X - \alpha_k)^{m_k}$.

1. Exprimer $\deg(P)$ en fonction de $m_1, \dots, m_s$. On note $D = \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.
2. Quelle est la multiplicité de $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ en tant que racines de P' ? (multiplicité nul " = " pas racine)
3. Ici, je suppose que $s \geq 2$ (i.e. P a au moins deux racines réelles distinctes). Justifier que pour tout $k \in \llbracket 1, s-1 \rrbracket$, il existe $c_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $\tilde{P}'(c_k) = 0$.
4. Déduire de ce qui précède que P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$ et donner sa forme scindée.

Ex 29 Soit $n \in \mathbb{N}$. On va étudier l'existence et les propriétés des polynômes P_n tels que : $\forall t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tilde{P}_n\left(t + \frac{1}{t}\right) = t^n + \frac{1}{t^n}$.

1. Montrer que si P_n existe alors P_n est unique.
2. Justifier que $P_0(X) = 2$ et $P_1(X) = X$ puis en développant $\left(t + \frac{1}{t}\right)^2$, déterminer $P_2(X)$.
3. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ existe et pour tout $n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(X) = X \cdot P_{n+1}(X) - P_n(X)$.
4. Déterminer le degré de P_n et son terme dominant (avec preuve).
5. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*, P_n$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et déterminer sa forme scindée
6. En utilisant les résultats précédents, donner les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$.

IV Factorisation en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

EX 30 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser les polynômes suivants en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

1. $P = X^8 + X^4 + 1$.
2. $P = (1 - X^2)^3 + 8X^3$.
3. $P = X^6 + 1$
4. $P = X^n - R^n$ où R réel strictement positif
5. $P = X^{2n} - 2 \cos(\theta) X^n + 1$ où $\theta \in [0, \pi]$.
6. $P = 3X^5 - 10X^4 + 15X^3 - 15X^2 + 10X - 3$.

EX 31 Factoriser les polynômes réciproques suivants en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

1. $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.
2. $P = X^7 - 5X^6 + 8X^5 - 4X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 5X + 1$.

EX 32 Sommes de Riemann. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2) dt$ (où x variable réelle)

1. Domaine de définition de f .
 - a) Compléter la phrase : $f(x)$ existe dès que
 - b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_x: (t \mapsto \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2))$ est continue sur $]0, \pi[$.
 - c) Montrer que $g_x: (t \mapsto \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2))$ est continue en 0 si et si $x \neq 1$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur x pour que g_x soit continue en π .
 - d) En déduire que f est définie que $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
2. Soit x réel tel que $|x| \neq 1$ et n entier naturel non nul, on note $S_n(x) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 - 2x \cos(\frac{k\pi}{n}) + x^2)$.
 - a) Montrer que : $\prod_{k=1}^n (1 - 2x \cos(\frac{k\pi}{n}) + x^2) = (\frac{x^{2n}-1}{x-1})(x+1)$.
 - b) En déduire $S_n(x)$.
3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ selon que $|x| > 1$ ou $|x| < 1$.

V Décomposition en éléments simples

Ex 33 1) Calculer $I = \int_0^1 \frac{t^5}{t^4+3t^3+4t^2+3t+1} dt$ après avoir justifié son existence. Faites de même avec $J = \int_0^1 \frac{t^3}{t^3+1} dt$.

3. Calculer $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$ où $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{n^2(n+2)^2}$.
4. Déterminer l'expression de la dérivée n ième de $f(x) = \frac{3-2x^4}{x^4-2x^2+1}$.

Ex 34

1. Factoriser $P(X) = X^4 + X^2 + 1$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire $\int_0^1 \frac{3t^4}{1+t^2+t^4} dt$

Ex 35 Soit l'équation différentielle $(E) : x(x+1)y'' + (x-2)y' - y = 0$. Vérifier que (E) admet une solution polynomiale φ puis résoudre (E) sur $]2; +\infty[$ en cherchant les solutions sous la forme $f(x) = k(x)\varphi(x)$.

EX 36 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que P scindé sur $\mathbb{R}$ et $\deg(P) \geq 2$. On note λ le coefficient dominant de P et $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ les racines de P de multiplicités respectives non nulles $m_1, \dots, m_s$ où $s \in \mathbb{N}^*$. $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ étant réels, on peut les ordonner. On impose donc : $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_s$. On a ainsi, $P = \lambda \prod_{k=1}^s (X - \alpha_k)^{m_k}$.

I. Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ quand P est scindé sur $\mathbb{R}$. On pose $F(t) = \frac{P'(t)}{P(t)}$ pour tout $t \in D$.

1. Donner une expression de P' grâce à la forme scindée de P . (on utilisera la formule $(\prod_{k=1}^s P_k)' = \dots$)
2. En déduire que $\forall t \in D_F, F(t) = \sum_{k=1}^s \frac{m_k}{t - \alpha_k}$. (c'est la décomposition en éléments simples de F !!)
3. Application : Déterminer $\int \frac{5t^4 - 16t^3 + 3t^2 + 20t - 4}{t^5 - 4t^4 + t^3 + 10t^2 - 4t - 8} dt$ (on précisera sur quel intervalle on travaille).

II. Décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$ quand P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

On suppose ici que $m_1 = m_2 = \dots = m_s = 1$ i.e. toutes les racines de P sont réelles et simples. On pose $\forall t \in D, G(t) = \frac{1}{P(t)}$.

La décomposition en éléments simples de G est de la forme : $\forall t \in D, G(t) = \sum_{k=1}^s \frac{u_k}{t - \alpha_k}$ où $u_1, \dots, u_s$ constantes réelles.

4. Soit $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$. Justifier que $\tilde{P}'(\alpha_j) \neq 0$ et montrer que $\lim_{t \rightarrow \alpha_j} (t - \alpha_j)G(t) = \frac{1}{\tilde{P}'(\alpha_j)}$.
5. En déduire que : $\forall t \in D, G(t) = \sum_{k=1}^s \frac{1}{\tilde{P}'(\alpha_k)} \frac{1}{t - \alpha_k}$ (c'est la décomposition en éléments simples de G).
6. Application : On pose $S_N = \sum_{n=3}^N \frac{1}{n^3 - 2n^2 - n + 2}$. Déterminer la limite de S_N quand $N \rightarrow +\infty$.

III. Partie polaire d'un pôle simple ou double.

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction irréductible.

7. Montrer que si α est un pôle simple de F alors sa partie polaire est $\frac{a}{x - \alpha}$ tel que $a = \frac{A(\alpha)}{\tilde{B}(\alpha)}$ où $B(t) = \tilde{B}(t)(t - \alpha)$
8. Montrer que si α est un pôle double de F alors sa partie polaire est $\frac{a}{(x - \alpha)^2} + \frac{b}{(x - \alpha)}$ tel que $a = \frac{A(\alpha)}{\tilde{B}(\alpha)}$ et $b = \left(\frac{A}{\tilde{B}}\right)'(\alpha)$ où $B(t) = \tilde{B}(t)(t - \alpha)^2$