Programme de colle 19

Chap14 Propriétés de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue (par morceaux).

I Définitions

- Une subdivision de $[a,b]$ est une famille de réels $(a_k)_{k=0..n} tels\ que\ a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$.
- Une fonction en escalier sur $[a,b]$ est une application e de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une subdivision$(a_k)_{k=0..n}$de $[a,b]$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!], e_{/]a_k,a_{k+1}[}$est constante. Si $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall x \in]a_k, a_{k+1}[, e_{/]a_k,a_{k+1}[}(x) = \lambda_k$ alors par définition$\int_{[a,b]} e(x)dx = \int_a^b e(x)dx \ = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\,(a_{k+1} - a_k)$. Cette définition est indépendante de la subdivision adaptée à e.

Si f est continue et réelle sur le segment $[a,b]$ alors

- il existe une suite (e_n) de fonctions en escalier sur $[a,b]$ telle que $sup_{[a,b]}|f - e_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $(**)$ et $\left(\int_a^b e_n(x)dx\ \right)_{n\in\mathbb{N}}$converge vers un réel L
- Si (e_n) est une autre suite de fonctions en escalier vérifiant $(**)$ alors $\left(\int_a^b e_n(x)dx\ \right)_{n\in\mathbb{N}}$converge aussi vers ce même réel L et par définition, $\int_a^b f(x)dx \ = L$.

- Si f est continue et complexe sur le segment $[a,b]$ alors$\int_a^b f(x)dx \ = \int_a^b Re(f(x))dx \ + i\int_a^b Im(f(x))dx$.
- Une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ est une application f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une subdivision$(a_k)_{k=0..n}$de $[a,b]$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!], f_k = f_{/]a_k,a_{k+1}[}$est continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ et admet une limite finie à droite a_k en et une limite finie à gauche en a_{k+1}. Alors par définition$\int_a^b f(x)dx \ = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \tilde{f}_k(x)dx$). Cette définition est indépendante de la subdivision adaptée à f.
- Si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ alors par définition, $\int_b^a f(x)dx \ = -\int_a^b f(x)dx\ \ et\ \int_a^a f(x)dx \ = 0$.

Csq : Si f est continue par morceaux sur un intervalle I alors $\forall (a,b) \in I^2, \int_b^a f(x)dx\ \ existe$.

II Propriétés déjà rencontrées

1. Relation de Chasles

Si f est continue (par mcx) sur l'intervalle I alors $\forall (a,b,c) \in I^2, \int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

2. Linéarité

Si f et g sont continues (par mcx) sur l'intervalle I alors $\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall (a,b) \in I^2, \int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$.

3. Positivité

Si $a \le b$ et f est réelle, continue (par mcx) et positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \ge 0$.

4. Croissance

Si $a \le b$ et f et g sont réelles, continues (par mcx) et $\forall t \in [a,b], f(t) \le g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$.

III Inégalité triangulaire

Si f est continue (par mcx) sur l'intervalle I alors $\forall (a,b) \in I^2, \left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \left|\int_a^b |f(t)|dt\right|$

IV Primitive

1. Théorème fondamental de l'intégration TFI et sa conséquence

TFI : Si f est **continue** sur un intervalle I et $a \in I$ alors $(x \mapsto \int_a^x f(t)dt)$ est une primitive de f sur I et est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a

Csq : Si f est **continue** sur un intervalle I alors f admet une primitive sur I.

2. Théorème fondamental de calcul d'une intégrale $TFCI$

Si f est **continue** sur l'intervalle I alors pour toute primitive F de f sur I , $\forall (a,b) \in I^2, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \overset{notation}{\widehat{=}} [F(t)]_a^b$.

3. Lien entre f et f'

Si f est **de classe C^1** sur l'intervalle I et $a \in I$ alors $\forall x \in I^2, f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$.

4. Théorème d'intégration par parties

Si $f\ et\ g$ sont **de classe C^1** sur l'intervalle I alors $\forall (a,b) \in I^2\ \int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$.

5. Théorème de changement de variable

Si φ est de classe C^1 sur l'intervalle I et f est continue sur $\varphi(I)$ alors $\forall (a,b) \in I^2, \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

V Lemme d'annulation

1. Lemme d'annulation

Si f est **réelle, continue et positive** sur l'intervalle $[a,b]$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors $\forall x \in [a,b], f(x) = 0$.

2. Sa contraposée

Si f est **continue , réelle et positive** sur l'intervalle $[a,b]$ et $\exists x \in [a,b], f(x) \neq 0$ alors $\int_a^b f(t)dt > 0$.

VI Moyenne d'une fonction continue sur un segment

1. Définition

Lorsque f est continue (par mcx) sur $[a,b]$, la moyenne de f entre a et b $est\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\left(= \frac{1}{a-b}\int_b^a f(t)dt\right)$.

2. Inégalités de la moyenne

Si f est **continue et réelle** sur $[a,b]$, alors $min_{[a,b]}f\ \le \frac{1}{a-b}\int_b^a f(t)dt \le\ \ max_{[a,b]}f$.

Si f est continue (par mcx) sur l'intervalle I et bornée sur I alors $\forall(a,b)\in I^2, \left|\int_b^a f(t)dt\right| \leq sup_I|f||b-a|$.

3. Egalité de la moyenne

Si f est **continue et réelle** sur $[a,b]$ alors $\exists c\in[a,b], f(c)=\frac{1}{a-b}\int_b^a f(t)dt$.

VII Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si f et g sont **continues et réelles** sur $[a,b]$, alors $\left(\int_b^a f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_b^a f(t)^2dt\right)\left(\int_b^a g(t)^2dt\right)$.

VIII Somme de Riemann

Si f est **continue** sur $[a,b]$ alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)=\int_a^b f(t)dt$.

Cas particulier : Si f est continue sur $[0,1]$ alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)dt$.

Chap 15 Polynômes à une indéterminée.

I Généralités

- **Définition d'un polynôme comme une suite presque nulle (nulle à partir d'un certain rang).**

Un polynôme à coefficients dans K est une suite d'éléments de K nulle à partir d'un certain rang.

- **Soit P et $Q, P_1, P_2, \dots, P_s$ des polynômes à coefficients dans $K, \lambda\in K$ et $m\in\mathbb{N}$.**
  - ✓ **Définition de $\lambda P, P+Q, PQ$.**

Soit P et Q éléments de $K[X]$, $\lambda\in K$ tels que $P=(a_0,a_1,\dots,a_n,0,0,\dots.)$ et $Q=(b_0,b_1,\dots,b_m,0,0,\dots.)$ tel
$\lambda P=(\lambda a_0,\lambda a_1,\dots,\lambda a_n,0,0,\dots.)$.
$P+Q= =(a_0+b_0,a_1+b_1,\dots,a_{\max(n,m)}+b_{\max(n,m)},0,0,\dots.)$
$PQ=(c_0,c_1,\dots,c_{n+m},0,0,\dots.)$ où $c_k=\sum_{j=0}^k a_jb_{k-j}$.

  - ✓ **Définition de P^m, d'une combinaison linéaire de P et Q.**

$P^0=1$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*, P^m=P^{m-1}P=\underbrace{P\times P\times\dots\times P}_{m\ fois}$

Une combinaison linéaire de P et Q est tout polynôme qui peut s'écrire sous la forme $aP+bQ$ où a et b éléments de K.
Une combinaison linéaire de $P_1,P_2,\dots,P_s$ est tout polynôme qui peut s'écrire sous la forme $\sum_{k=1}^s a_k P_k$ où $a_1,\dots,a_s$ éléments de K.

- **Définition du polynôme X. Calcul de X^k.**

$X=(0,\underbrace{1}_{rang\ 1},0,0,\dots\dots)$ est appelée l'indéterminée

$\forall k\in\mathbb{N}, X^k=(\underbrace{0}_{rang\ 0},0,\dots,0,\underbrace{1}_{rang\ k},0\dots\dots)$ est appelée l'indéterminée

- **Nouvelle définition (écriture sous forme développée) d'un polynôme :**

Un polynôme à coefficient dans K s'écrit de manière unique sous la forme $\underbrace{\sum_{k=0}^n a_kX^k}_{\substack{combinaison\\ linéaire\\ de\ 1,X,X^2,\dots,X^n}}$ où $n\in\mathbb{N}$ et $a_0,..,a_n$éléments de K sont les coefficients de P.

On note $K[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans K.
Deux polynômes sont égaux sietssi ils ont les mêmes coefficients.
Un polynôme constant est un polynôme de forme $aX^0 tq\ a\in K$ et est noté tout simplement a.

- **Nouvelle expression $\lambda P, P+Q, PQ, P^m$. Définition de $P\circ Q$. Combinaison linéaire de polynômes.**

Soit P et Q éléments de $K[X]$, $\lambda\in K$ tels que $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k$ et $Q=\sum_{k=0}^m b_kX^k$.
$\lambda P=\sum_{k=0}^n \lambda a_kX^k$.
$P+Q=\sum_{k=0}^{\max(n,m)}(a_k+b_k)X^k$.
$PQ=\sum_{k=0}^{n+m} c_kX^k$ où $c_k=\sum_{j=0}^k a_jb_{k-j}$.
$P\circ Q=\sum_{k=0}^n a_kQ^k$

- **Règles de calcul : élément neutre, opposé, associativité, commutativité, distributivité, calcul de X^kX^p et $(X^k)^p$.**
- **Formule du binôme de Newton et formule de factorisation**
- **Définition du degré d'un polynôme, du coefficient dominant et terme dominant lorsqu'ils existent.**

Soit $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k\in K[X]$.
Si $P=0$ alors d°P $=\deg(P)=-\infty$ et P n'a pas de coefficient dominant ni de terme dominant.
Si $P\neq0$ alors d°P $=\deg(P)=\{k/a_k\neq0\}$ et $codom(P)=a_{\deg(P)}$ $et\ terme\ domominant\ de\ P=a_{\deg(P)}X^{\deg(P)}$

- **Formules des degrés de $P+Q, PQ, \beta P$ et $P\circ Q$ et formule sur les coefficients dominants lorsqu'ils existent. Généralisation à un produit ou une combinaison linéaire de m polynômes, à une puissance de polynôme.**

Soit P et Q , $P_1,P_2,\dots,P_s$ éléments de $K[X]$, $\lambda\in K$ tels que $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k$ et $Q=\sum_{k=0}^m b_kX^k$.
$\deg(\lambda P)=\begin{cases}\deg(P)\ si\ \lambda\neq0\\ -\infty\ si\ \lambda=0\end{cases}\leq\deg(P)$. Et le cas échéant, $\text{codom}(\lambda P)=\lambda\text{codom}(P)$.
$\deg(P+Q)\leq\max(\deg(P),\deg(Q))$. $\deg(P)>\deg(Q)$ alors $\deg(P+Q)=\deg(Q)$ et $codom(P+Q)=codom(P)$.
$\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$. Et le cas échéant, $\text{codom}(PQ)=\text{codom}(P)\ \text{codom}(Q)$.
$\forall k\in\mathbb{N}$, $\deg(P^k)=k\deg(P)$
$\deg\left(\prod_{j=1}^s P_j\right)=\sum_{j=1}^s\deg(P_j)$. Et le cas échéant, $\text{codom}\left(\prod_{j=1}^s P_j\right)=\prod_{j=1}^s codom(P_j)$.
$\deg\left(\sum_{j=1}^s\lambda_jP_j\right)\leq\max(\deg(P_1),\deg(P_2),\dots,\deg(P_s))$. Et si l'un des polynômes $P_1,P_2,\dots,P_s$ a un degré strictement supérieur à tous les autres alors $\deg\left(\sum_{j=1}^s P_j\right)$ est égal au degré de ce polynôme et $\text{codom}\left(\sum_{j=1}^s P_j\right)$ est égal au coefficient dominant de ce polynôme.
Si Q $non\ constant\ alors$ $\deg(P\circ Q)=\deg(Q)\times\deg(P)$.

- **Intégrité du produit polynomial**

Soit P et Q éléments de $K[X]$. $PQ=0\Leftrightarrow P=0$ ou $Q=0$.

- **Ensemble note $K_n[X]$**

Soit n un entier naturel. On note $K_n[X]$ l'ensemble des polynômes (à une indéterminée) à coefficient dans K et de degré inférieur ou égal à n .
Un polynôme de $K_n[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ i.e. comme combinaison linéaire des $X^k \ tq\ k \in [\![0,n]\!]$

- **Fonction polynomiale associée**

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X]$. Alors la fonction polynomiale associée à P est $\tilde{P}: K \to K$, telle que $\forall t \in K,\ \tilde{P}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$.
Soit $P, Q \in K[X]$ et $\lambda \in K$. $\widetilde{\lambda Q} = \lambda \tilde{Q}$ et $\widetilde{P+Q} = \tilde{P} + \tilde{Q}$ et $\widetilde{PQ} = \tilde{P}\tilde{Q}$ et $\widetilde{P \circ Q} = \tilde{P} \circ \tilde{Q}$.

II Polynômes dérivés

- **Définition des polynômes dérivés successifs.**

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. $P^{(1)} = P' = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} & \text{si deg } (P) \geq 1. \\ 0 \quad si\ \deg(P) \leq 0. (\ i.e. P\ est\ constant) \end{cases}$. $P^{(0)} = P$ et $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $P^{(j)} = \left(P^{(j-1)}\right)'$ est le polynôme dérivé $j^{ème}$ de P.

- **Opération sur les polynômes dérivés (dérivés d'une somme, produit, composée)**

- Soit $P, Q \in K[X]$ et $\lambda \in K. (\lambda Q)' = \lambda Q', (P + Q)' = P' + Q'$ et $(PQ)' = P'Q + PQ'$

Leibniz $(PQ)^{(N)} = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} P^{(j)} Q^{(N-j)}$

Composée particulière : $(P \circ (X + a))^{(N)} = P^{(j)}(X + a)$

Fonction polynomiale dérivée : $\tilde{P}' = \widetilde{P'}$.

- **Expression et degré des polynômes dérivés successifs.**

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. $\forall j \in \mathbb{N}$, $P^{(j)} = \begin{cases} \sum_{k=j}^{p} \frac{k!}{(k-j)!} a_k X^{k-j} & \text{si deg } (P) \geq \text{j.} \\ 0 \quad si\ \deg(P) < j. (\ i.e. P\ est\ constant) \end{cases}$ et $a_j = \frac{P^{(j)}(0)}{j!}$.

- **Formule de Taylor (existence et unicité du développement de Taylor en scalaire α).**

Si $P \in K_n[X]\ et\ \alpha \in K$ alors P s'écrit de **manière unique** comme combinaison linéaire des $(X - \alpha)^k\ tq\ k \in [\![0,n]\!]$ et l' écriture est
$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P^{(k)}}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$ (où $n \in \mathbb{N}\ et\ n \geq \deg(P)$).

III Divisibilité

- **Définition de « B divise A » ou B est un diviseur de A.**

Soit $A\ et\ B$ deux polynômes de $K[X]$. On dit que B divise A (dans $K[X]$) lorsqu' il existe un polynôme Q (de $K[X]$) tel que : $A = BQ$.

- **Définition d'un polynôme associé, d'un polynôme irréductible. Exemple des polynômes de degré 1.**
- **Théorème de la division euclidienne.**

Soit $A\ et\ B$ deux éléments $K[X]$ tels que $B \neq 0$. Alors il existe un unique polynôme Q et un unique polynôme R tels que : $A = BQ + R$ **et** $degR < degB$.

- **Caractérisation de « B divise A » par le reste de la division euclidienne de A par B.**

B divise A si et ssi le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

IV Racines d'un polynôme

- **Définition d'une racine. Théorème fondamental de caractérisation d'une racine(sans multiplicité) par factorisation.**

Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$. α est une racine de P (dans K) lorsque $\tilde{P}(\alpha) = 0$.

α est racine de P si et ssi $X - \alpha$ divise P.

- **Racines multiples : définition et caractérisation d'une racine multiple par les polynômes dérivés.**

Soit $P \in K[X]$, $\alpha \in K$ et $m \in \mathbb{N}$.
α est une racine de P **d'ordre de multiplicité (exactement) m** lorsqu'il existe $Q \in K[X]$ tq $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$ et $\tilde{Q}(\alpha) \neq 0$.
α est une racine de P **d'ordre de multiplicité au moins m** lorsqu'il existe $Q \in K[X]$ tq $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$.
α est une racine de P d'ordre de multiplicité **(exactement)** m **si et ssi** pour tout $k \in \{0, .., m-1\}, \widetilde{P^{(k)}}(\alpha) = 0\ et\ \widetilde{P^{(m)}}(\alpha) \neq 0$
α est une racine de P d'ordre de multiplicité **au moins** m **si et ssi** pour tout $k \in \{0, .., m-1\}, \widetilde{P^{(k)}}(\alpha) = 0$

- **Racines complexes d'un polynôme à coefficients réels**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]\ et\ \alpha \in \mathbb{C}\ et\ m \in \mathbb{N}$. α est racine de P d'ordre de multiplicité m sietssi $\bar{\alpha}$ est racine de P d'ordre de multiplicité m.
Conséquences :
Un polynôme à coefficients réels possède un nombre pair de racines complexes non réelles.

- **Relation entre le degré et le nombre de racines : nombre maximal de racines d'un polynôme non nul, caractérisation du polynôme nul par son nombre de racines.**

•Si P est un polynôme non nul alors le nombre de racines de P (distinctes ou comptées avec leur multiplicité) est inferieur ou égal à $\deg(P)$.
•Seul le polynôme nul a un nombre de racines (distinctes ou comptées avec leur multiplicité) strictement supérieur à son degré.

- **Obtention de la forme scindée d'un polynôme.**

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ des scalaires tous distincts, $\beta \in K^*, m_1, .., m_s$ des entiers naturels non nuls et P un polynôme non nul. Alors ,

$$\underbrace{P = \beta(X - \alpha_1)^{m_1}(X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_s)^{m_s}}_{forme\ scindée\ de\ P} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1, \dots, \alpha_s\ sont\ des\ racines\ distinctes\ de\ P\ d'ordre\ de\ multiplicités\ respectives\ au\ moins\ m_1, .., m_s \\ et\quad deg(P) = \sum_{k=1}^{s} m_k \quad et\ \beta = codom(P) \end{cases}$$

Dans ce cas, P n'a pas d'autres racines et $m_1, .., m_s$ sont les multiplicités exactes de $\alpha_1, \dots, \alpha_s\ dans\ P$.

- **Relation coefficients-Racines**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $n = \deg(P) \geq 1\ et\ P = a_n(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
Alors $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}_{\substack{somme\ des\ racines \\ de\ P\ pas\ forcément\ disctinctes}} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}\ et\ \underbrace{\prod_{k=1}^{n} \alpha_k}_{\substack{produit\ des\ racines \\ de\ P}} = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

V Factorisation en produit de facteurs irréductibles

1. Dans ℂ[X]

- **Théorème de d'Alembert-Gauss**

Tout polynôme non constant de ℂ[X] admet au moins une racine complexe.

- **Polynômes irréductibles dans ℂ[X]**

Les polynômes irréductibles de ℂ[X] sont les polynômes de degré 1.

- **Factorisation en produit de polynômes irréductibles dans ℂ[X]**

Tout polynôme non constant de ℂ[X] est scindé dans ℂ[X], admet un nombre de racines comptées avec leur multiplicité égale à son degré.

- **Critère de divisibilité.**

Soit $A\ et\ B$ deux polynômes tq B non nul.
B divise A **<u>si et ssi</u>** les racines complexes de B sont racines de A avec une multiplicité dans A supérieure ou égale à celle dans B .

2. Dans ℝ[X]

- **Polynômes irréductibles dans ℝ[X]**

Les polynômes irréductibles de ℝ[X] sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré deux à discriminant strictement négatif

- **Factorisation en produit de polynômes irréductibles dans ℝ[X]**

Tout polynôme non constant de ℝ[X] s'écrit de manière unique sous la forme

$$P = codom(P)\underbrace{\left[\underbrace{\prod_{k=1}^{s}(X-\alpha_k)^{m_k}}_{\substack{facteurs\ avec\ les\ \ racines\ réelles\\ de\ P}}\right]}_{\substack{n'existe\ pas\ si\ P\ n'a\ pas\ de\\ racines\ réelles}}\underbrace{\left[\underbrace{\prod_{k=1}^{r}(X^2+b_kX+c_k)^{p_k}}_{\substack{facteurs\ avec\ les\ racines\\ complexes\ conjuguées\\ de\ P}}\right]}_{\substack{n'existe\ pas\ si\ P\ n'a\ que\ de\\ racines\ réelles}}$$ avec $\forall k, \alpha_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}, m_k \in \mathbb{N}^*, p_k \in \mathbb{N}^*$ pour tout $k \in \{1, \dots, r\}, {b_k}^2 - 4c_k < 0$

csqTout polynôme de degré impair et à coefficients réels a au moins une racine réelle.

BILAN :
Le polynôme nul est le seul polynôme dont tous les coefficients sont nuls
Le polynôme nul est le seul polynôme qui a strictement plus de racines que son degré.
Le polynôme nul est le seul polynôme qui a une infinité de racines.
Deux polynômes sont égaux <u>sietssi</u> ils ont les mêmes coefficients.
<u>sietssi</u> ils ont les mêmes racines complexes avec la même multiplicité et le même coefficient dominant.
<u>sietssi</u> leur différence a strictement plus de racines que son degré.

Soit $A\ et\ B$ deux polynômes de $K[X]$ tq B non constant.
B divise A **<u>si et ssi</u>** il existe $Q \in K[X]$ tel que $A = BQ$
<u>si et ssi</u> le reste de la division euclidienne de $A\ par\ B$ est nul
<u>si et ssi</u> chaque racine complexe de B est racine de A avec une multiplicité dans A supérieure ou égale à celle dans B.

Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus.
Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaitre :
Q1: théorème fondamental de l'intégration
Q2 : inégalité et égalité de la moyenne
Q3: caractérisation d'une racine (sans multiplicité) par factorisation
Q4 : caractérisation d'une racine multiple par les polynômes dérivés
Q5 : racine complexe non réelle d'un polynôme à coefficients réels.