

CORRIGE DL 10

EXERCICE 3 Fonctions convexes, sommes de Riemann et intégrales

A. Une nouvelle inégalité de convexité.

1. Soit φ une fonction convexe sur un intervalle ouvert I .

1.1 Rappel sans démonstration la propriété de continuité vérifiées par φ .

1.2 Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $H(n)$: "pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$, $\varphi\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) \leq \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\dots+\varphi(x_n)}{n}$ ".

(indication : on remarquera que $\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n+1}}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\dots+x_n)\right] + \frac{x_{n+1}}{n+1}$

2. Soit f une fonction continue sur un intervalle J tel que $f(J) \subset I$. Soit $(a, b) \in J^2$ tel que $a < b$.

2.1 Déterminer la limite de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$ et justifier que cette limite appartient à I .

2.2 Déterminer la limite de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right)$.

2.3 Dédurre de tout ce qui précède que $\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt$ (indication : on choisira judicieusement x_k).

2.4 Enoncer un résultat analogue au 2.2 dans le cas où φ est une fonction concave sur I .

1.1 φ étant une fonction convexe sur un intervalle ouvert I , φ est continue en tout point intérieur à I donc en tout point de I puisque I est ouvert.

1.2 Soit $H(n)$ la propriété : pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$, $\varphi\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) \leq \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\dots+\varphi(x_n)}{n}$.

Initialisation : $H(1)$ est vraie car pour tout $x_1 \in I$, $\varphi\left(\frac{x_1}{1}\right) = \varphi(x_1) = \frac{\varphi(x_1)}{1} \leq \frac{\varphi(x_1)}{1}$.

Propagation : Soit n un entier naturel non nul. Je suppose que $H(n)$ est vraie. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in I^{n+1}$. Montrons que

$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n+1}}{n+1}\right) \leq \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\dots+\varphi(x_{n+1})}{n+1}.$$

Je remarque que $\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n+1}}{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right) \left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\dots+x_n)\right] + \frac{x_{n+1}}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\dots+x_n)\right] + \frac{x_{n+1}}{n+1}$. Donc,

$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n+1}}{n+1}\right) = \varphi\left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\dots+x_n)\right] + \frac{x_{n+1}}{n+1}\right].$$

Comme φ est convexe et $t = \frac{1}{n+1} \in [0, 1]$ et $a_{n+1} \in I$ et $\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\dots+x_n) \in I$ (car $\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\dots+x_n)$ est la moyenne des $x_1, x_2, \dots, x_n$, éléments de I , donc se trouve entre le $\max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et le $\min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ donc dans I),

$$\varphi\left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\dots+x_n)\right] + \frac{x_{n+1}}{n+1}\right] \leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \varphi\left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\dots+x_n)\right] + \frac{1}{n+1} \varphi(x_{n+1}).$$

$$\varphi\left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\dots+x_n)\right] \leq \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\dots+\varphi(x_n)}{n}.$$

$$\text{Donc } 1 - \frac{1}{n+1} \varphi\left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\dots+x_n)\right] \leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\dots+\varphi(x_n)}{n} = \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\dots+\varphi(x_n)}{n+1}.$$

$$\text{Et ainsi, } \varphi\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n+1}}{n+1}\right) \leq \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\dots+\varphi(x_n)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \varphi(x_{n+1}) = \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\dots+\varphi(x_{n+1})}{n+1}. \text{ OK !!!}$$

J'en conclus que $\forall n \geq 1, H(n)$ est vraie.

2.1 f est continue sur l'intervalle J donc sur $[a, b]$. Alors le théorème des sommes de Riemann assure que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt. \text{ Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

f étant continue sur J , $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \in [\min_J f, \max_J f]$ d'après le théorème de la moyenne. Or, il existe $c \in J$ tel que $f(c) = \min_J f$. Comme $f(J) \subset I$, $\min_J f = f(c) \in I$. De même, $\max_J f \in I$. Comme I est un intervalle, je peux alors affirmer que $[\min_J f, \max_J f] \subset I$. J'en déduis que $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \in I$.

2.2 f est continue sur l'intervalle J et φ est continue sur l'intervalle I et $f(J) \subset I$ donc $\varphi \circ f$ est continue sur J donc sur $[a, b]$. Alors le

théorème des sommes de Riemann assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) = \int_a^b \varphi(f(t)) dt$.

$$\text{Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(t)) dt.$$

2.3 Posons $\forall k \in [1, n], a_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ et $x_k = f(a_k)$.

Alors, $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des éléments de J . Donc, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des éléments de I .

$$\text{Alors d'après 1., } \varphi\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) \leq \frac{\varphi(x_1)+\dots+\varphi(x_n)}{n} \text{ i.e. } \varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \stackrel{(**)}{\leq} \frac{\sum_{k=1}^n \varphi\left(f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right)}{n}.$$

$$\text{Comme } \varphi \text{ est continue sur } I, \varphi \text{ est continue en } \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \text{ et par conséquent, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) = \varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right).$$

$$\text{Alors, par passage à la limite dans l'inégalité (**), je peux conclure que } \varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt.$$

$$2.4 \text{ Si } \varphi \text{ est concave sur } I \text{ et } f \text{ est continue sur } J \text{ et } f(J) \subset I \text{ alors } \varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt.$$

PROBLEME 1 Encore du Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in [0, 1[$, $f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

1. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Justifier que f_n est bien définie sur $[0, 1[$.

b) Calculer f_0 et sa limite I_0 en 1^- .

c) Montrer que la fonction f_n est majorée par I_0 .

d) En déduire l'existence de la limite I_n de f_n en 1^- .

3. a) Montrer que la suite (I_n) est monotone et convergente.

b) Trouver une relation entre f_n et f_{n-2} pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

c) En déduire la relation $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ valable pour tout entier naturel $n \geq 2$.

d) Montrer que (nI_n) est une suite constante et déterminer cette constante.

e) Montrer que $I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

f) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$ par deux méthodes.

1a) Ici n est fixé. Posons $g_n(t) = \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}$. g_n est continue sur l'intervalle $[0, 1[$ donc d'après le cours, f_n est la primitive de g_n sur $[0, 1[$ qui s'annule en 0. Ainsi, f_n est définie et dérivable donc continue sur $[0, 1[$ et $f'_n = g_n$ sur $[0, 1[$.

1b) $\forall x \in [0, 1[, f_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \text{Arcsin}(x)$. Donc, $I_0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_0(x) = \frac{\pi}{2}$.

1c) Soit $x \in [0, 1[$. $\forall t \in [0, x], 0 \leq \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Donc, par croissance de l'opérateur intégral, $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$. Donc, $0 \leq f_n(x) \leq \text{Arcsin}(x) \leq \frac{\pi}{2}$. Ainsi, la fonction f_n est majorée par I_0 .

1d) $\forall t \in [0, 1[, f'_n(t) = g_n(t) \geq 0$ et $f'_n(t)$ ne s'annule qu'en 0. Donc, f_n est strictement croissante sur $[0, 1[$. Alors le théorème de limite d'une fonction monotone, f_n a une limite I_n en 1^- finie ou infinie. Comme f_n est majorée, cette limite I_n est finie.

2a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x)$ et $I_{n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_{n+1}(x)$.

$\forall x \in [0, 1[, \forall t \in [0, x], t \in [0, 1]$ donc, $0 \leq t^{n+1} \leq t^n$ et $0 \leq \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}$; alors, $0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$

J'en déduis que : $\forall x \in [0, 1[, 0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \leq \frac{\pi}{2}$. Donc, par passage à la limite quand $x \rightarrow 1^-$,

$0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{\pi}{2}$. La suite (I_n) est donc décroissante et minorée donc convergente.

2b) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

$\forall x \in [0, 1[, f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt = - \int_0^x t^{n-1} \frac{1}{2} \frac{(-2t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = - \left\{ [t^{n-1} \sqrt{1-t^2}]_0^x - \int_0^x (n-1)t^{n-2} \sqrt{1-t^2} dt \right\}$

$f_n(x) = x^{n-1} \sqrt{1-x^2} + (n-1) \int_0^x \frac{t^{n-2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = x^{n-1} \sqrt{1-x^2} + (n-1) \int_0^x \frac{t^{n-2}}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$

$f_n(x) = x^{n-1} \sqrt{1-x^2} + (n-1)[f_{n-2}(x) - f_n(x)]$

Ainsi, $\forall x \in [0, 1[, n f_n(x) = x^{n-1} \sqrt{1-x^2} + (n-1) f_{n-2}(x)$.

2c) Donc, par passage à la limite quand $x \rightarrow 1^-$, $n I_n = 0 + (n-1) I_{n-2}$. Ainsi, $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$.

2d) **1^{ère} méthode** : Effectuons une récurrence double pour prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = W_n$.

$I_0 = W_0$.

$\forall x \in [0, 1[, f_1(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = - \int_0^x \frac{1}{2} \frac{(-2t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = - [\sqrt{1-t^2}]_0^x = 1 - \sqrt{1-x^2}$. Donc, $I_1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x) = 1 = W_1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Je suppose que $W_n = I_n$ et $W_{n+1} = I_{n+1}$. Alors, $I_{n+2} = \frac{(n+1)}{n+2} I_n = \frac{(n+1)}{n+2} W_n = W_{n+2}$.

CCL : le théorème de récurrence double assure alors que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = W_n$.

2^{ème} méthode : Effectuons un changement de variable

$\forall x \in [0, 1[, f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt \stackrel{\substack{\text{CV} \\ t \in [0, x] \subset [0, 1] \\ t = \sin(u) \\ u = \text{Arcsin}(t) \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt}}{=} \int_0^{\text{Arcsin}(x)} \sin^n(u) du \stackrel{\substack{F \text{ étant} \\ \text{une primitive} \\ \text{de } (u \mapsto \sin^n(u)) \\ \text{sur } [0, \frac{\pi}{2}]}{=} F(\text{Arcsin}(x)) - F(0).$

Donc, $I_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u) du$.

PROBLEME 2 Méthode des trapèzes d'approximation d'une intégrale

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$.

A. Justifier que $M = \sup_{[a, b]} |f''|$ existe et est finie.

B. Soit u et v deux réels de $[a, b]$ tels que $u < v$. (Cf fig1)

1. Donner l'expression de la fonction $g: [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ dont la courbe est le segment d'extrémités $A(u, f(u))$ et $A'(v, f(v))$.

2. Soit $x \in [u, v]$. On pose $h(t) = f(t) - g(t) + K(t-u)(t-v)$ où K est une constante.

2.1 Choisissez K de sorte qu'il existe $\alpha \in]u, x[$ et $\beta \in]x, v[$ tel que : $h'(\alpha) = 0 = h'(\beta)$.

2.2 En déduire qu'il existe $c_x \in]u, v[$ tel que : $f(x) - g(x) = f''(c_x) \frac{(x-u)(x-v)}{2}$.

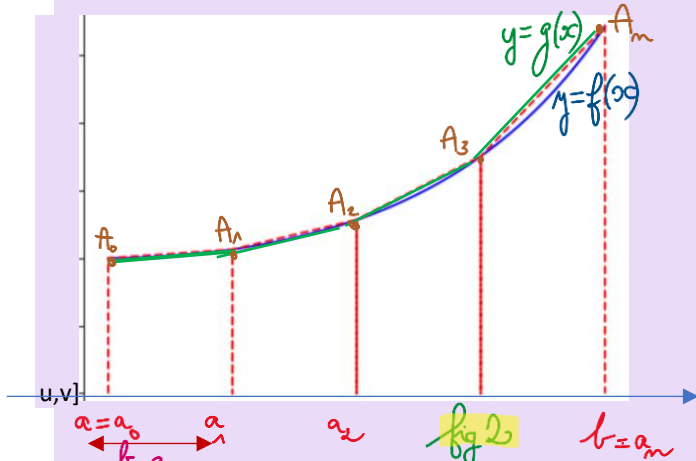
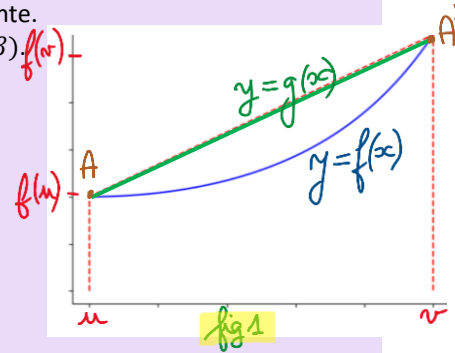
2.3 Montrer que $\forall x \in [u, v], |f(x) - g(x)| \leq M \frac{(x-u)(v-x)}{2}$.

C. On pose $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ et $A_k(u_k, f(u_k))$ point de C_f . On définit (Cf fig2)

la fonction $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dont la courbe est la ligne brisée qui relie les points $A_0, A_1, \dots, A_n$.

3. Montrer que $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2} dx$.

4. En déduire que $\left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$.



D. Prenons la fonction $f: (x \mapsto e^{x^2})$. Calculer avec Python une valeur approchée de l'intégrale de f sur $[0, 1]$ à la précision 0,01 en utilisant la méthode des trapèzes.

A. f'' est continue sur le segment $[a, b]$ donc $|f''|$ est continue sur le segment $[a, b]$. Par conséquent, $|f''|$ est bornée et atteint ses bornes sur ce segment. Ainsi, $M = \sup_{[a,b]} |f''| = \max_{[a,b]} |f''|$ existe et est fini.

B. 1. $\forall t \in [u, v], g(t) = \frac{f(u)-f(v)}{u-v} (t-u) + f(u) = \frac{f(u)-f(v)}{u-v} t + f(u) - u \frac{f(u)-f(v)}{u-v}$

2.1 Soit $x \in [u, v]$. On pose $h(t) = f(t) - g(t) + K(t-u)(t-v)$ où K est une constante.

h est de classe C^2 sur $[u, v]$ car f et g et $(t \mapsto (t-u)(t-v))$ le sont. De plus, $h(u) = 0 = h(v)$. Choisissons K de sorte que $h(x) = 0$. Prenons donc $K = \frac{g(x)-f(x)}{(x-u)(x-v)}$.

Alors le théorème de Rolle s'applique entre u et x et entre x et v . Il existe donc $\alpha \in]u, x[$ et $\beta \in]x, v[$ tq $h'(\alpha) = 0 = h'(\beta)$.

2.2 Comme h' est de classe C^1 sur $[u, v]$ donc sur $[\alpha, \beta]$ et $h'(\alpha) = 0 = h'(\beta)$, le théorème de Rolle qu'il existe $c_x \in]\alpha, \beta[$ tel

que $h''(c_x) = 0$. Or, $\forall t \in [u, v], h''(t) = f''(t) - g''(t) + 2K \stackrel{\text{car } g''=0}{=} f''(t) + 2K$ Donc, $f''(c_x) = -2K = -2 \frac{g(x)-f(x)}{(x-u)(x-v)}$.

Ainsi, $f(x) - g(x) = f''(c_x) \frac{(x-u)(x-v)}{2}$.

2.3 $\forall x \in [u, v]$,

$$|f(x) - g(x)| = \left| f''(c_x) \frac{(x-u)(x-v)}{2} \right| = \frac{|f''(c_x)|}{2} |x-u||x-v| = |f''(c_x)| \frac{(x-u)(v-x)}{2}$$

car $\forall t \in [u, v], |f''(t)| \leq M$
 $\frac{(x-u)(v-x)}{2} \geq 0$
 $\stackrel{M}{\leq} M \frac{(x-u)(v-x)}{2}$

C. On pose $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ et $A_k(u_k, f(u_k))$ point de C_f . On définit

la fonction $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dont la courbe est la ligne brisée qui relie les points $A_0, A_1, \dots, A_n$.

3. $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} |f(x) - g(x)| dx$. Or, $\forall x \in [u_k, u_{k+1}], |f(x) - g(x)| \leq M \frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2}$. Donc par croissance de l'opérateur intégral sur $[u_k, u_{k+1}]$,

$$\int_{u_k}^{u_{k+1}} |f(x) - g(x)| dx \leq \int_{u_k}^{u_{k+1}} M \frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2} dx = M \int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2} dx$$

$$\text{Alors, } \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} |f(x) - g(x)| dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} M \int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2} dx = M \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2} dx.$$

4. Alors $\left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2} dx$.

inégalité
triangulaire
intégrale

$$\text{Or, } \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{-x^2 + (u_{k+1}+u_k)x - u_k u_{k+1}}{2} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{(u_{k+1}+u_k)x^2}{2} - u_k u_{k+1} x \right]_{u_k}^{u_{k+1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left[\frac{-u_{k+1}^3}{3} + \frac{(u_{k+1}+u_k)u_{k+1}^2}{2} - u_k u_{k+1}^2 + \frac{u_k^3}{3} - \frac{(u_{k+1}+u_k)u_k^2}{2} + u_k^2 u_{k+1} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left[\frac{u_k^3 - u_{k+1}^3}{3} + \frac{(u_{k+1}+u_k)(u_{k+1}^2 - u_k^2)}{2} + (u_k - u_{k+1})u_k u_{k+1} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left[\frac{(u_k - u_{k+1})(u_k^2 + u_k u_{k+1} + u_{k+1}^2)}{3} - \frac{(u_{k+1}+u_k)^2(u_k - u_{k+1})}{2} + (u_k - u_{k+1})u_k u_{k+1} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(u_k - u_{k+1})}{2} \left[\frac{(u_k^2 + u_k u_{k+1} + u_{k+1}^2)}{3} - \frac{(u_{k+1}+u_k)^2}{2} + u_k u_{k+1} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(u_k - u_{k+1})}{2} \left[-\frac{u_k^2 + u_{k+1}^2 - 2u_k u_{k+1}}{6} \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(u_k - u_{k+1})}{12} [-(u_k - u_{k+1})^2] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(u_{k+1} - u_k)^3}{12} = \\
&\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^3}{12} = \frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{(b-a)^3}{12n^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, Alors $\left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$

D.f: $(x \mapsto e^{x^2})$ est de classe C^2 sur $[0,1]$. Et $\forall x \in [0,1], |f''(x)| = (2 + 4x^2)e^{x^2} \leq 6e$. Donc, en définissant g comme ci dessus, $\left| \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx \right| = \left| \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx \right| \leq \frac{6e}{12n^2}$. Pour que $\int_0^1 g(x) dx$ soit une valeur approchée de $\int_0^1 f(x) dx$ à 10^{-2} près, il suffit de choisir n tel que $\frac{6e}{12n^2} \leq 10^{-2}$ i.e. $n \geq \sqrt{50e}$. Alors $n = 12$ convient. Calculons alors grâce à Python, $\int_0^1 g(x) dx$ lorsque $n = 1360$. L'aire d'un trapèze T rectangle est $(h + H) * \frac{b}{2}$ où

$$\text{Donc } \int_{u_k}^{u_{k+1}} g(x) dx = (f(u_{k+1}) + f(u_k)) \frac{b-a}{2n} = \frac{e^{\frac{(k+1)^2}{12^2}} + e^{\frac{k^2}{12^2}}}{24}.$$

$$\text{Donc } \int_0^1 g(x) dx = \sum_{k=0}^{36} \frac{e^{\frac{(k+1)^2}{12^2}} + e^{\frac{k^2}{12^2}}}{24}.$$

Programme

```

1  from math import *
2  s=0
3  for k in range (0,12) :
4      s=s+(exp(((k+1)**2)/(144))+exp((k**2)/144))/24
5  print(s)

```

