DS 4

CALCULATRICE NON AUTORISEE. DUREE 4 HEURES.

Le sujet comporte 2 pages (1 feuille recto-verso). Les 3 exercices sont indépendants. Quelques consignes :

- Bien lire tout le sujet avant de commencer. Traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
- Justifier toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et s'assurer que :

•Vous n'avez pas d'emblée affirmé que la propriété à démontrer est vraie (sans justifier). Posez - vous les bonnes questions : je sais que ? ou je cherche quand ou qui ?

•Le raisonnement est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire (en maths comme en français).

•Les liens logiques (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, …, ⟺,⟹) sont utilisés et utilisés à bon escient.

•La phrase réponse, attendue et soulignée (ou encadrée ou surlignée) répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute sur l'énoncé (erreur d'énoncé ??), n'hésitez pas à le partager avec le professeur-surveillant.

Exercice 1 Une suite récurrente.

Soit u la suite définie par : $u_0 \in [1,2]$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

1. Montrer que u est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{2}$. On rappelle que $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.
2. Etudier la monotonie de u et déterminer la limite de u.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{\left|u_n - \sqrt{2}\right|^2}{2}$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$. Retrouver alors la limite de u.
5. Donner une valeur approchée rationnelle à 10^{-100} près de $\sqrt{2}$.

Exercice 2 Equation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et l'équation différentielle (E): $x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0$. On cherche à résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que $b = 0$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ (suivant les valeurs de a).
2. Soit $y : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   a. Supposons que y soit solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, y$ est de classe C^n sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   b. Supposons que y soit solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$,
   $$x^2y^{(n+2)}(x) + (2n+a)xy^{(n+1)}(x) + (n^2 + (a-1)n + b)y^{(n)}(x) = 0.$$
   c. On définit l'application $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(e^t)$.
   Montrer que : y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ sietssi $\forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + (a-1)z'(t) + bz(t) = 0$.
3. Etude de deux cas particuliers :
   a. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ quand $a = 3$ *et* $b = 1$.
   b. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ quand $a = 1$ *et* $b = 4$.

Exercice 3 Une fonction à paramètre

Soit a un réel et f_a: $\left(x \mapsto \frac{1 - ax + x^2}{\sqrt{1+x^2}} e^{Arctan(x)}\right)$.

1. a. Justifier que f_a est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que $f_a(x) = 1 + (1-a)x + (1-a)x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$ (détailler et justifier vos calculs !!!).
   c. En déduire l'équation de la tangente à C_{f_a} en 0 et étudier, suivant les valeurs de a, la position, au voisinage de 0, de la courbe C_{f_a} par rapport à cette tangente.
2. a. Déterminer un équivalent simple de f_a au voisinage de $+\infty$. Faire de même en $-\infty$.
   b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f_a(x) = e^{\frac{\pi}{2}} x\, f_{-a}\left(-\frac{1}{x}\right)$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, f_a(x) = -e^{-\frac{\pi}{2}} x\, f_{-a}\left(-\frac{1}{x}\right)$.
   c. En déduire que C_{f_a} a deux asymptotes obliques l'une en $+\infty$ et l'autre en $-\infty$ dont on donnera les équations et étudier, uniquement en $+\infty$ et suivant les valeurs de a, la position de C_{f_a} par rapport à son asymptote en $+\infty$
   d. Vérifier que ces deux asymptotes se coupent orthogonalement sur (Ox).

Exercice 4 Un développement limité et une suite implicite

A. ETUDE D'UNE SUITE

1. Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$. Montrer que l'équation $x = nln(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$ admet une unique solution notée u_n et justifier que $u_n \in]0,2[$.
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
3. Montrer que la suite (u_n) converge vers 1 .

B. Etude de Φ

On pose $\forall t \in]-1,+\infty[, \Phi(t) = \frac{\ln(1+t)}{1+t}$.

4. Déterminer un équivalent simple de Φ en $+\infty$. En déduire la limite de Φ en $+\infty$.
5. Justifier que Φ admet un développement limité à tout ordre s au voisinage de 0 .

On note $\Phi(t) = \underbrace{\sum_{j=0}^{s} c_j t^j}_{=P_s(t)} + o_0(t^s)$ le développement limité d'ordre s au voisinage de 0 et $P_s(t) = \sum_{j=0}^{s} c_j t^j$.

6. Calculer c_0, c_1, c_2, c_3.
7. Compléter la phrase suivante : $\Phi(t)$ est le produit de deux fonctions $f(t) =$................ et $g(t) =$................dont on connait les $DL_s(0)$; $P_s(t)$ est donc obtenu en effectuant le produit des parties polynomiales $Q_s(t)$ et $R_s(t)$ des $DL_s(0)$ de respectivement $f(t)$ et $g(t)$ et en ne gardant que les termes de degré ....
   On a : $Q_s(t) =$...et $R_s(t) =$... .
8. En déduire que $\forall j \in \mathbb{N}^*, c_j = (-1)^{j+1} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k}$.
9. Montrer que pour tout entier p strictement positif , $\ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$ en utilisant une inégalité classique.
10. En déduire que la suite $(c_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ diverge sans limite.

C. DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE (u_n)

11. Montrer que Φ induit une bijection de $]-1, e-1[$ sur un domaine à déterminer . On note ψ la bijection réciproque . Dresser le tableau des variations de ψ et préciser ses limites aux extrémités de son intervalle de définition.
12. Justifier que ψ admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 et déterminer ce développement limité .
13. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 1$. Exprimer v_n à l'aide de ψ *et* n.
14. En déduire qu'il existe trois réels A , B , C que l'on déterminera , tels que $u_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 5 Une équation fonctionnelle

On note E l'ensemble de toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2.$$

1. Montrer que E est non vide.
2. Montrer que $f \in E \Leftrightarrow (-f) \in E$.
3. Soit $f \in E$.
   a. Trouver les valeurs possibles de $f(0)$.
   b. Montrer que : $f(0) = 0 \Longrightarrow f = 0$. On suppose désormais que $f(0) \neq 0$.
   c. Imaginons un instant que: $\exists x_0 \in \mathbb{R} / f(x_0) = 0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 0$ et aboutir à une contradiction. Qu'en conclut-on sur f ?
   d. En déduire que f est de signe constant. On suppose désormais que $\forall x, f(x) > 0$.
4. On pose $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \ln(f(x))$.
   a. Montrer que $g(0) = 0$, g est paire et continue sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, g(nx) = n^2 g(x)$.
   c. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, g(nx) = n^2 g(x)$.
   d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} g(1)$.
   e. En déduire que $\forall r \in \mathbb{Q}, g(r) = r^2 g(1)$.
   f. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x^2 g(1)$.
5. Déterminer tous les éléments de E.

Fin