CORRIGE DS 4

Une suite récurrente.

Soit u la suite définie par : $u_0 \in [1,2]\ et\ \ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

1. Montrer que u est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{2}$. On rappelle que $\sqrt{2} \approx 1{,}41$
2. Etudier la monotonie de u et déterminer sa limite.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{\left|u_n - \sqrt{2}\right|^2}{2}$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$.
5. Retrouver la limite de u.
6. Donner une valeur approchée rationnelle à 10^{-100} près de $\sqrt{2}$.

1. Posons $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. Alors f est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$et $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2x^2}$. D'où le tableau :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Nous en déduisons que $f(\mathbb{R}^{+*}) \subset [\sqrt{2}, +\infty[$ et donc $f([\sqrt{2}, +\infty$

$\forall n \geq 1, u_n \in [\sqrt{2}, +\infty[$.

2. Alors, comme f est croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, la suite (u_n) est monotone à partir du rang 1.

De plus, $u_2 - u_1 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{2}{u_1}\right) - u_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{u_1} - u_1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2 - u_1^2}{u_1}\right) \leq 0$ car $u_1 \geq \sqrt{2}$. J'en déduis que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. Comme $(u_n)_{n\geq 1}$est minorée par $\sqrt{2}$, $(u_n)_{n\geq 1}$est convergente de limite $L \in [\sqrt{2}, +\infty[$. Comme f est continue sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, L vérifie $f(L) = L$ i.e. $\frac{1}{2}\left(L + \frac{2}{L}\right) = L$ et par suite, $L^2 = 2$ et ainsi, $L = \sqrt{2}$ (puisque $L \geq \sqrt{2}$).

3. Soit n entier naturel.

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\left(\frac{u_n^2 - \sqrt{2}u_n + 2}{u_n}\right)\right| = \left|\frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{2})^2\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{u_n}\right|(u_n - \sqrt{2})^2 \underset{\substack{car\ u_n \leq 1 \\ donc \frac{1}{u_n} \leq 1}}{\leq} \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})^2.$$

4. Récurrence : $\left|u_0 - \sqrt{2}\right| \leq 1 = \frac{1}{2^{2^0 - 1}}$.

Soit n un entier naturel. Supposons que $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$.

Alors $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2^n - 1}}\right)^2 = \frac{1}{2^{2\times 2^n - 1}} = \frac{1}{2^{2^{n+1} - 1}}$.

Je conclus par le théorème de récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$.

5. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{2^n - 1}} = 0$. J'en déduis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

6. Tout d'abord, $\forall r \in \mathbb{Q}^{+*}, f(r) \in \mathbb{Q}^{+*}$. Prenons $u_0 = 1 \in \mathbb{Q}^{+*}$. Alors $\forall n, u_n \in \mathbb{Q}^{+*}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$.

Donc, u_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à la précision $\frac{1}{2^{2^n - 1}}$. Cherchons n de sorte que : $\frac{1}{2^{2^n - 1}} \leq 10^{-100}$.

$$\frac{1}{2^{2^n - 1}} \leq 10^{-100} \Leftrightarrow (2^n - 1) \times \ln(2) \geq 100 \times \ln(10) \Leftrightarrow 2^n \geq 1 + \frac{100 \times \ln(10)}{\ln(2)} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{\ln(2) + 100\times\ln(10)}{\ln(2)}\right)}{\ln(2)}.$$

Posons $n_0 = \left\lfloor \frac{\ln\left(1 + \frac{100\times\ln(10)}{\ln(2)}\right)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1 = 9$. Alors $u_{n_0} = u_9$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à la précision 10^{-100}.

```python
from math import*
u=1
n=0
while 2**((2**n)-1)<(10**100):
  u=(u+2/u)/2
  n=n+1
print(u,' est une valeur approchée de racine de 2 à la précision souhaitée et est atteint par le terme de rang',n)
```

```
1.414213562373095  est une valeur approchée de racine de 2 à la précision souhaitée et est atteint
par le terme de rang 9
```

Equations différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2\ et$ l'équation différentielle (E): $x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0$.

On veut résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que $b = 0$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ (suivant les valeurs de a).

Alors $(E) : x^2y''(x) + axy'(x) = 0$. Soit $y : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

y est solution de (E)sur $\mathbb{R}^{+*}$ sietssi $\forall x > 0, (y')'(x) + \frac{a}{x}y'(x) = 0$ sietssi $\exists k \in \mathbb{R} / \forall x > 0, y'^{(x)} = kx^{-a}$.

<u>1er cas : $a \neq 1$</u>. y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ sietssi $\exists (k, m) \in \mathbb{R}^2 / \forall x > 0, y(x) = \frac{k}{1-a}x^{1-a} + m$

sietssi $\exists (K, m) \in \mathbb{R}^2 / \forall x > 0, y(x) = Kx^{1-a} + m$

$\underline{1er\ cas : a = 1.}$

y est solution de (E)sur $\mathbb{R}^{+*}$ sietssi $\exists(k,m) \in \mathbb{R}^2/\forall x > 0, y(x) = kln(x) + m$.

2. Soit $y : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

a. Montrer que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$alors y est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0, x^2y^{(n+2)}(x) + (2n+a)xy^{(n+1)}(x) + (n^2 + (a-1)n + b)y^{(n)}(x) = 0$.

Montrons par récurrence sur n la propriété $H(n)$: « y est de classe C^{n+2} sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0, x^2y^{(n+2)}(x) + (2n+a)xy^{(n+1)}(x) + (n^2 + (a-1)n + b)y^{(n)}(x) = 0$ ».

Init : y est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0, x^2y^{(2)}(x) + axy^{(n+1)}(x) + \text{b}y^{(n)}(x) = 0$ donc $H(0)$ est vraie.

Propagation : Soit n un entier naturel. Supposons $H(n)$ vraie : y est de classe C^{n+2} sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\left[\forall x > 0, x^2y^{(n+2)}(x) + (2n+a)xy^{(n+1)}(x) + (n^2 + (a-1)n + b)y^{(n)}(x) = 0\right]^{**}$. Alors, $\forall x > 0, y^{(n+2)}(x) = -\frac{(2n+a)}{x}y^{(n+1)}(x) - \frac{(n^2+(a-1)n+b)}{x^2}y^{(n)}(x)$. Comme y est de classe C^{n+2} sur $\mathbb{R}^{+*}$, $y^{(n+1)}\ et\ y^{(n)}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)\ et\ \left(x \mapsto \frac{1}{x^2}\right)$ sont aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, $y^{(n+2)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$. J'en déduis que y est de classe C^{n+3} sur $\mathbb{R}^{+*}$. Alors, nous pouvons dériver $(**)$ et nous obtenons :

$$\forall x > 0, x^2y^{(n+3)}(x) + 2xy^{(n+2)}(x) + (2n+a)xy^{(n+2)}(x) + (2n+a)y^{(n+1)}(x) + (n^2 + (a-1)n + b)y^{(n+1)}(x) = 0$$

i.e. $\forall x > 0, x^2y^{(n+3)}(x) + (2(n+1)+a)xy^{(n+2)}(x) + (n^2 + (a+1)n + a + b)y^{(n+1)}(x) = 0$.

Or, $(n+1)^2 + (a-1)(n+1) + b = n^2 + 2n + 1 + an - n + a - 1 + b = n^2 + (a+1)n + a + b$. Ainsi,

$\forall x > 0, x^2y^{(n+3)}(x) + (2(n+1)+a)xy^{(n+2)}(x) + ((n+1)^2 + (a-1)(n+1) + b)y^{(n+1)}(x) = 0$. Donc $H(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier n, H(n) est vraie d'après le théorème de récurrence.

b. Soit l'application $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(e^t)$.Montrer que :

y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ **sietssi** z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

$\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(e^t)$ donc z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z'(t) = e^ty'(e^t)$ et $z''(t) = e^{2t}y''^{(e^t)} + e^ty'(e^t)$.

Alors, $\forall x > 0, x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, e^{2t}y''(e^t) + ae^ty'(e^t) + by(e^t) = 0$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, e^{2t}y''(e^t) + e^ty'(e^t) + (a-1)e^ty'(e^t) + by(e^t) = 0$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + (a-1)z'(t) + bz(t) = 0$ edl2 à coefficients constants.

c. Etude de deux cas particuliers :

a) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ quand $a = 3\ et\ b = 1$.

Soit $y : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ *et* l'application $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(e^t)$.

Alors, $\forall x > 0, x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + 2z'(t) + z(t) = 0$

$\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2/\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = (\alpha t + \beta)e^{-t}$

$\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2/\forall x > 0, y(x) = z(\ln(x)) = (\alpha\ln(x) + \beta)e^{-\ln(x)} = \frac{\alpha\ln(x)+\beta}{x}$.

Ainsi, $Sol(E) = \{\left(x \mapsto \frac{\alpha\ln(x)+\beta}{x}\right)/\alpha,\beta$ constantes réelles$\}$

b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ quand $a = 1\ et\ b = 4$.

Soit $y : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ *et* l'application $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(e^t)$.

Alors, $\forall x > 0, x^2y''(x) + xy'(x) + 4y(x) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + 4z(t) = 0$

$\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2/\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = \alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t)$

$\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2/\forall x > 0, y(x) = z(\ln(x)) = \alpha\cos(2\ln(x)) + \beta\sin(2\ln(x))$.

Ainsi, $Sol(E) = \{(x \mapsto \alpha\cos(2\ln(x)) + \beta\sin(2\ln(x)))/\alpha,\beta$ constantes réelles$\}$.

Une fonction à paramètre Soit a un réel et $f_a : \left(x \mapsto \frac{1-ax+x^2}{\sqrt{1+x^2}}e^{Arctan(x)}\right)$.

1. a. Justifier que f_a est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

   b. Montrer que $f_a(x) = 1 + (1-a)x + (1-a)x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$ (détailler et justifier vos calculs !!!).

   c. En déduire, suivant les valeurs de a, l'équation de la tangente à C_{f_a} en 0 et la position, au voisinage de 0, de la courbe C_{f_a} par rapport à cette tangente .

1a.$f_a(x)existe \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x^2 \geq 0 \\ \sqrt{1+x^2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{1 + x^2 > 0}_{toujours\ vrai.}$. Donc, $D_{f_a} = \mathbb{R}$. Dans l'expression de f_a, seule la fonction racine carrée n'est pas de classe C^∞ sur tout son domaine de définition : elle n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$. Or, $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x^2 > 0$. Donc f_a est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1b. $f(x) = (1 - ax + x^2)(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}e^{Arctan(x)} = (1 - ax + x^2)(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}e^{x - \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $(1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 - \frac{5}{16}u^3 + o_0(u^3)$, $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^3)$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{x - \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)}_{u(x)} = 0$ et $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o_0(t^3)$, $e^{x - \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)} = 1 + u(x) + \frac{1}{2}u(x)^2 + \frac{1}{6}u(x)^3 + o_0(x^3)$ avec

$\begin{cases} u(x) = x - \frac{x^3}{3} + o_0(x^3) \\ u(x)^2 = x^2 + o_0(x^3) \\ u(x)^3 = x^3 + o_0(x^3) \end{cases}$ donc $e^{x - \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)} = 1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)$.

Alors, $f(x) = (1 - ax + x^2)\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^3)\right]\left[1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)\right] = (1 - ax + x^2)\left[1 + x - \frac{2}{3}x^3 + o_0(x^3)\right]$

$f(x) = 1 + (1-a)x + (1-a)x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$.

1.c. Comme f admet le $DL_1(0)$ suivant $f(x)=1+(1-a)x+o_0(x)$, $f'(0)=1-a$ et l'équation de la tangente à C_{f_a} en 0 est $y=1+(1-a)x$. De plus, $f(x)-[1+(1-a)x]=(1-a)x^2+\frac{1}{3}x^3+o_0(x^3)\sim_0 \begin{cases}(1-a)x^2 \ si\ a\neq 1\\ \frac{1}{3}x^3 \ \ si\ a=1\end{cases}$.

Donc, si $a=1$ alors, comme $\frac{1}{3}x^3$ est du signe de x, $f(x)-[1+(1-a)x]\geq 0$ pour x au voisinage de 0^+ et $f(x)-[1+(1-a)x]\leq 0$ pour x au voisinage de 0^- ; donc, C_{f_a} est sous sa tangente en 0.
Si $a>1$ alors, comme $(1-a)x^2$ est négatif , $f(x)-[1+(1-a)x]\leq 0$ pour x au voisinage de 0 ; donc, C_{f_a} est sous sa tangente en 0.
Si $a<1$ alors, comme $(1-a)x^2$ est positif , $f(x)-[1+(1-a)x]\geq 0$ pour x au voisinage de 0 ; donc, C_{f_a} est au-dessus de sa tangente en 0.

2. a. Déterminer un équivalent simple de f_a au voisinage de $+\infty$. Faire de même en $-\infty$.
b. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, f_a(x)=e^{\frac{\pi}{2}}x\, f_{-a}\left(-\frac{1}{x}\right)$ et $\forall x\in\mathbb{R}^{-*}, f_a(x)=-e^{-\frac{\pi}{2}}x\, f_{-a}\left(-\frac{1}{x}\right)$.
c. En déduire que C_{f_a} a deux asymptotes obliques l'une en $+\infty$ et l'autre en $-\infty$ et étudier, suivant les valeurs de a, la position, au voisinage de $+\infty$, de C_{f_a} par rapport à son asymptote en $+\infty$ uniquement .
d. Vérifier que ces deux asymptotes se coupent orthogonalement sur (Ox).

2a. $1-ax+x^2\sim_{+\infty}x^2$ et $1+x^2\sim_{+\infty}x^2$ donc $\frac{1-ax+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\sim_{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}=\frac{x^2}{|x|}=|x|$.

De plus, $\lim_{x\to+\infty}e^{Arctan(x)}=e^{\frac{\pi}{2}}\neq 0$.Donc $e^{Arctan(x)}\sim_{+\infty}e^{\frac{\pi}{2}}$. Donc $f(x)\sim_{+\infty}xe^{\frac{\pi}{2}}$.

De même, $\frac{1-ax+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\sim_{-\infty}|x|=-x$ et $e^{Arctan(x)}\sim_{+\infty}e^{\frac{-\pi}{2}}$.Donc, $f(x)\sim_{+\infty}-xe^{-\frac{\pi}{2}}$.

2b. Soit $x\in\mathbb{R}^{+*}$. Alors, $e^{\frac{\pi}{2}}x\, f_{-a}\left(-\frac{1}{x}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}x\,\frac{1-a\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}e^{Arctan\left(-\frac{1}{x}\right)}=$

$\frac{x^2\left(1-a\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}e^{\frac{\pi}{2}+Arctan\left(-\frac{1}{x}\right)}\underbrace{\overbrace{=}^{car\ Arctan\ est\ impaire}}_{car\ x>0\ donc\ x=\sqrt{x^2}}\frac{(x^2-ax+1)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}e^{\frac{\pi}{2}-Arctan\left(\frac{1}{x}\right)}\underbrace{=}_{car\ x>0}\frac{(x^2-ax+1)}{\sqrt{1+x^2}}e^{Arctan(x)}=f_a(x)$.

Soit $x\in\mathbb{R}^{-*}$.Alors, $-e^{-\frac{\pi}{2}}x\, f_{-a}\left(-\frac{1}{x}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}x\,\frac{1-a\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}e^{Arctan\left(-\frac{1}{x}\right)}=$

$\frac{x^2\left(1-a\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}e^{-\frac{\pi}{2}+Arctan\left(-\frac{1}{x}\right)}\underbrace{\overbrace{=}^{car\ Arctan\ est\ impaire}}_{car\ x<0\ donc\ -x=\sqrt{x^2}}\frac{(x^2-ax+1)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}e^{-\frac{\pi}{2}-Arctan\left(\frac{1}{x}\right)}\underbrace{=}_{car\ x<0}\frac{(x^2-ax+1)}{\sqrt{1+x^2}}e^{Arctan(x)}=f_a(x)$.

2c. Soit $x\in\mathbb{R}^{+*}$. Posons $t=\frac{1}{x}$ et $g(t)=f_a(x)$. Alors, $g(t)=f_a\left(\frac{1}{t}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{t}\,f_{-a}(-t)$. Comme $\lim_{t\to 0}-t=0$, nous pouvons $f_{-a}(-t)=1+\big(1-(-a)\big)(-t)+\big(1-(-a)\big)(-t)^2+\frac{1}{3}(-t)^3+o_0(t^3)=1-(1+a)t+(1+a)t^2-\frac{1}{3}t^3+o_{0^+}(t^3)$.
Donc, $g(t)=e^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{t}-e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)+e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)t-\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}t^2+o_{0^+}(t^2)$.
Et par conséquent, $f_a(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}x-e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)+e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\frac{1}{x}-\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}\frac{1}{x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

● Si $a>-1$ alors $f_a(x)-\left[e^{\frac{\pi}{2}}x-e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\right]\sim_{+\infty}e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\frac{1}{x}$; comme $\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\frac{1}{x}=0$ et $e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\frac{1}{x}>0$ au vois de$+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f_a(x)-\left[e^{\frac{\pi}{2}}x-e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\right]=0\ et\ f_a(x)-\left[e^{\frac{\pi}{2}}x-e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\right]>0$ au vois de$+\infty$. J'en conclus que la droite d'équation $y=e^{\frac{\pi}{2}}x-e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)$ est asymptote à Cf en $+\infty$ et Cf est au-dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.
● Si $a<-1$ alors $f_a(x)-\left[e^{\frac{\pi}{2}}x-e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\right]\sim_{+\infty}e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\frac{1}{x}$; comme $\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\frac{1}{x}=0$ et $e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\frac{1}{x}<0$ au vois de$+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f_a(x)-\left[e^{\frac{\pi}{2}}x-e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\right]=0\ et\ f_a(x)-\left[e^{\frac{\pi}{2}}x-e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\right]<0$ au vois de$+\infty$. J'en conclus que la droite d'équation $y=e^{\frac{\pi}{2}}x-e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)$ est asymptote à Cf en $+\infty$ et Cf est en-dessous de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.
● Si $a=-1$ alors $f_a(x)-\left[e^{\frac{\pi}{2}}x-e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\right]\sim_{+\infty}-\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}\frac{1}{x^2}$; comme $\lim_{x\to+\infty}-\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}\frac{1}{x^2}=0$ et $-\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}\frac{1}{x^2}<0$ au vois de$+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f_a(x)-\left[e^{\frac{\pi}{2}}x-e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\right]=0\ et\ f_a(x)-\left[e^{\frac{\pi}{2}}x-e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\right]<0$ au vois de$+\infty$. J'en conclus que la droite d'équation $y=e^{\frac{\pi}{2}}x-e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)$ est asymptote à Cf en $+\infty$ et Cf est en-dessous de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.
Soit $x\in\mathbb{R}^{-*}$. Posons $t=\frac{1}{x}$ et $g(t)=f_a(x)$. Alors, $g(t)=f_a\left(\frac{1}{t}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}\frac{(-1)}{t}\,f_{-a}(-t)$.
Donc, $g(t)=e^{\frac{-\pi}{2}}\frac{(-1)}{t}+e^{-\frac{\pi}{2}}(1+a)-e^{-\frac{\pi}{2}}(1+a)t+\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{3}t^2+o_{0^+}(t^2)$.
Et par conséquent, $f_a(x)=-e^{-\frac{\pi}{2}}x+e^{-\frac{\pi}{2}}(1+a)-e^{-\frac{\pi}{2}}(1+a)\frac{1}{x}+\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{3}\frac{1}{x^2}+o_{-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc, la droite d'équation $-e^{-\frac{\pi}{2}}x+e^{-\frac{\pi}{2}}(1+a)$ est asymptote à Cf en $-\infty$.

2d.Un vecteur directeur de l'asymptote en $+\infty$ est $\vec{u} = \vec{\imath} + e^{\frac{\pi}{2}}\vec{\jmath}$ (car la pente de cette droite est $e^{\frac{\pi}{2}}$). Un vecteur directeur de l'asymptote en $-\infty$ est $\vec{v} = \vec{\imath} - e^{\frac{-\pi}{2}}\vec{\jmath}$. Or, $\vec{u}.\vec{v} = 1 \times 1 + e^{\frac{\pi}{2}} \times e^{-\frac{\pi}{2}} = 1 - 1 = 0$. Donc ces deux asymptotes sont perpendiculaires.

ETUDE D'UNE SUITE

1. Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$. Montrer que l'équation $x = nln(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$ admet une unique solution dans $]0,n]$ notée u_n et justifier que $u_n \in]0,2[$.
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
3. Montrer que la suite (u_n) converge vers 1 .

1. Posons $\varphi_n(x) = x - nln(x)$. φ_n *est de classe* C^∞*sur* $\mathbb{R}^{+*}$et $\forall x > 0, \varphi_n'(x) = 1 - \frac{n}{x}$.

Donc, $\varphi_n'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{n}{x} > 0 \Leftrightarrow x > n$. D'où les variations de φ_n suivantes :

x	0	u_n	2	n	$+\infty$
$\varphi_n'(x)$		$-$		0	$+$
$\varphi_n(x)$	$+\infty$	0		<0	$+\infty$

$\varphi_n(n) = n(1 - ln(n)) < 0$. De plus $\lim\limits_{x \to 0\ (et +\infty)} \varphi_n(x) = +\infty = \lim\limits_{x \to +\infty}(x\varphi_n)$. Donc comme φ_n est continue sur $\mathbb{R}$, le TVI assure que φ_n s'annule au moins une fois sur $]0, n[et$ une fois sur $]n, +\infty[$. Comme de plus φ_n est strictement monotone sur chacun de ces intervalles, φ s'annule une seule fois sur chacun de ces intervalles. Ainsi, l'équation $x = nln(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$ admet une unique solution dans $]0, n]$ notée u_n. Comme $\varphi_n(2) = 2 - n\ln(2) < 0\ car\ n \geq 3$, $u_n \in]0,2[$. Et même , $\varphi_n(1) = 1 - n\ln(1) > 0$ donc $u_n \in]1,2[$.

Ainsi, $\forall n \geq 3, u_n \in]1,2[\ et\ \varphi_n(u_n) = u_n - nln(u_n) = 0$.

2. Comparons $\varphi_n(u_n) et\ \varphi_n(u_{n+1})$.

$$\varphi_n(u_n) = 0 = \varphi_{n+1}(u_{n+1})\ et\ \varphi_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - nln(u_{n+1}) = \underbrace{u_{n+1} - (n+1)ln(u_{n+1})}_{=\varphi_{n+1}(u_{n+1})=0} + ln(u_{n+1}) = ln(u_{n+1}) > 0\ car\ u_{n+1} \in]1,2[.$$

Donc, $\varphi_n(u_{n+1}) > \varphi_n(u_n)$. Comme φ_n est strictement décroissante sur $]1,2[$, $u_{n+1} < u_n$. Donc la suite u est strictement décroissante. Comme elle est bornée , elle converge. Notons L sa limite finie.

3. $\forall n \geq 3, u_n = nln(u_n)$ donc $ln(u_n) = \frac{u_n}{n}\ et\ u_n = e^{\frac{u_n}{n}}$. Par conséquent, $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^0 = 1$.

DEVELOPPEMENT LIMITE de Φ

On pose $\forall t \in]-1, +\infty[, \Phi(t) = \frac{\ln(1+t)}{1+t}$.

4. Justifier que Φ admet un développement limité à tout ordre d au voisinage de 0 . On note $\Phi(t) = \sum_{j=0}^{s} c_j t^j + o_0(t^s)$ le développement limité d'ordre s au voisinage de 0.
5. Calculer c_0, c_1, c_2, c_3.
6. Justifier que $\forall j \in \mathbb{N}^*, c_j = (-1)^{j+1}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k}$
7. Montrer que pour tout entier p strictement positif , $\ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$ en utilisant une inégalité classique.
8. En déduire que la suite $(c_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ diverge sans limite.

4. Φ est de classe C^∞sur $]-1, +\infty[$ donc admet un DL à tout ordre en 0 d'après Taylor-Young.
5. $\Phi(t) = \frac{\ln(1+t)}{1+t} = \Phi(t) = \ln(1+t)\frac{1}{1+t} = \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o_0(t^3)\right)(1 - t + t^2 - t^3 + o_0(t^3)) = t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{11}{6}t^3 + o_0(t^3)$.

   Donc, $c_0 = 0, c_1 = 1 , c_2 = -\frac{3}{2}, c_3 = \frac{11}{6}$.

6. $\Phi(t) = \ln(1+t)\frac{1}{1+t} = \left[\underbrace{\sum_{j=1}^{s}\frac{(-1)^{j-1}t^j}{j}}_{Q(t)} + o_0(t^s)\right]\left[\underbrace{\sum_{j=0}^{s}(-1)^j t^j}_{R(t)} + o_0(t^s)\right] = \underbrace{termes\ de\ degré\ \text{inf à}\ s\ de\ P(t)Q(t)}_{=\sum_{j=0}^{s} c_j t^j} + o_0(t^s)$

$$Or, \quad Q(t)R(t) = \left(\sum_{j=1}^{s}\frac{(-1)^{j-1}t^j}{j}\right)\left(\sum_{k=0}^{s}(-1)^k t^k\right) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=0}^{s}\frac{1}{j}(-1)^{j-1}t^j(-1)^k t^k = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=0}^{s}\frac{1}{j}(-1)^{k+j+1}t^{k+j}$$

$$= \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=j}^{s+j}\frac{1}{j}(-1)^{i+1}t^i = \sum_{i=1}^{2s}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}(-1)^{i+1}t^i = \sum_{i=1}^{2s}\left[\underbrace{(-1)^{i+1}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}}_{=c_i\ pour\ j\in[\![1,s]\!]}\right]t^i.$$

   Donc, $c_i = (-1)^{i+1}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}$.

7. Je sais que $\forall x \geq 0, ln(1+x) \leq x$ donc pour tout entier p strictement positif , $\ln(p+1) - \ln(p) = \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$.
8. $\forall j > 0, \ln(j+1) = \sum_{p=1}^{j}\ln(p+1) - \ln(p) \leq \sum_{p=1}^{j}\frac{1}{p} = S_j$. Donc $\lim\limits_{j \to +\infty} S_j = +\infty$.

Alors, c_{2j}=$(-1)^{2j+1}\sum_{r=0}^{2j}\frac{1}{r} = -S_{2j} \xrightarrow[j \to +\infty]{} -\infty$ et Alors, c_{2j+1}=$(-1)^{2j+2}\sum_{r=0}^{2j+1}\frac{1}{r} = S_{2j+1} \xrightarrow[j \to +\infty]{} +\infty$. Comme les deux suites extraites (c_{2j}) et (c_{2j+1}) tendent vers deux limites différentes , j'en conclus que (c_j) diverge sans limite.

DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE (u_n)

9. Montrer que Φ induit une bijection de $]-1, e-1[$ sur un domaine à déterminer . On note ψ la bijection réciproque . Dresser le tableau des variations de ψ et préciser les limites aux extrémités de son intervalle de définition.
10. Justifier que ψ admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 et déterminer ce développement limité .
11. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 1$.

11.1 Exprimer v_n à l'aide de ψ *et* n.
11.2 En déduire qu'il existe trois réels A , B , C que l'on déterminera , tels que $u_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

11. $\forall t \in]-1, e-1[, \Phi'(t) = \frac{1-\ln(1+t)}{(1+t)^2} > 0$. Donc Φ est strictement croissante sur $]-1, e-1[$. Comme de plus Φest continue sur $]-1, e-1[$, Φ est bijective de $]-1, e-1[$ sur $\left]\lim_{x\to -1}\Phi(x), \lim_{x\to e-1}\Phi(x)\right[=]-\infty, \frac{1}{e}[$ (car $\lim_{x\to -1}\Phi(x) \underset{FI}{\overset{pas\ de}{\cong}} -\infty$ *et* $\lim_{x\to e-1}\Phi(x) = \Phi(e-1) = \frac{1}{e}$). De plus, ψ la bijection réciproque est continue et strictement croissante sur $]-\infty, \frac{1}{e}[$ et $\lim_{x\to \frac{1}{e}}\psi(x) = e-1$ et $\lim_{x\to -\infty}\psi(x) = -1$.

12. Sur $]-1, e-1[$, Φ' ne s'annule pas et Φ est de classe C^∞. Donc, ψ est de classe C^∞sur $]-\infty, \frac{1}{e}[$. Donc Taylor Young assure que ψ admet le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 suivant : $\psi(x) = \psi(0) + \psi'(0)x + \frac{\psi''(0)}{2}x^2 + o_0(x^2)$. Or, $\Phi(0) = 0$ donc $\psi(0) = 0$.

Et, $\psi'(x) = \frac{1}{\Phi'(\psi(x))}$ *et* $\psi''(x) = -\frac{\psi'(x)\Phi''(\psi(x))}{\left(\Phi'(\psi(x))\right)^2}$ avec $\Phi''(t) = \frac{-3+2\ln(1+t)}{(1+t)^3}$. Donc, $\psi'(0) = \frac{1}{\Phi'(\psi(0))} = \frac{1}{\Phi'(0)} = 1$ et $\psi''(0) = -\frac{\psi'(0)\Phi''(\psi(0))}{\left(\Phi'(\psi(0))\right)^2} = -\frac{(-3)}{1} = 1$. Ainsi, $\psi(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + o_0(x^2)$.

13. $u_n = n\ln(u_n)$ donc $1 + v_n = n\ln(1+v_n)$. De plus,$\forall n, u_n \in]1,2]$. Donc $u_n = 1 + v_n \neq 0$. Alors $\forall n,\ \Phi(v_n) = \frac{\ln(1+v_n)}{(1+v_n)} = \frac{1}{n}$. De plus, $\forall n, u_n \in]1,2] \subset]1, e[$ donc $v_n \in]0, e-1[\subset]-1, e-1[$.Par conséquent, $\forall n,\ v_n = \psi\left(\frac{1}{n}\right)$.

14. Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ *et* $\psi(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + o_0(x^2)$, $v_n = \psi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{3}{2}\frac{1}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, $A = 0, B = 1$ *et* $C = \frac{3}{2}$ conviennent.

Exercice 5 Une équation fonctionnelle

On note E l'ensemble de toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et telles que :

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2.$$

1. Montrer que E est non vide.
2. Montrer que $f \in E \Leftrightarrow -f \in E$.
3. Soit $f \in E$.
   a. Trouver les valeurs possibles de $f(0)$.
   b. Montrer que : $f(0) = 0 \Longrightarrow f = 0$.
   On suppose désormais que $f(0) \neq 0$.
   c. Imaginons un instant que: $\exists x_0 \in \mathbb{R}/f(x_0) = 0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 0$ et aboutir à une contradiction. Qu'en conclut-on sur f ?
   d. En déduire que f est de signe constant. On suppose désormais que $\forall x, f(x) > 0$.

1. Les fonctions constantes égales à 0 et à 1 sont éléments de E.
2. Si f est dans E alors f est continue donc $-f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et
   $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, (-f(x+y))(-f(x-y)) = f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2$=$[(-f(x))(-f(y))]^2$donc $-f$ est dans E.
   Ains, $f \in E \Longrightarrow -f \in E$. Par suite, $-f \in E. \Longrightarrow -(-f) \in E$. Ainsi, $f \in E \Leftrightarrow -f \in E$
3. f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et telle que :$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y)f(x-y) = \left(f(x)f(y)\right)^2$ $**$.
   a. Alors, en prenant $x = y = 0$ *dans* $**$, j'obtiens : $f(0)^2 = f(0)^4$.

Donc, $f(0)^2[f(0)^2 - 1] = 0$ *i.e.* $f(0)^2[f(0)-1][f(0)+1] = 0$. Ainsi, $f(0) \in \{0,1,-1\}$.

   a. Supposons que $f(0) = 0$. Alors pour tout réel x, en prenant $x = y$ *dans* $**$, j'obtiens $f(2x)f(0) = f(x)^2$. Donc $f(x)^2 = 0$ et par suite, $f(x) = 0$. Donc $f(0) = 0 \Longrightarrow f$ *est la fonction nulle*.

On suppose désormais que $f(0) \neq 0$ *donc* $f(0) = \pm 1$.

   b. Imaginons un instant que: $\exists x_0 \in \mathbb{R}/f(x_0) = 0$. Donc , $f\left(\frac{x_0}{2^0}\right) = 0$.

Soit n un entier naturel. Supposons que $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 0$. Je sais que $f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}} + \frac{x_0}{2^{n+1}}\right) f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}} - \frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = \left(f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)\right)^2$ (en posant $x = y = \frac{x_0}{2^{n+1}}$ *dans* $**$).Donc, $\left(f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)\right)^2 = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)f(0) \underset{\underbrace{car}_{f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)=0.}}{=} 0$ et par suite, $f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = 0$.

Le théorème de récurrence permet alors de conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 0$. La suite $\left(f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right)$ est donc constante égale à 0, sa limite est donc nulle. Mais $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_0}{2^n} = 0$ et f est continue en 0 i.e. $\lim_{t\to 0} f(t) = f(0)$; donc le théorème de caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction, $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f(0)$. Alors par unicité de la limite, $f(0) = 0$ ce qui est exclu !!! J'en déduis qu'un tel réel x_0 n'existe pas. J'en déduis que f ne s'annule pas.

   c. Comme f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, f ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$.

On suppose désormais que $\forall x, f(x) > 0$

4. On pose $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \ln\left(f(x)\right)$.

a. Montrer que $g(0) = 0, g$ est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, g(nx) = n^2 g(x)$.

c. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, g(nx) = n^2 g(x)$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} g(1)$.

e. En déduire que $\forall r \in \mathbb{Q}, g(r) = r^2 g(1)$.

f. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x^2 g(1)$.

5.Déterminer tous les éléments de E.

4. On suppose désormais que $\forall x, f(x) > 0$ et par conséquent, $f(0) = 1$.

On pose $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \ln(f(x))$. Alors $(**)$ devient : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ln [f(x+y)f(x-y)] = \ln [(f(x)f(y))^2]$
i.e. $\ln[f(x+y)] + \ln[f(x-y)] = 2\ln[f(x)] + 2\ln[f(y)]$. Ainsi, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x+y) + g(x-y) = 2g(x) + 2g(y) (*)$.

a. $g(0) = \ln(f(0)) = \ln(1) = 0$.

Prenons $x = 0\ dans\ (*)$, alors $\forall y \in \mathbb{R}, g(y) + g(-y) = 2g(0) + 2g(y) = 2g(y)$. Donc, $g(-y) = g(y)$. J'en conclus que g est paire.
Enfin, f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement positive et ln est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc, par composition, g est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N}, g(nx) = n^2 g(x)$.

$g(0 \times x) = g(0) = 0^2 \times g(x)$. et $g(1 \times x) = g(x) = 1^2 \times g(x)$.
Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $g(nx) = n^2 g(x)\ \ et\ \ g((n-1)x) = (n-1)^2 g(x)$.
Alors, prenons $x = x$ et $y = nx$ dans $(*)$, $g(x + nx) + g(x - nx) = 2g(x) + 2g(nx)$ ce qui donne :
$g((n+1)x) + g(-(n-1)x) = 2g(x) + 2n^2 g(x)$. Comme g est paire, $g(-(n-1)x) = g((n-1)x) = (n-1)^2 g(x)$.
Alors, $g((n+1)x) = 2g(x) + 2n^2 g(x) - (n-1)^2 g(x) = (n^2 + 2n + 1)g(x) = (n+1)^2 g(x)$.
En conclusion, nous pouvons affirmer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, g(nx) = n^2 g(x)$.

c. On sait déjà que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, g(nx) = n^2 g(x)$.De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, , \forall n \in \mathbb{N}, g((-n)x) = g(-nx) = g(nx) = n^2 g(x) = (-n)^2 g(x)$. J'en conclus que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, g(nx) = n^2 g(x)$.

d. $\forall n \in \mathbb{N}^*, g(1) = g\left(n \times \frac{1}{n}\right) = n^2 g\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc, , $g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} g(1)$.

e. Soit $r = \frac{p}{n} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}\ et\ n \in \mathbb{N}^*$. $g(r) = g\left(p \times \frac{1}{n}\right) = p^2 g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{p^2}{n^2} g(1) = r^2 g(1)$.

f. Soit x un réel. Alors, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, x est la limite d'une suite (r_n) de nombres rationnels.

Comme $\forall n, r_n \in \mathbb{Q}, f(r_n) = r_n^2 g(1)$. Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(r_n) = x^2 g(1)$. Mais comme f est continue en x, le théorème de caractérisation séquentielle de la continuité assure que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(r_n) = f(x)$. Alors par unicité de la limite, $f(x) = x^2 g(1)$. 5. Ainsi, g est de la forme $(x \mapsto ax^2)$ tel que $a \in \mathbb{R}$. Et par conséquent, f est de la forme $(x \mapsto e^{ax^2})$ tel que $a \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, toute fonction$(x \mapsto e^{ax^2})$ tel que $a \in \mathbb{R}$ est strictement positive, continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $f(0) = 1$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x+y)f(x-y) = e^{a(x+y)^2}\ e^{a(x-y)^2} = e^{a(x+y)^2 + a(x-y)^2} = e^{2ax^2 + 2ay^2} = e^{2ax^2} e^{2ay^2} = f(x)^2 f(y)^2 = (f(x)f(y))^2.$$

J'en déduis que les solutions strictement positive de notre problème sont les fonctions $(x \mapsto e^{ax^2})$ tel que $a \in \mathbb{R}$.

Or, f est solution sietssi $-f$ est solution. Donc, les solutions strictement négative de notre problème sont les fonctions $(x \mapsto -e^{ax^2})$ tel que $a \in \mathbb{R}$.

J'en conclus que les solutions de notre problème sont les fonctions $(x \mapsto 0)$, $, (x \mapsto e^{ax^2})$, $(x \mapsto -e^{ax^2})$ el que $a \in \mathbb{R}$.