

# Programme de colle 20

## Chapitre 15 Polynômes

Cf programme précédent

+ **révisions** sur les décompositions (simples) en éléments simples de fonctions rationnelles. Attention : les techniques de décomposition en éléments simples sont celles vues en début d'année; les élèves décomposent des fonctions rationnelles grâce à des calculs de limites, à la parité, à des valeurs particulières et/ou à la résolution de systèmes linéaires .... pas de théorie sur la décomposition de  $P'/P$  ou de  $1/P$ .

### Savoir-faire :

- connaître la forme théorique de la décomposition en éléments simples : partie entière et les éléments simples de premières et secondes espèces.
- savoir déterminer les coefficients de cette décomposition en utilisant les limites, des valeurs particulières, la parité et /ou un système linéaire
- savoir utiliser la décomposition en éléments simples pour simplifier une somme (et calculer sa limite), pour intégrer une fonction, pour déterminer la dérivée nième d'une fonction.

## Chapitre 16 Matrices (et systèmes linéaires) ... début du chapitre.

### I Opérations sur les matrices.

#### 1. Généralités

- définition d'une matrice, exemple (matrice nulle, identité, matrice colonne ou ligne), notations.
- égalité de deux matrices.
- ensembles  $M_{n,p}(K)$  et  $M_n(K)$ .

Pour ne pas s'encombrer de lettres, on notera simplement  $(A + BC)_{ij}$  le coefficient ligne  $i$  et colonne  $j$  de la matrice  $A + BC$ .

#### 2. Opérations

- **Somme, multiplication externe, combinaison linéaire**

$\forall A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K), \forall B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(K)$  et  $\forall (\mu, \beta) \in K^2, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ ,

$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  et  $(\mu A)_{ij} = \mu a_{ij}$  et  $(\mu A + \beta B)_{ij} = \mu a_{ij} + \beta b_{ij}$

- **Produit matriciel.**  $\forall A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K), \forall B = (b_{ij}) \in M_{p,q}(K), \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$

Si  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(K)$  et  $A \in M_{n,p}(K)$  alors  $AB = \sum_{k=1}^p b_k C_k$  où  $C_1, \dots, C_p$  sont les colonnes de  $A$ .

Si  $B = (b_1 \dots b_n) \in M_{1,n}(K)$  et  $A \in M_{n,p}(K)$  alors  $BA = \sum_{k=1}^n b_k L_k$  où  $L_1, \dots, L_n$  sont les lignes de  $A$ .

- **Règles de calcul**

Associativité de l'addition et le produit matriciels, commutativité de l'addition, distributivité du produit matriciel et de la multiplication externe sur l'addition, éléments neutres de l'addition ( $O_{np}$ ) et de la multiplication ( $I_n$ ), produit mixte.

- **Mises en garde.** Il arrive très souvent que :

- $AB \neq BA$  (le produit matriciel n'est pas commutatif).
- $AB = O \not\Rightarrow B = O$  ou  $A = O$  (le produit matriciel n'est pas intègre).
- $AB = AC \not\Rightarrow A = O$  ou  $B = C$

#### 3. Transposition

$\forall A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K), A^T \in M_{p,n}(K)$  telle que  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, (A^T)_{ij} = a_{ji}$ .

**Règles de calcul :** transposée de la transposée, transposée d'une combinaison linéaire, d'un produit.

$\forall A \in M_{n,p}(K), \forall B \in M_{n,p}(K), \forall (\alpha, \beta) \in K^2, (A^T)^T = A$  et  $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$ .

$\forall A \in M_{n,p}(K), \forall B \in M_{p,q}(K), (AB)^T = B^T A^T$

#### 4. Matrices élémentaires

$\forall (r, s) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$ , on définit  $E_{rs} \in M_{n,p}(K)$  par : le seul coefficient non nul de  $E_{rs}$  est le coefficient ligne  $r$  et colonne  $s$  et ce coefficient vaut 1.

Dans  $M_n(K)$  :  $\forall (r, s, u, v) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4, E_{rs} E_{uv} = \delta_{su} E_{rv}$ .

Toute matrice  $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$  s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des matrices élémentaires de  $M_{n,p}(K)$  et cette unique écriture est  $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} E_{ij}$ .

## II Algorithme de Gauss et rang.

### 1. Opérations élémentaires :

**Les opérations élémentaires :** échange de deux lignes  $L_i \leftrightarrow L_j$ , multiplier une ligne par un scalaire non nul  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  et ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par un scalaire  $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ . Lorsque  $A'$  est obtenue en faisant subir à une matrice  $A \in M_{n,p}(K)$  une suite finie d'opérations élémentaires, on dit que  $A'$  et  $A$  sont **équivalentes par lignes** et on note :  $A \sim_L A'$ .

**Matrice de transposition :**  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on définit  $T_{ij} \in M_n(K)$  par :  $T_{ij}$  est la matrice obtenue en faisant subir  $L_i \leftrightarrow L_j$  à  $I_n$ .

**Matrice de dilatation :**  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall \lambda \in K^*$ , on définit  $D_i(\lambda) \in M_n(K)$  par :  $D_i(\lambda)$  est la matrice obtenue en faisant subir  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  à  $I_n$ .

**Matrice de transvection** :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall \beta \in K$ , on définit  $H_{ij}(\beta) \in M_n(K)$  par :  $H_{ij}(\beta)$  est la matrice obtenue en faisant subir  $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$  à  $I_n$ .

La matrice  $A'$  obtenue en effectuant sur  $A$  l'opération  $L_i \leftrightarrow L_j$  vérifie  $A' = T_{ij} A$ .

La matrice  $A'$  obtenue en effectuant sur  $A$  l'opération  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  vérifie  $A' = D_i(\lambda) A$ .

La matrice  $A'$  obtenue en effectuant sur  $A$  l'opération  $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$  vérifie  $A' = H_{ij}(\beta) A$ .

## 2. Echelonnement

**Matrice échelonnée** : une matrice  $A \in M_{n,p}(K)$  est échelonnée lorsqu'elle est nulle ou lorsque chaque ligne non nulle débute par davantage de zéros que la précédente. Les pivots d'une telle matrice sont les premiers coefficients non nuls des lignes non nulles.

**Matrice échelonnée réduite** : une matrice  $A \in M_{n,p}(K)$  est échelonnée réduite par ligne lorsqu'elle est échelonnée, que ses pivots valent 1 et les autres coefficients se trouvant sur la colonne d'un pivot sont nuls. Le **rang** d'une telle matrice échelonnée réduite est le nombre de ses pivots.

**Théorème de Gauss-Jordan**. Toute matrice  $A \in M_{n,p}(K)$  est équivalente par ligne à une matrice  $E$  échelonnée et à une unique matrice  $R$  échelonnée réduite.

Le rang de  $A$  est par définition le rang de  $R$ .

**Propriétés** :

- Le rang de toute matrice échelonnée est égal à son nombre de pivots.
- Le rang d'une matrice  $A$  est le rang de toute matrice équivalente par ligne à  $A$  et en particulier de toute matrice échelonnée équivalente à  $A$ .
- Si  $A \in M_n(K)$  alors  $\text{rg}(A) = n \Leftrightarrow A \sim I_n$ .

## 3. Système linéaire

$$(S): \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \quad \text{d'inconnue } (x_1, x_2, \dots, x_p) \in K^p. \rightsquigarrow (SH): \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = 0 \end{cases} \quad \text{le système homogène associé à } (S).$$

$(S)$  est échelonné lorsque en passant d'une ligne de  $(S)$  à la suivante, au moins une inconnue « disparaît » (cette inconnue a en fait son coefficient nul).

$(S)$  est de Cramer lorsque  $n = p$  et  $(S)$  admet une unique solution.

$(S)$  est compatible lorsque  $(S)$  admet au moins une solution.  $(S)$  est incompatible lorsque  $(S)$  n'admet aucune solution.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{la matrice des coefficients de } (S). \quad \text{Et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{la matrice du second membre de } (S).$$

Alors,  $(S) \Leftrightarrow AX = B$ . Et échelonner  $(S)$  revient à échelonner  $A$  et à faire en parallèle les opérations sur  $B$ .

**Théorème de Gauss-Jordan**. Tout système linéaire est équivalent à un système linéaire échelonné.

**Propriétés** :

- Si  $X_0$  est une solution particulière de  $(S)$  alors les solutions de  $(S)$  sont toutes les matrices de la forme  $X_0 + Y$  où  $Y$  solution de  $(SH)$ .
- Si  $(S)$  est carrée d'ordre  $n$  alors  $\text{rg}(S) = n \Leftrightarrow (S)$  est de Cramer.

## Savoir-faire :

- Savoir faire des calculs simples sur les matrices.
- Savoir exploiter les relations sur les colonnes ou les lignes d'une matrice  $A$  pour calculer le rang ou trouver une matrice  $B$  colonne telle que  $AB = 0$  ou ligne telle que  $BA = 0$ .
- Savoir déterminer le rang d'une matrice ou d'un système linéaire par opérations élémentaires
- Résoudre un système linéaire simple ou avec paramètre et décrit sous forme classique ou sous forme matricielle.
  - par échelonnement
  - par solution particulière + solution homogène
  - par substitution (parfois).
- Savoir résoudre les problèmes suivants qui se ramènent à la résolution d'un système linéaire :
  - intersection de droites ou de plans
  - décomposition en éléments simples
  - déterminer le reste de la division euclidienne d'un polynôme de degré indéfini par un polynôme dont la forme scindée est connue
  - déterminer un  $DL$  d'une bijection réciproque.

## Questions de cours :

**QDC1** : Caractérisation par factorisation d'une racine

**QDC2** : Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés

**QDC3** : Racine complexe d'un polynôme à coefficients réels.

**QDC4** : Montrer que Si  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(K)$  et  $A \in M_{n,p}(K)$  alors  $AB = \sum_{k=1}^p b_k C_k$  où  $C_1, \dots, C_p$  sont les colonnes de  $A$ .

Si  $B = (b_1 \dots b_n) \in M_{1,n}(K)$  et  $A \in M_{n,p}(K)$  alors  $BA = \sum_{k=1}^n b_k L_k$  où  $L_1, \dots, L_n$  sont les lignes de  $A$ .

**+ Application** : Montrer que si la matrice  $A'$  est obtenue en effectuant sur la matrice  $A$  l'opération  $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$  alors  $A' = H_{ij}(\beta) A$ .

**QDC5**: Démontrer que : Si  $AB$  existe alors  $(AB)^T = B^T A^T$ .