

FICHE DE REVISION Colle 20

Applications des systèmes linéaires

Ex 1 : Soit $f: (x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}})$.

- Montrer que f est bijective de $]0, e^2[$ sur $] -\infty, \frac{2}{e}[$ et f^{-1} est de classe C^∞ sur $] -\infty, \frac{2}{e}[$.
- Déterminer le $DL_4(1)$ de f .
- En déduire le $DL_4(0)$ de f^{-1} .

a) $Df = \mathbb{R}^{++}$. f est donc bien définie sur $]0, e^2[$. De plus, f est continue et même de classe C^∞ sur $]0, e^2[$: en effet, dans l'expression de f seule la racine carrée n'est pas de classe C^∞ sur tout son domaine de définition, elle ne l'est que sur $\mathbb{R}^{++}$ donc elle l'est sur $]0, e^2[$. $\forall x \in]0, e^2[, f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{\ln(x)}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}(2 - \ln(x)) > 0$. Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $]0, e^2[$. Alors, le théorème des bijections continue et strictement monotones assure que $f(]0, e^2[) =]\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow e^2} f(x)[=] -\infty, \frac{2}{e}[$ et f est bijective de $]0, e^2[$ sur $] -\infty, \frac{2}{e}[$. Enfin, f' ne s'annule pas sur $]0, e^2[$ et f est de classe C^∞ sur $]0, e^2[$. Donc f^{-1} est de classe C^∞ sur $] -\infty, \frac{2}{e}[$.

b) Posons $t = x - 1$ et $g(t) = f(x)$.

$$\text{Alors } g(t) = f(t+1) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{1+t}} = \ln(1+t)(1+t)^{-\frac{1}{2}} = \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o_0(t^4)\right) \left(1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 - \frac{5}{16}t^3 + \frac{35}{128}t^4 + o_0(t^4)\right)$$

$$g(t) = t \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + o_0(t^3)\right) \left(1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 - \frac{5}{16}t^3 + o_0(t^3)\right) = t \left(1 - t + \frac{23}{24}t^2 - \frac{44}{48}t^3 + o_0(t^3)\right)$$

$$g(t) = t - t^2 + \frac{23}{24}t^3 - \frac{11}{12}t^4 + o_0(t^4). \text{ Ainsi, } f(x) = (x-1) - (x-1)^2 + \frac{23}{24}(x-1)^3 - \frac{11}{12}(x-1)^4 + o_1((x-1)^4).$$

c) f^{-1} est de classe C^∞ sur $] -\infty, \frac{2}{e}[$ et $0 \in] -\infty, \frac{2}{e}[$. Donc Taylor Young assure que f^{-1} admet un $DL_4(0)$.

Il existe donc 5 uniques réels a, b, c, d, e tels que $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + o_0(x^4)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ et f admet un $DL_4(1)$, $f^{-1}(f(x))$ admet un $DL_4(1)$ telle que :

$$x = f^{-1}(f(x)) = a + bf(x) + cf(x)^2 + df(x)^3 + ef(x)^4 + o_1((x-1)^4).$$

Posons $h(t) = f^{-1}(f(t+1))$.

Alors, $t+1 = h(t) = a + bg(t) + cg(t)^2 + dg(t)^3 + eg(t)^4 + o_0(t^4)$ avec

$$g(t) = t - t^2 + \frac{23}{24}t^3 - \frac{11}{12}t^4 + o_0(t^4)$$

$$g(t)^2 = t^2 - 2t^3 + \frac{23}{12}t^4 + t^4 + o_0(t^4) = t^2 - 2t^3 + \frac{35}{12}t^4 + o_0(t^4)$$

$$g(t)^3 = g(t)g(t)^2 = t^3 - 3t^4 + o_0(t^4)$$

$$g(t)^4 = g(t)g(t)^3 = t^4 + o_0(t^4)$$

$$\text{Donc, } t+1 = a + b[t - t^2 + \frac{23}{24}t^3 - \frac{11}{12}t^4] + c[t^2 - 2t^3 + \frac{35}{12}t^4] + d[t^3 - 3t^4] + et^4 + o_0(t^4)$$

$$\text{i.e. } 1+t = a + bt + (c-b)t^2 + \left(\frac{23}{24}b - 2c + d\right)t^3 + \left(-\frac{11}{12}b + \frac{35}{12}c - 3d + e\right)t^4 + o_0(t^4).$$

$$\text{Alors par unicité de partir polynomiale du DL, } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c - b = 0 \\ \frac{23}{24}b - 2c + d = 0 \\ -\frac{11}{12}b + \frac{35}{12}c - 3d + e = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = 2 - \frac{23}{24} = \frac{25}{24} \\ e = \frac{11}{12} - \frac{35}{12} + \frac{25}{8} = -\frac{27}{24} = -\frac{9}{8} \end{cases}.$$

système linéaire échelonné !!

$$\text{Ainsi, } f^{-1}(x) = 1 + x + x^2 + \frac{25}{24}x^3 + \frac{9}{8}x^4 + o_0(x^4).$$

Ex 2 Décomposer en éléments simples $f(x) = \frac{x}{x^4 + x^2 + 1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$.

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= \left(x^2 - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(x^2 - e^{\frac{4i\pi}{3}}\right) = \left(x - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(x + e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(x - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(x + e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) \\ &= \left(x - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(x - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(x + e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(x + e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = \left(x - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(x - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)\left(x + e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(x + e^{-\frac{i\pi}{3}}\right) \\ &= \left(x^2 - 2\operatorname{Re}\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)x + \left|e^{\frac{i\pi}{3}}\right|^2\right)\left(x^2 + 2\operatorname{Re}\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)x + \left|e^{\frac{i\pi}{3}}\right|^2\right) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

De plus, $\deg(x) < \deg(x^4 + x^2 + 1)$. Donc la partie entière de f est nulle. Il existe donc 4 uniques réel a, b, c et d tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^4+x^2+1} = \frac{ax+b}{x^2-x+1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}. \text{ Alors,}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x}{x^4+x^2+1} = \frac{(ax+b)(x^2+x+1)+(cx+d)(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} = \frac{(a+c)x^3+(a+b-c+d)x^2+(a+b+c-d)x+b+d}{x^4+x^2+1}.$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, x = (a+c)x^3 + (a+b-c+d)x^2 + (a+b+c-d)x + b+d$. Alors, par unicité des coefficients d'une

$$\text{fonction polynomiale, } \begin{cases} a+c=0 \\ a+b-c+d=0 \\ a+b+c-d=1 \\ b+d=0 \end{cases} \text{ donc, } \begin{cases} a+c=0 \\ a-c=0 \\ b-d=1 \\ b+d=0 \end{cases} \text{ donc, } \begin{cases} a=0 \\ c=0 \\ 2b=1 \\ d=-b \end{cases} \text{ donc, } \begin{cases} a=0 \\ c=0 \\ b=\frac{1}{2} \\ d=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ainsi, } f(x) = \frac{x}{x^4+x^2+1} = \frac{\frac{1}{2}}{x^2-x+1} - \frac{\frac{1}{2}}{x^2+x+1}.$$

$$\text{Alors, } \sum_{k=0}^n \frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2-k+1} - \frac{1}{k^2+k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\underbrace{k(k-1)+1}_{u_k}} - \frac{1}{\underbrace{k(k+1)+1}_{u_{k+1}}} = \frac{1}{2} [u_0 - u_{n+1}] = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{n(n+1)+1} \right]. \text{ J'en déduis}$$

$$\text{que : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{2}.$$

Ex 3 Déterminer le reste de la division euclidienne de $(1-X)^n$ par $T(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.

Le théorème de la division euclidienne assure qu'il existe deux uniques polynômes Q et R à coefficients réels tels que :

$(1-X)^n = (X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1)Q(X) + R(X)$ et $\deg(R) < 4$. Alors $\deg(R) \leq 3$ donc il existe quatre uniques réels a, b, c, d tels que : $R(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Alors, $(1-X)^n = T(X)Q(X) + aX^3 + bX^2 + cX + d$.

Or, $\tilde{T}(-1) = 0$ et $\tilde{T}'(-1) = 0$. Donc Je peux factoriser T par $(X+1)^2$, j'obtiens en effectuant la division euclidienne :

$$T(X) = (X^2 + 2X + 1)(X^2 + 1) = (X+1)^2(X^2 + 1) = (X+1)^2(X-i)(X+i).$$

$$\text{Alors, } (1-X)^n \stackrel{*}{=} \underbrace{Q(X)(X+1)^2(X-i)(X+i)}_{U(X)} + aX^3 + bX^2 + cX + d \text{ et } -n(1-X)^{n-1} \stackrel{**}{=} U'(X) + 3aX^2 + 2bX + c.$$

Comme $U(X) = Q(X)(X+1)^2(X-i)(X+i)$, U admet -1 comme racine au moins double et i et $-i$ comme racines (au moins simples) ; par conséquent, $U(-1) = U'(-1) = 0 = U(i) = U(-i)$.

Alors en évaluant l'égalité * en -1 , i et $-i$, j'obtiens : $2^n = -a + b - c + d$ et $(1-i)^n = -ai - b + ci + d$ et $(1+i)^n = ai - b - ci + d$ (cette égalité est la conjuguée de la précédente puisque a, b, c, d sont réels)

En évaluant l'égalité ** en -1 , j'obtiens : $-n2^{n-1} = 3a - 2b + c$.

De plus, $(c-a)i - b + d = (1-i)^n = \sqrt{2}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n = \sqrt{2}^n \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} \right)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{-i\frac{n\pi}{4}} = 2^{\frac{n}{2}} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right]$. Comme $c-a$ et $d-b$ sont réels, je peux affirmer par unicité des parties réelles et imaginaires que :

$$c-a = -2^{\frac{n}{2}} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right] \text{ et } -b+d = 2^{\frac{n}{2}} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right]. \text{ Alors } a, b, c \text{ et } d \text{ vérifient le système linéaire : } \begin{cases} -a+b-c+d = 2^n \\ 3a-2b+c = -n2^{n-1} \\ c-a = -2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ -b+d = 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{cases}.$$

$$\text{Donc, } \begin{cases} c = a - 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ d = b + 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ -a+b-a+2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + b+2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 2^n \\ 3a-2b+a-2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = -n2^{n-1} \end{cases} \text{ puis } \begin{cases} c = a - 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ d = b + 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ -a+b = -2^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 2^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 2^{n-1} \text{ et} \\ 2a-b = 2^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - n2^{n-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = a - 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ d = b + 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ a = -2^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 2^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - n2^{n-2} = -2^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + (2-n)2^{n-2} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_4 \\ b = -2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 2^n + 2^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - n2^{n-2} = -2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 2^n - 2^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - n2^{n-2} \quad L_4 \leftarrow 2L_3 + L_4 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} c = -2^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + (2-n)2^{n-2} - 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ d = -2^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + (4-n)2^{n-2} \\ a = -2^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + (2-n)2^{n-2} \\ b = -2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 2^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + (4-n)2^{n-2} \end{cases} \text{ et } R(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d.$$

III Applications de la décomposition en éléments simples

Ex 1 Sachant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4 + 2k^3 + k^2}$.

Posons $f(x) = \frac{1}{x^4 + 2x^3 + x^2}$.

$x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 + 2x + 1) = x^2(x+1)^2$. Donc, f est définie sur $[1, +\infty[$ et il existe quatre uniques réels a, b, c , et d

tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}, f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$.

Alors $b = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)^2} = 1$ et $d = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2} = 1$.

Puis $a + c = \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(x+1)^2} = 0$ donc $c = -a$. Puis $f(1) = \frac{1}{4} = a + b + \frac{c}{2} + \frac{d}{4}$; donc $\frac{1}{4} = a + 1 - \frac{a}{2} + \frac{1}{4}$. Ainsi,

$a = -2, c = 2, b = 1$ et $d = 1$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}, f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$.

Alors, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4 + 2k^3 + k^2} = \sum_{k=1}^n 2\left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} = 2 \underbrace{\sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right)}_{\text{somme télescopique}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2}$

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4 + 2k^3 + k^2} = 2\left(-1 + \frac{1}{n+1}\right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} = 2\left(-1 + \frac{1}{n+1}\right) + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right) + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right) - 1 + \frac{1}{(n+1)^2}$

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4 + 2k^3 + k^2} = -3 + 2\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+1}$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4 + 2k^3 + k^2} = -3 + 2 \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3} - 3$.

Ex 2 Déterminer la dérivée nième de $f(x) = \frac{x^6 - 2x^5 + 1}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4}$.

Posons $n(x) = x^6 - 2x^5 + 1$ et $d(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$. Je remarque que $d(-1) = d'(-1) = 0$ et $d''(-1) \neq 0$.

Donc (-1) est racine double de d et $(x+1)^2$ divise d . Par division euclidienne, j'obtiens $d(x) = (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 4x + 4)$. Ainsi, $d(x) = (x+1)^2(x-2)^2$. J'en déduis :

- 1) f est définie puis de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ car f est le quotient de deux fonctions polynomiales et son dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.
- 2) La décomposition en éléments simples de f ne contiendra que des éléments simples de première espèce (car les racines de d sont toutes réelles) dont je sais déterminer les dérivées nièmes.

Décomposons donc f en éléments simples :

Par division euclidienne de n par d , j'obtiens : $n(x) = d(x)(x^2 + 3) + r(x)$ avec $r(x) = 2x^3 + 5x^2 - 12x - 11$. Alors,

$f(x) = x^2 + 3 + \frac{r(x)}{d(x)}$. Posons $g(x) = \frac{r(x)}{d(x)} = \frac{2x^3 + 5x^2 - 12x - 11}{(x+1)^2(x-2)^2}$. Le cours assure alors qu'il existe 4 uniques réels a, b, c , et d tels

que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}, g(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 12x - 11}{(x+1)^2(x-2)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}$.

Alors $b = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 5x^2 - 12x - 11}{(x-2)^2} = \frac{4}{9}$ et $d = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 + 5x^2 - 12x - 11}{(x+1)^2} = \frac{1}{9}$.

$a + c = \lim_{x \rightarrow +\infty} x g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 5x^3 - 12x^2 - 11x}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4} = 2$ et $a + b - \frac{c}{2} + \frac{d}{4} = g(0) = -\frac{11}{4}$ donc $\begin{cases} a + c = 2 \\ a - \frac{c}{2} = -\frac{11}{4} - \frac{1}{36} - \frac{4}{9} = -\frac{29}{9} \end{cases}$

Donc, $\begin{cases} \frac{3}{2}c = 2 + \frac{29}{9} & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 3a = -\frac{58}{9} + 2 & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \end{cases}$. Ainsi, $\begin{cases} c = \frac{94}{27} \\ a = -\frac{40}{27} \\ b = \frac{4}{9} \\ d = \frac{1}{9} \end{cases}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}, f(x) = x^2 + 3 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}$.

Déterminons la dérivée nième de f :

$\frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1} \xrightarrow{\frac{d^1}{dx}} -(x+1)^{-2} \xrightarrow{\frac{d^2}{dx^2}} (-1)(-2)(x+1)^{-3} \xrightarrow{\frac{d^3}{dx^3}} (-1)(-2)(-3)(x+1)^{-4} \dots \xrightarrow{\frac{d^n}{dx^n}} (-1)^n n! (x+1)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{(n+1)}}$

$\frac{1}{(x+1)^2} = (x+1)^{-2} \xrightarrow{\frac{d^1}{dx}} (-2)(x+1)^{-3} \xrightarrow{\frac{d^2}{dx^2}} (-2)(-3)(x+1)^{-4} \dots \xrightarrow{\frac{d^n}{dx^n}} (-1)^n (n+1)! (x+1)^{-(n+2)} = \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x+1)^{(n+2)}}$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}, f'(x) = 2x + \frac{40}{27} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{4}{9} \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{94}{27} \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{9} \frac{2}{(x-2)^3}$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}, f''(x) = 2 - \frac{40}{27} \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{4}{9} \frac{6}{(x+1)^4} + \frac{94}{27} \frac{2}{(x-2)^3} + \frac{1}{9} \frac{6}{(x-2)^4}$.

Puis $\forall n \geq 3, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}, f^{(n)}(x) = -\frac{40}{27} \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{(n+1)}} + \frac{4}{9} \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x+1)^{(n+2)}} + \frac{94}{27} \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{(n+1)}} + \frac{1}{9} \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x-2)^{(n+2)}}$.

Ex 2 Calculer $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{7}-1}{2}} \frac{1}{x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2} dx$

Posons $f(x) = \frac{1}{x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2}$ et $n(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2$.

En remarquant que 1 est racine au moins double de n (car $n(1) = n'(1) = 0$), je peux factoriser $n(x)$ par $(x-1)^2$ et j'obtiens, par division euclidienne, $n(x) = (x-1)^2 \underbrace{(x^2 + x + 2)}_{\Delta < 0}$. Comme $\left[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{7}-1}{2}\right] \subset]-\infty; 1[$, nous pouvons affirmer

que f est continue sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{7}-1}{2}\right]$ donc I existe. De plus, le cours assure qu'il existe 4 uniques réels a, b, c, d tels que :

$\forall x \neq 1, f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+x+2}$. Alors,

$$\begin{cases} b = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 f(x) = \frac{1}{4} \\ a + c = \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} = -a + b + \frac{d}{2} \text{ donc } d - 2a = \frac{1}{2} \\ f(-1) = \frac{1}{8} = -\frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{d-c}{2} \text{ donc } a + c - d = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Alors, $d = \frac{1}{8}$ (car $a + c = 0$) puis $a = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{16}$ et $c = \frac{3}{16}$.

Ainsi, $\forall x \neq 1, f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+2)} = -\frac{3}{16} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{16} \frac{3x+2}{x^2+x+2}$.

Alors, $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{7}-1}{2}} -\frac{3}{16} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{7}-1}{2}} \frac{1}{16} \frac{3x+2}{x^2+x+2} dx$ car toutes les intégrandes sont continues sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{7}-1}{2}\right]$.

Donc, $I = \left[-\frac{3}{16} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \frac{1}{x-1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{7}-1}{2}} + \frac{1}{16} \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{7}-1}{2}} \frac{3x+2}{x^2+x+2} dx}_{=J} = -\frac{3}{16} \ln \left| \frac{\sqrt{7}-3}{2} \right| - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{7}-3} + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{3}{2} \right| - \frac{1}{6} + \frac{1}{16} J$.

De plus, $\frac{3x+2}{x^2+x+2} = \frac{\frac{3}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}}{x^2+x+2} = \frac{3}{2} \frac{(2x+1)}{x^2+x+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+2}$.

Donc, $J = \frac{3}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{7}-1}{2}} \frac{(2x+1)}{x^2+x+2} dx + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{7}-1}{2}} \frac{1}{x^2+x+2} dx}_{=K} = \frac{3}{2} [\ln(x^2+x+2)]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{7}-1}{2}} + \frac{1}{2} K = \frac{3}{2} \left[\ln\left(\frac{7}{2}\right) - \ln\left(\frac{7}{4}\right) \right] + \frac{1}{2} K$

$J = \frac{3}{2} [\ln(2)] + \frac{1}{2} K$.

Enfin, $x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \left[\frac{4}{7} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] = \frac{7}{4} \left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1\right]$. Alors, $K = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{7}-1}{2}} \frac{1}{x^2+x+2} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{7}-1}{2}} \frac{1}{\frac{7}{4} \left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1\right]} dx =$

$\frac{4}{7} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{7}-1}{2}} \frac{1}{\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1\right]} dx = \frac{4}{7} \int_0^1 \frac{1}{[u^2+1]} \frac{\sqrt{7}}{2} du = \frac{2}{\sqrt{7}} [\text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(0)] = \frac{\pi}{2\sqrt{7}}$.

Ainsi, $J = \frac{3}{2} \ln(2) + \frac{\pi}{4\sqrt{7}}$.

Et $I = -\frac{3}{16} \ln \left| \frac{\sqrt{7}-3}{2} \right| - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{7}-3} + \frac{3}{16} \ln \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{1}{6} + \frac{3}{32} \ln(2) + \frac{\pi}{64\sqrt{7}} = -\frac{3}{16} \ln \left| \frac{\sqrt{7}-3}{2} \right| + \frac{\sqrt{7}+3}{4} + \frac{3}{16} \ln \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{1}{6} + \frac{3}{32} \ln(2) + \frac{\pi}{64\sqrt{7}}$

$I = -\frac{3}{16} \ln(3 - \sqrt{7}) + \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{7}{12} + \frac{3}{32} [2 \ln(3) + \ln(2)] + \frac{\pi}{64\sqrt{7}}$.

III Systèmes linéaires

un grand classique p et q sont des paramètres. Soit $(S): \begin{cases} x + y = p \\ x - y = q \end{cases}$.

$$(S): \begin{cases} x + y = p \\ x - y = q \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_1 - L_2]{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} (S'): \begin{cases} 2x = p + q \\ 2y = p - q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p+q}{2} \\ y = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

Pour être certain que $S \Leftrightarrow S'$, il faut vérifier que l'on peut passer de S à S' et de S' à S en effectuant des opérations élémentaires autorisées (notamment sans diviser par zéro).

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $(S): AX = B$.

$$(S): \begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases} \xrightarrow[L_1 \leftarrow \frac{1}{29}(5L_1 + 3L_2)]{L_1 \leftarrow 4L_1 - 3L_2, L_2 \leftarrow 3L_1 + 5L_2} (S'): \begin{cases} 29y = 18 \\ 29x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{29} \\ y = \frac{18}{29} \end{cases} \text{ Donc } \text{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{29} \\ \frac{18}{29} \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(S): \begin{cases} 3x - y = 3 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} (S): \begin{cases} 3x - y = 3 \\ -6x + 2y = -2 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} (S): \begin{cases} 3x - y = 3 \\ 0 = -1 \end{cases}. (S) \text{ est donc incompatible.}$$

$$(S): \begin{cases} 3x - y = 3 \\ -6x + 2y = -6 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} (S): \begin{cases} 3x - y = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y = 3x - 3 \\ 0 = 0 \end{cases}. (S) \text{ est donc compatible et } Sol(S) = \{(x, 3x - 3)/x \in \mathbb{R}\}$$

Résolution par échelonnement de systèmes de 3 équations à 3 inconnues:

je ne modifie pas L_1 descente

$$S_1: \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 7x - 2y + 4z = 0 \\ 5x - y + 2z = -1 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 11x + 2z = 2 \\ 7x + z = 0 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 7x + z = 0 \\ 11x + 2z = 2 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2]{L_2 \text{ et } L_1 \text{ inchangées}} \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 7x + z = 0 \\ -3x = 2 \end{cases}$$

je ne modifie pas L_1 remontée

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + z - 2x \\ z = -7x \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + z - 2(-\frac{2}{3}) = \frac{7}{3} + z \\ z = (-7) \times (-\frac{2}{3}) = \frac{14}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{3} + \frac{14}{3} = 7 \\ z = \frac{14}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}. \text{ Ainsi, } Sol(S_1) = \{(-\frac{2}{3}; \frac{14}{3}; 7)\}.$$

système échelonné

je ne modifie pas L_1 remontée

$$S_2: \begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ x - 7y + 5z = -2 \\ 3x - 4y + 2z = -1 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{cases} x - 7y + 5z = -2 \\ 2x + 3y - 3z = 1 \\ 3x - 4y + 2z = -1 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{cases} x - 7y + 5z = -2 \\ 17y - 13z = 5 \\ 17y - 13z = 5 \end{cases}$$

je ne modifie pas $L_1, ni L_2$ remontée

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ 17y - 13z = 5 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ 17y - 13z = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

je ne modifie pas $L_1, ni L_2$ remontée

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}z - \frac{3}{2}(\frac{5}{17} + \frac{13}{17}z) \\ y = \frac{5}{17} + \frac{13}{17}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{17} + \frac{4}{17}z \\ y = \frac{5}{17} + \frac{13}{17}z \end{cases}. \text{ Ainsi, } Sol(S_2) = \{(\frac{1}{17} + \frac{4}{17}z, \frac{5}{17} + \frac{13}{17}z, z)/z \in \mathbb{R}\}.$$

système échelonné et compatible

$$S_5: \begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ 10x - 2y + 4t = 0 \\ 5x - y + 2t = -1 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ 0 = 2 \\ 5x - y + 2t = -1 \end{cases} \text{ Donc, } Sol(S_5) = \emptyset.$$

Inconnues principales

je ne modifie pas L_1 remontée

$$S_6: \begin{cases} 2x + y + 4z + 7t + w = 2 \\ 3x - y + 3z = 1 \\ 5x + y + z + t + 2w = 8 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{cases} 5x + y + z + t + 2w = 8 \\ 3x - y + 3z = 1 \\ 2x + y + 4z + 7t + w = 2 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 7L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} 5x + y + z + t + 2w = 8 \\ 3x - y + 3z = 1 \\ -33x - 6y - 3z - 13w = -54 \end{cases}$$

Système échelonné

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 11L_2]{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} 5x + y + z + t + 2w = 8 \\ -33x - 6y - 3z - 13w = -54 \\ 3x - y + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-19}{39} - \frac{10}{39}y + \frac{8}{13}x \\ w = \frac{1}{13}(53 - 7y - 30x) \\ z = \frac{1}{3}(1 + y - 3x) \end{cases}$$

REMONTÉE

Donc, $Sol(S_6) = \{(x, y, \frac{1}{3}(1 + y - 3x), \frac{1}{13}(53 - 7y - 30x), -\frac{19}{39} - \frac{10}{39}y + \frac{8}{13}x)/x, y \text{ réels}\}.$

Inconnues secondaires

je ne touche plus à L_1 remontée

$$S_7: \begin{cases} x + y + 4z + 7t = 2 \\ x + 2y + 4z + 5t = 0 \\ x - y + 3z + 2t = 1 \\ x + y + z + t = 8 \end{cases} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y + 4z + 7t = 2 \\ y - 2t = -2 \\ -2y - z - 5t = -1 \\ -3z - 6t = 6 \end{cases} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2]{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x + y + 4z + 7t = 2 \\ -2y - z - 5t = -1 \\ y - 2t = -2 \\ -3z - 6t = 6 \end{cases}$$

j'utilise L_1 pour éliminer les x dans les lignes L_2, L_3, L_4 remontée

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + 6L_3]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} x + y + 4z + 7t = 2 \\ -2y - z - 5t = -1 \\ y - 2t = -2 \\ 21t = 21 \end{cases} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + 21L_3]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} x + y + 4z + 7t = 2 \\ -2y - z - 5t = -1 \\ y - 2t = -2 \\ 1t = 1 \end{cases}$$

j'utilise L_3 pour éliminer y dans L_4 remontée

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} x + y + 4z + 7t = 2 \\ -2y - z - 5t = -1 \\ y - 2t = -2 \\ x = 11 \end{cases} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} x + y + 4z + 7t = 2 \\ -2y - z - 5t = -1 \\ y - 2t = -2 \\ z = -4 \end{cases}$$

j'utilise L_3 pour éliminer y dans L_4 remontée

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} x + y + 4z + 7t = 2 \\ -2y - z - 5t = -1 \\ y - 2t = -2 \\ y = 0 \end{cases} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} x + y + 4z + 7t = 2 \\ -2y - z - 5t = -1 \\ y - 2t = -2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Donc, $Sol(S_7) = \{(11, 0, -4, 1)\}$

Pivot = coefficient non nul utilisé pour éliminer l'inconnue correspondante dans les lignes suivantes. On essaie de choisir ou faire apparaître un pivot égal à ± 1 pour simplifier les calculs.

Comme j'utilise une seule et même ligne pour éliminer une inconnue sur les autres lignes, il y a équivalence !!

j'utilise L_2 pour éliminer les z dans les lignes L_3, L_4

$$\bullet S_8: \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 - L_3} \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \\ 0 = -3 \end{cases} \text{ Donc, } \text{Sol}(S_8) = \emptyset.$$

$$\bullet S_{8bis} :: \begin{cases} 5x + 3y + 7z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 1 \\ 6x + 4y - 2z = 3 \end{cases} \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_3]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x - y + 9z = -3 \\ 3x - 2y + 4z = 1 \\ 6x + 4y - 2z = 3 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1]{L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1} \begin{cases} -x - y + 9z = -3 \\ -5y + 31z = -8 \\ -2y + 52z = -15 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3]{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{cases} -x - y + 9z = -3 \\ y - 73z = 22 \\ -2y + 52z = -15 \end{cases}$$

je fais apparaître un pivot égal à ± 1

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3} \begin{cases} -x - y + 9z = -3 \\ -y - 73z = 22 \\ 198z = -59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{49}{198} + 9(-\frac{59}{198}) = \frac{56}{99} \\ y = 73 \times \frac{59}{198} - 22 = -\frac{49}{198} \\ z = -\frac{59}{198} \end{cases} \text{ Donc, } \text{Sol}(S_{8bis}) = \left\{ \left(\frac{56}{99}; -\frac{49}{198}; -\frac{59}{198} \right) \right\}.$$

je fais apparaître un pivot égal à ± 1

Résolution par substitution :

$$S_9: \begin{cases} 5x + z = 0 \\ 3x - y + 2z = -1 \\ 2y + 3z = 2 \end{cases} \quad (\text{un système de 3 équations à 3 inconnues.})$$

$$S_9: \begin{cases} 5x + z = 0 \\ 3x - y + 2z = -1 \\ 2y + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}z \\ 3(-\frac{1}{5}z) - (\frac{1}{2} - \frac{3}{2}z) + 2z = -1 \\ y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}z \\ (-\frac{3}{5} + \frac{3}{2} + 2)z = -\frac{1}{2} \\ y = 2 - 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}z \\ (\frac{29}{10})z = -\frac{1}{2} \\ y = 2 - 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{29} \\ z = -\frac{5}{29} \\ y = 2 + \frac{15}{29} = \frac{73}{29} \end{cases} \text{ Ainsi,}$$

$$\text{Sol}(S_9) = \left\{ \left(\frac{1}{29}; -\frac{5}{29}; \frac{73}{29} \right) \right\}.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_{9b}: AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ (S_{9b} un système de 3 équations à 4 inconnues). Alors,

$$S_{9b} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2z = 1 \\ t + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + 3z \\ x = 1 + 2z \\ t = 2 - z \end{cases} \text{ Donc, } \text{Sol}(S_{9b}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + 2z \\ 1 + 3z \\ z \\ 2 - z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Des systèmes où l'on hésite : $S_{10}: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z + t = 1 \\ y + t + z = 2 \\ x + y + t = -1 \end{cases}$. On peut mixer les méthodes mais je vérifie toutes mes équivalences !!!

$$S_{10}: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z + t = 1 \\ y + t + z = 2 \\ x + y + t = -1 \end{cases} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ t - y = 1 \\ y + t + z = 2 \\ t - z = -1 \end{cases} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = t - 1 \\ y + t + z = 2 \\ t - z = -1 \end{cases} \xrightarrow[\text{par substitution}]{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = t - 1 \\ t - 1 + t + t + 1 = 2 \\ z = t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ t = \frac{2}{3} \\ z = \frac{5}{3} \end{cases} \text{ Donc, } \text{Sol}(S_{10}) = \left\{ \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}.$$

$$\blacksquare S_{11}: \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ 3x + 2y + mz = 3 \\ (m-1)x + my + (m+1)z = m \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - (m-1)L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ (2-3m)y + (m-3m+3)z = 3 \\ (m-m(m-1))y + ((m+1)-(m-1)^2)z = m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ (2-3m)y + (-2m+3)z = 3 \\ (2m-m^2)y + (3m-m^2)z = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ (2-3m)y + (-2m+3)z = 3 \\ (2-m)my + (3-m)mz = m \end{cases}$$

1er cas $m = 0$. Alors $S_{11} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2y + 3z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -\frac{3}{2}z + \frac{3}{2} \end{cases} \text{ Donc, } \text{Sol}(S_{11}) = \left\{ \left(-2z, -\frac{3}{2}z + \frac{3}{2}, z \right) / z \in \mathbb{R} \right\}.$

2ème cas $m \neq 0$. Alors $S_{11} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ (2-3m)y + (-2m+3)z = 3 \\ (2-m)y + (3-m)z = 1 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3]{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3-m}{3}L_2} \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ (-2-m)y - 3z = 1 \\ (2-m)y + (3-m)z = 1 \end{cases}$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3-m}{3}L_2]{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3} \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ (-2-m)y - 3z = 1 \\ (2-m) + \frac{3-m}{3}(-2-m)y = 1 + \frac{3-m}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ (-2-m)y - 3z = 1 \\ (m^2 - 4m)y = 6 - m \end{cases}$$

1er sous-cas : $m \neq 0$ et $m = 4$. Alors, $S_{11} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ (-2-m)y - 3z = 1 \end{cases}$. Ainsi, $Sol(S_{11}) = \emptyset$.

2ème sous-cas : $m \neq 0$ et $m \neq 4$. Alors, $S_{11} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m^2-2m-4}{m(m-4)} \\ z = -\frac{4}{m(m-4)} \\ y = \frac{6-m}{m(m-4)} \end{cases}$. Ainsi, $Sol(S_{11}) = \left\{ \left(\frac{m^2-2m-4}{m(m-4)}, \frac{6-m}{m(m-4)}, -\frac{4}{m(m-4)} \right) \right\}$.

■ $S_{12} : \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_1 + L_3]{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3} \begin{cases} x + 2y - z = a \\ 0 = b + a + c \\ x + y - 2z = c \end{cases}$

1er cas : $a + b + c = 0$. Alors $S_{12} : \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = a \\ x + y - 2z = c \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -y - z = c - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z - a + 2c \\ y = -z + a - c \end{cases}$

Donc, $Sol(S_{12}) = \{(3z - a + 2c, -a + a - c, z) / z \in \mathbb{R}\}$.

2ème cas : $a + b + c \neq 0$. Alors $Sol(S_{12}) = \emptyset$.

■ $S_{13} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = \lambda x \\ x + y + z = \lambda y \\ x + y + z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + y + z = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases} \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3]{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3} \begin{cases} (3-\lambda)x + (3-\lambda)y + (3-\lambda)z = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$

1er cas : $\lambda = 3$. $S_{13} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$. Donc, $Sol(S_{13}) = \{(z, z, z) / z \in \mathbb{R}\}$.

2ème cas : $\lambda \neq 3$. $S_{13} \xrightarrow[L_1 \leftarrow (3-\lambda)L_1]{L_1 \leftarrow \frac{1}{3-\lambda}L_1} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -\lambda y = 0 \\ -\lambda z = 0 \end{cases}$.

1er sous-cas : $\lambda = 0$. Alors, $S_{13} \Leftrightarrow x = -y - z$. Donc, $Sol(S_{13}) = \{(-y - z, y, z) / (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$.

2ème sous-cas : $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 3$. Alors, $S_{13} \Leftrightarrow x = y = z = 0$. Donc, $Sol(S_{13}) = \{(0, 0, 0)\}$.