Corrigé du TD 6 : Applications, injections, surjections et bijections.

Ex 1 Pour chacune des fonctions f suivantes et des ensembles A et B proposés,

A. Décrire géométriquement $f(A)$ et $f^{-1}\langle B\rangle$.

B. Préciser si f est injective et/ou surjective et/ou bijective de Df sur un domaine F à préciser et le cas échéant déterminer f^{-1}.

1. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que : $f(a,b) = 2a + 3b$ et $B = \{5\}$ et $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2y\}$.
2. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que : $f(x,y,z) = (2x - y + z, x - y + z, y - 2z)$ et $A = \{(x,x,x)/x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / a + b + c = 0\}$.
3. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que : $f(a,b) = (2a + b, a - b - 1, 3b - a)$ et $A = \{(x,y)/x = y\}$ et $B = \{(x,y,z)/2x + y - z = 1\}$.
4. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ telle que : : $f(a,b) = (2a - b) + i(a + 2b)$ et $A = \{(a,b)/\ a + 2b - 1 = 0\}$ et $B = \{\ z \in \mathbb{C}\ /\ |z| = 3\}$.
5. $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{-2 - i\}$, $f(z) = \frac{2+i-z}{iz-1+2i}$ et $A = \{z \in \mathbb{C}/Im(z) = -1\}$ et $B = \{\ z \in \mathbb{C}\ /\ |z| = 1\}$ puis $B' = \mathbb{R}$.
6. $f: \begin{pmatrix} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2 + z + 1 \end{pmatrix}$ et $A = B = \mathbb{R}$.

1. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que : $f(a,b) = 2a + 3b$ et $B = \{5\}$ et $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2y\}$.

Injectivité $f(0,0) = f(-3,2)$ Donc f n'est pas injective sur $\mathbb{R}^2$. Et par conséquent, f n'est pas bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Surjectivité Pour tout $y \in \mathbb{R}, y = f\left(\frac{y}{2}, 0\right)$. Donc tout réel a au moins un antécédent par f . Ainsi, f est surjective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$

Image directe $f(A) = \{f(x,y)/(x,y) \in A\} = \{f(x,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2 et\ x = 2y\} = \{f(2y,y)/y \in \mathbb{R}\} = \{2(2y) + 3y/y \in \mathbb{R}\} = \{7y/y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Image réciproque $f^{-1}\langle B\rangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) \in B\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 3y = 5\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x\} = \left\{\left(x, \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x\right)/x \in \mathbb{R}\right\}$. Les points M$(x,y)$ $\in$P tq $y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x$, constituant $f^{-1}\langle B\rangle$, sont les points de la droite d'équation $2x + 3y = 5$, la droite passant par $A\left(0, \frac{5}{3}\right)$ et dirigée par $\vec{u} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$.

2. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que : $f(x,y,z) = (2x - y + z, x - y + z, y - 2z)$ et $A = \{(x,x,x)/x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / a + b + c = 0\}$.

Injectivité, surjectivité et bijectivité : méthode de l'équation

Soit $Y = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Résolvons l'équation $f(X) = Y$ d'inconnue $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, afin de déterminer le nombre d'antécédents de Y par f.

$$f(X) = Y \Leftrightarrow f(x,y,z) = (a,b,c) \Leftrightarrow (2x - y + z, x - y + z, y - 2z) = (a,b,c) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = a \\ x - y + z = b \\ y - 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b \\ x - y + z = b \\ y - 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = a - b \\ a - b - y + z = b \\ y - 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b \\ -y + z = 2b - a \\ y - 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b \\ -y + z = 2b - a \\ -z = c + 2b - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b \\ y = 2a - 4b - c \\ z = a - c - 2b \end{cases} \Leftrightarrow X = (a - b, 2a - 4b - c, a - c - 2b).$$

Donc $Y = (a,b,c)$ admet un unique antécédent par f qui est $(a - b, 2a - 4b - c, a - c - 2b)$. Donc f est bijective de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$ et $\forall(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, f^{-1}(a,b,c) = (a - b, 2a - 4b - c, a - c - 2b)$.Alors est injective et surjective.

Image directe : $f(A) = \{f(x,x,x)/x \in \mathbb{R}\} = \{(2x,x,-x)/x \in \mathbb{R}\} = \{x(2,1,-1)/x \in \mathbb{R}\}$. Les points $M(2x,x,-x)$ tq $x \in \mathbb{R}$ sont les points de l'espace géométrique situé sur la droite passant par O et dirigée par $\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$.

Image réciproque : $f^{-1}\langle B\rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) \in B\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z + x - y + z + y - 2z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - y = 0\} = \{(x, 3x, z)/x\ et\ z\ réels\} = \{x(1,3,0) + z(0,0,1)/x\ et\ z\ réels\}$. Les points $M(x, 3x, z)$ $tq\ x\ et\ z\ réels$ sont les points du plan P passant par O et dirigée par : $\vec{u}(1,3,0)$ et $\vec{v}(0,0,1)$ puisque $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + z\vec{v}$.

Rque : $f^{-1}\langle B\rangle = f^{-1}(B) = \{f^{-1}(a,b,c)/(a,b,c) \in B\} = \{(a - b, 2a - 4b - c, a - c - 2b)/(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 et\ a + b + c = 0\}$

$= \{(a - b, 2a - 4b - c, a - c - 2b)/(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 et\ a = -b - c\}$

$= \{(-b - c - b, 2(-b - c) - 4b - c, (-b - c) - c - 2b)/(b,c) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{(-2b - c, -3c - 6b, -2c - 3b)/(b,c) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{(2b + c, 3c + 6b, 2c + 3b)/(b,c) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{b(2,6,3) + c(1,3,2)/(b,c) \in \mathbb{R}^2\}$ représenté par P aussi !!!

7. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que : $f(a,b) = (2a + b, a - b - 1, 3b - a)$

Injectivité, surjectivité et bijectivité : méthode de l'équation

Soit $Y = (u,v,w) \in \mathbb{R}^3$. Résolvons l'équation $f(X) = Y$ d'inconnue $X = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, afin de déterminer le nombre d'antécédents de Y par f.

$$f\Big(\underbrace{X}_{inconnue}\Big) = Y \Leftrightarrow f\ \underbrace{(a,b)}_{inconnue} = (u,v,w) \Leftrightarrow (2a + b, a - b - 1, 3b - a) = (u,v,w) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = u \\ a - b - 1 = v \\ 3b - a = w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 1 = u + v \\ 3b + 2 = u - 2v \\ 3b - a = w \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3}(u + v + 1) \\ b = \frac{1}{3}(u - 2v - 2) \\ u - 2v - 2 - \frac{1}{3}(u + v + 1) = w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3}(u + v + 1) \\ b = \frac{1}{3}(u - 2v - 2) \\ \underbrace{2u - 7v - 3w = 7}_{équation\ de\ compatibilité} \end{cases}.$$

Donc si $Y = (u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ ne vérifie pas $2u - 7v - 3w = 7$ alors l'équation $f(X) = Y$ est impossible ; autrement dit, Y n'a pas d'antécédent par f. En particulier, le triplet $(0,0,0)$ n'a pas d'antécédent par f. J'en conclus que f n'est pas surjective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^3$. Et ainsi, f n'est pas bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.

Par contre si $Y = (u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ vérifie $2u - 7v - 3w = 7$ alors l'équation $f(X) = Y$ admet $X = (\frac{1}{3}(u + v + 1), \frac{1}{3}(u - 2v - 2))$ comme unique solution, donc un tel Y admet un seul antécédent par f qui est $= (\frac{1}{3}(u + v + 1), \frac{1}{3}(u - 2v - 2))$

Alors, d'après ce qui précède , un triplet $Y = (u,v,w)$, quelconque, admet 0 antécédent (si $2u - 7v - 3w \neq 7$) ou 1 antécédent (si $2u - 7v - 3w = 7$) par f . J'en conclus que f est injective. De plus, je peux désormais affirmer que $Im(f) = f(\mathbb{R}^2) = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3\ /\ 2u - 7v - 3w = 7\}$ et f induit une bijection $f_|$ de $\mathbb{R}^2$ sur $Im(f)$ et $f_|^{-1}: \begin{pmatrix} Im(f) \to \mathbb{R}^2 \\ (u,v,w) \mapsto (\frac{1}{3}(u + v + 1), \frac{1}{3}(u - 2v - 1)) \end{pmatrix}$.

8. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ telle que : : $f(a,b) = (2a - b) + i(a + 2b)$ et $A = \{(a,b)/\ a + 2b - 1 = 0\}$ et $B = \{\ z \in \mathbb{C}\ /\ |z| = 3\}$.

Injectivité, surjectivité et bijectivité : méthode de l'équation

Soit $Y = u + iv \in \mathbb{C}$. Résolvons l'équation $f(X) = Y$ d'inconnue $X = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, afin de déterminer le nombre d'antécédents de Y par f.

$f\Big(\underbrace{X}_{inconnue}\Big)=Y \Leftrightarrow f\ \underbrace{(a,b)}_{inconnue} = u+iv \Leftrightarrow (2a-b)+i(a+2b)=u+iv \Leftrightarrow \begin{cases}2a-b=u\\ a+2b=v\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5a=v+2u\\ 5b=2v-u\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{v+2u}{5}\\ b=\frac{2v-u}{5}\end{cases}$

Donc chaque $Y=u+iv\in\mathbb{C}$ admet $X=\left(\frac{v+2u}{5},\frac{2v-u}{5}\right)$ comme unique antécédent par f. Donc f est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$ et $\forall Y=u+iv\in\mathbb{C}, f^{-1}(u+iv)=\left(\frac{v+2u}{5},\frac{2v-u}{5}\right)$.Alors f est injective et surjective.

Image directe : $f(A)=\{f(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2 et\ a=1-2b\}=\{(2(1-2b)-b)+i(1-2b+2b)/b\ \in\mathbb{R}\}=\{2-5b+i/b\ \in\mathbb{R}\}$ $\underset{\substack{car\ (b\mapsto 2-5b) est\ bijective\\ de\ \mathbb{R}\ sur\ \mathbb{R}}}{=}$ $\{x+i/\ x\in\mathbb{R}\}$. Donc $f(A)$ est représentée, dans le plan complexe, par la droite d'équation $y=1$.

Image réciproque : $f^{-1}\langle B\rangle=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2/f(a,b)\in B\}=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2/|f(a,b)|=3\}$
$=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2/\sqrt{(2a-b)^2+(a+2b)^2}=3\}=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2/\ 3a^2+3b^2=9\}=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2/\ a^2+b^2=3\}$. Donc $f^{-1}\langle B\rangle$ est représentée par le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

9. $\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{-2-i\},\ f(z)=\frac{2+i-z}{iz-1+2i}$ et $A=\{z\in\mathbb{C}/Im(z)=-1\}$ et $B=\{\ z\in\mathbb{C}\ /\ |z|=1\}$ puis $B'=\mathbb{R}$.

Injectivité, surjectivité et bijectivité : méthode de l'équation

$f\ (z) existe\ \Leftrightarrow iz-1+2i\neq 0 \Leftrightarrow z\neq\frac{1-2i}{i}\Leftrightarrow z\neq -2-i.$

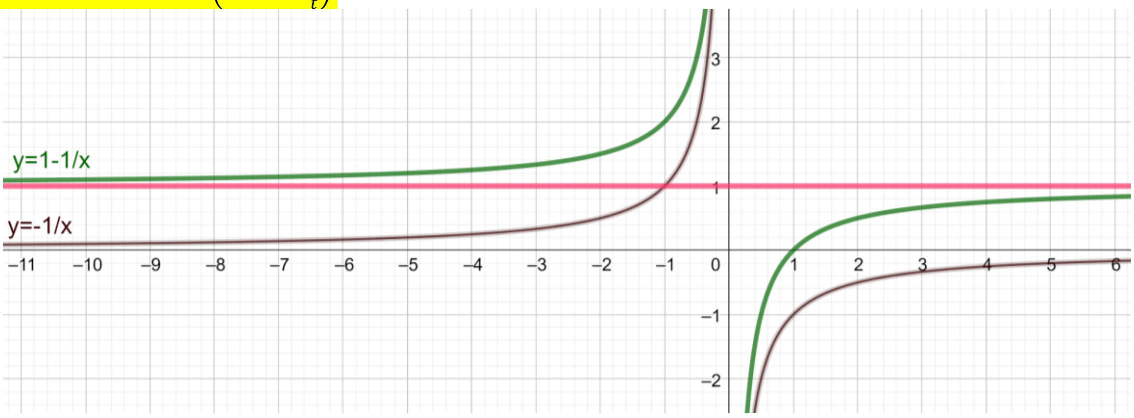
Soit $y\in\mathbb{C}$. Résolvons l'équation $f(z)=y$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}\backslash\{-2-i\}$, afin de déterminer le nombre d'antécédents de y par f.

$f\Big(\underbrace{z}_{inconnue}\Big)=y\Leftrightarrow\frac{2+i-z}{iz-1+2i}=y\Leftrightarrow\ 2+i-z=y(iz-1+2i)\Leftrightarrow(-1-iy)z=-2-i+(2i-1)y$

$\underset{\substack{car\\ -1-iy=0\\ \Leftrightarrow y=-\frac{1}{i}=i}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}z=\frac{-2-i+(2i-1)y}{(-1-iy)}si\ y\neq i\\ 0=-4\ si\ y=i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\frac{(2i-1)y-(2+i)}{(-1-iy)}si\ y\neq i\\ imposible\ \ si\ y=i\end{cases}$. J'en déduis que i n'a pas d'antécédents par f donc f n'est pas surjective de $\mathbb{C}\backslash\{-2-i\}\ sur\ \mathbb{C}$. Et tout complexe $y\neq i$ admet un unique antécédent $\frac{(2i-1)y-(2+i)}{(-1-iy)}$ par f. Et par suite, tout complexe y a 0 (si $y=i$) ou 1 (si $y\neq i$) antécédent par f. Donc f est injective et $f(\mathbb{C}\backslash\{-2-i\})=\mathbb{C}\backslash\{i\}$ et f réalise une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{-2-i\}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ et $\forall y\in\mathbb{C}\backslash\{i\}, f^{-1}(y)=\frac{(2i-1)y-(2+i)}{(-1-iy)}$.

Image directe : $f(A)=\{f(z)/z\in\mathbb{C}\ et\ Im(z)=-1\}=\{f(x-i)/x\in\mathbb{R}\backslash\{-2\}\}=\left\{\frac{2+i-x+i}{ix+1-1+2i}/x\in\mathbb{R}\backslash\{-2\}\right\}$
$=\left\{\frac{2-x+2i}{(2+x)i}/x\in\mathbb{R}\backslash\{-2\}\right\}=\left\{\frac{2-x+2i}{(2+x)}(-i)/x\in\mathbb{R}\backslash\{-2\}\right\}=\left\{\frac{(x-2)i+2}{(2+x)}/x\in\mathbb{R}\backslash\{-2\}\right\}=\left\{\frac{2}{(2+x)}\left(1+\frac{(x-2)}{2}i\right)/x\in\mathbb{R}\backslash\{-2\}\right\}$

$f(A)\underset{\substack{car\begin{cases}t=\frac{2}{2+x}\\ x\neq-2\end{cases}\\ \Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{t}-2\\ t\neq0\end{cases}}}{=}\left\{t\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{t}-2\right)i\right)/t\in\mathbb{R}^*\right\}=\left\{t+\left(1-\frac{1}{t}\right)i/t\in\mathbb{R}^*\right\}$. Donc $f(A)$ est représentée, dans le plan complexe, par l' hyperbole, courbe de la fonction $\left(t\mapsto 1-\frac{1}{t}\right)$.



Images réciproques :

- $f^{-1}\langle B\rangle=\{\ z\in\mathbb{C}\backslash\{-2-i\}/|f(z)|=1\}=\left\{z\in\mathbb{C}\backslash\{-2-i\}/\left|\frac{2+i-z}{iz-1+2i}\right|=1\right\}=\left\{z\in\mathbb{C}\backslash\{-2-i\}/\frac{|2+i-z|}{|iz-1+2i|}=1\right\}=\{z\in\mathbb{C}\backslash\{-2-i\}/|2+i-z|=|iz-1+2i|\}$. Or , $|2+i-z|=|iz-1+2i|\Leftrightarrow|2+i-z|=\left|i\left(z-\frac{1}{i}+2\right)\right|\Leftrightarrow|2+i-z|=|i||(z+i+2)|$

$\Leftrightarrow|2+i-z|=|(z+i+2)|\ \underset{\substack{Aff(A)=2+i\\ Aff(B)=-2-i}}{\Leftrightarrow}\ MA=MB\Leftrightarrow M\in med[A,B]$

$\Leftrightarrow M est\ sur\ la\ droite\ passant\ par\ O\ et\ dirigée\ par\ \vec{u}=\vec{\imath}-2\vec{\jmath}.$

Donc $f^{-1}\langle B\rangle$ est représentée dans le plan complexe par cette droite $passant\ par\ O\ et\ dirigée\ par\ \vec{u}=\vec{\imath}-2\vec{\jmath}.$

- $f^{-1}\langle B'\rangle=\{\ z\in\mathbb{C}\backslash\{-2-i\}/f(z)\in\mathbb{R}\}=\left\{\ z\in\mathbb{C}\backslash\{-2-i\}/\frac{2+i-z}{iz-1+2i}\in\mathbb{R}\right\}$

$=\left\{z\in\mathbb{C}\backslash\{-2-i\}/2+i-z=0\ ou\ arg\left(\frac{2+i-z}{iz-1+2i}\right)\equiv0[\pi]\right\}$

Or , $arg\left(\frac{2+i-z}{iz-1+2i}\right)\equiv0[\pi]\Leftrightarrow arg\left(\frac{2+i-z}{i(z+i+2)}\right)\equiv0[\pi]\Leftrightarrow arg\left(\frac{2+i-z}{z+i+2}\right)-\arg(i)\equiv0[\pi]\ \underset{\substack{Aff(A)=2+i\\ Aff(B)=-2-i}}{\Leftrightarrow}\ (\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{MA}})\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\Leftrightarrow$

$M\ est\ sur\ le\ cercle\ de\ diamètre\ [A,B]$.Donc, $f^{-1}\langle B'\rangle$ est représentée dans le plan complexe par le cercle de diamètre $[A,B]$.

10. $f:\begin{pmatrix}\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ z\mapsto z^2+z+1\end{pmatrix}$ et $A=B=\mathbb{R}$.

Injectivité, surjectivité et bijectivité : méthode de l'équation

Soit $y \in \mathbb{C}$. L'équation $f(z) = y$ d'inconnue complexe z est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 1 - 4(1-y) = -3 + 4y$. Donc si $y = \frac{3}{4}$ $i.e.\Delta = 0$ alors cette équation admet une unique solution mais si $y \neq \frac{3}{4}$ $i.e.\Delta \neq 0$, cette équation admet donc deux solutions distinctes . Donc tout complexe distinct de ¾ a deux antécédents. J'en déduis que f n'est pas injective mais est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

Image directe : $f(A) = f(\mathbb{R}) = \{x^2 + x + 1 / x \in \mathbb{R}\} = Im(g)$ où $g: \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 + x + x^2 \end{pmatrix}$. Or, l'étude(*) de g assure que $Im(g) = [\frac{3}{4}, +\infty[$. Donc $f(A) = [\frac{3}{4}, +\infty[$.

(*)Etude de g : g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$.
g étant continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-1/2, +\infty[$,
le TBCSM assure que $g\left([-\frac{1}{2}, +\infty[\right) = [\frac{3}{4}, +\infty[$. De même, $g\left(]-\infty, -\frac{1}{2}[\right) =]\frac{3}{4}, +\infty[$.e,
Par suite, $g(\mathbb{R}) = [\frac{3}{4}, +\infty[$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	¾	↗	

Image réciproque : $f^{-1}\langle B \rangle = \{ z \in \mathbb{C} / z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}\}$.

Or, $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = \overline{z^2 + z + 1} \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = \bar{z}^2 + \bar{z} + 1 \Leftrightarrow z^2 + z = \bar{z}^2 + \bar{z} \Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 + z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z}) + (z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z} + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z - \bar{z} = 0 \\ ou \\ z + \bar{z} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \bar{z} \\ ou \\ 2Re(z) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \in \mathbb{R} \\ ou \\ Re(z) = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Donc, $f^{-1}\langle B \rangle = \left\{ x;\ -\frac{1}{2} + ix / x \in \mathbb{R} \right\}$. $f^{-1}\langle B \rangle$ est donc représentée par la réunion de deux droites : la droite des abscisses et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

Ex 2 Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par : $g(x) = 2x$ et $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \text{ si } x \text{ pair} \\ 0 \text{ si } x \text{ impair} \end{cases}$.

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Les applications f et g sont-elles injectives , surjectives ou bijectives ?

Soit $x \in \mathbb{N}$. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x) \underbrace{=}_{car\ 2x\ pair} \frac{2x}{2} = x$

Si x est pair alors $g \circ f(x) = g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2x}{2} = x$ et si x est impair alors $g \circ f(x) = g(0) = 2 \times 0 = 0$.

J'en conclus que $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$ et $f \circ g = h: \left(x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \text{ pair} \\ 0 \text{ si } x \text{ impair} \end{cases}\right)$.

Comme $id_{\mathbb{N}}$ est injective, f est injective . Comme $id_{\mathbb{N}}$ est surjective, g est surjective .
h n'est pas injective car $h(1) = h(3)$. Alors comme f est injective et $f \circ g$ n'est pas injective, g n'est pas injective (puisque la composée d'injections est injective)
h n'est pas surjective car $\forall x \in \mathbb{N}, h(x)$ *est pair, donc* 1 *n'a pas d'antécédent par* h. Alors comme g est surjective et $f \circ g$ n'est pas surjective, f n'est pas surjective (puisque la composée de surjections est surjective) .

Ex 3 Soient E, F, G et H quatre ensembles, f une application de $vers\ F$, g une application de F $vers$ G et h une application de G $vers$ H . Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives alors f , g et h le sont aussi .
On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.
Comme $g \circ f$ est injective et surjective, f est injective et g est surjective.
Comme $h \circ g$ est injective et surjective, g est injective et h est surjective.
Par conséquent, g est bijective. Et par suite, g^{-1}, la bijection réciproque de g, existe.
Alors $h = h \circ id_G = h \circ (g \circ g^{-1}) = (h \circ g) \circ g^{-1}$; donc h est la composée de $h \circ g$ et g^{-1} . Comme $h \circ g$ et g^{-1} sont bijectives, h est bijective. De même, $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ avec g^{-1} et $g \circ f$ bijectives. Donc f est bijective.
Remarque : on peut appliquer le même type de preuve pour démontrer le résultat de cours : f est bijective de E sur F sietssi il existe $g: F \to E$ telle que : $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$.

Ex 4 Soit $f\ :\ E \to E$ telle que $fofof\ =\ f$. Montrer que: f injective $\Leftrightarrow f$ surjective.
$\Longrightarrow$Je suppose que f injective . Sous cette hypothèse, montrons que f surjective.
Soit $y \in E$.
Comme $fofof\ =\ f$, je peux affirmer que $fofof\ (y) =\ f(y)$ qui s'écrit aussi : $f(fof\ (y)) =\ f(y)$. Donc $fof\ (y))$ et y ont la même image par f. Comme f est injective, nécessairement, $fof\ (y)) =\ y$ qui s'écrit aussi $y = f\big(f\ (y)\big)$. Donc, $f(y)$ est un antécédent de y par f. Ainsi, tout élément de E admet un antécédent par f. J'en conclus que f est surjective.
$\Longleftarrow$Je suppose que f surjective . Sous cette hypothèse, montrons que f injective.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.
Comme f est surjective de E sur E, x_1 et x_2 ont chacun un antécédent par f noté respectivement t_1 et t_2 . Alors $x_1 = f(t_1)$ et $x_2 = f(t_2)$.
donc $fof(f(t_1)) = fof(f(t_2))$ qui s'écrit aussi $fofof(t_1) = fofof(t_2)$. Comme $fofof\ =\ f$, je peux affirmer que $f(t_1) = f(t_2)$ qui s'écrit aussi $x_1 =\ x_2$. Ainsi, deux éléments de E ayant la même image par f sont nécessairement égaux. J'en conclus que f est injective.

Ex 5 Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F. $\mathscr{P}(E)$ $, respectivement$ $\mathscr{P}(F)$, désigne l'ensemble de toutes les parties (les sous-ensembles) de E, respectivement de F. Montrer que :
1) $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$,
- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ $\quad y-a-t-il\ égalité?$

2) $(f\ injective) \Leftrightarrow (\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B))$.
3) $\forall A \in \mathscr{P}(E), A \subset f^{-1}\langle f(A) \rangle$ $y-a-t-il\ égalité$?

4) $(f\ injective) \Leftrightarrow (\forall A \in \mathscr{P}(E), A = f^{-1}\langle f(A)\rangle$.

5) $\forall B \in \mathscr{P}(F), f(f^{-1}\langle B\rangle) \subset B\ y-a-t-il\ égalité$?

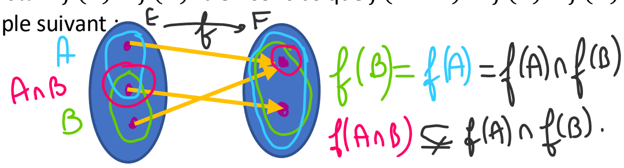
6) $(f\ surjective) \Leftrightarrow (\forall B \in \mathscr{P}(\mathrm{F}), f(f^{-1}\langle B\rangle) = B)$.

1) Montrons que : $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$,

- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad y-a-t-il\ égalité?$

Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$.

- Je suppose que $A \subset B$. Montrons que $f(A) \subset f(B)$. Soit $y \in f(A)$. Alors il existe $a \in A$ tel que : $y = f(a)$. Comme $A \subset B, a \in B$. Alors $y = f(a) \in f(B)$. Ainsi, je peux conclure que $f(A) \subset f(B)$.
- Montrons que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. Soit $y \in f(A \cup B)$. Alors il existe $x \in A \cup B$ tel que : $y = f(x)$. $x \in A \cup B$ donc $x \in A$ ou $x \in B$ Alors $y = f(x) \in f(A)\ ou\ y = f(x) \in f(B)$ donc $y \in f(A) \cup f(B)$. Ainsi, je peux conclure que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
  Montrons que $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$. Soit $y \in f(A) \cup f(B)$. Alors $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$. Donc, il existe $x \in A\ : y = f(x)\ ou\ \ il\ existe\ x \in B$ tel que $y = f(x)\ . Ainsi\ il\ existe\ \ x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$ et par suite, $y = f(x) \in f(A \cup B)$. Ainsi, je peux conclure que $f(A) \cup f(B) \subset\ f(A \cup B)$. Ainsi, $f(A) \cup f(B) =\ f(A \cup B)$.
- Montrons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Soit $y \in f(A \cap B)$. Alors il existe $x \in A \cap B$ tel que : $y = f(x)$. Comme $x \in A \cap B, x \in A$ et $x \in B$. Alors $y = f(x) \in f(A)\ et\ y = f(x) \in f(B)$. Donc $x \in f(A) \cap f(B)$. J'en conclus que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
  Il n'y a , en général, pas égalité comme le prouve l'exemple suivant :



2) Montrons que : $(f\ injective) \Leftrightarrow (\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B))$.

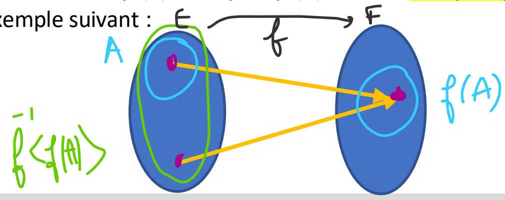
Comme $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, il faut et il suffit de prouver que : $(f\ injective) \Leftrightarrow (\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B))$.

$\Rightarrow$Je suppose f injective. Montrons sous cette hypothèse que $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors $y \in\ f(A)\ et\ y \in\ f(A)$. Donc, il existe $a \in A\ \ et\ b \in B$ tels que : $y = f(a) = f(b)$. Alors, comme f est injective, nécessairement $a = b$. Alors, puisque $a \in A\ \ et\ b \in B, a \in A \cap B$. Alors $y = f(a) \in f(A \cap B)$. J'en conclus que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

$\Leftarrow$Je suppose $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.Montrosn que f est injective. Soit $x_1\ et\ x_2$ deux éléments de E tels que $f(x_1) = f(\ x_2)$. Considérons $A = \{x_1\}\ et\ B = \{\ x_2\}$. Alors, $f(\ A) = \{f(x_1)\}\ et\ f(B) = \{f(\ x_2)\} = \{f(x_1)\}$ donc $f(A) \cap f(B) = \{f(x_1)\}$. Comme, $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B), \{f(x_1)\} \subset f(A \cap B)$ ce qui signifie que $f(x_1) \in f(A \cap B)$. Par conséquent, $f(A \cap B) \neq \emptyset$.
Or, si $x_1\ \neq\ x_2$ alors $A \cap B = \emptyset\ donc\ f(A \cap B) = \emptyset$. Donc nécessairement , $x_1 =\ x_2$. J'en conclus que f est injective.

3) Montrons que $\forall A \in \mathscr{P}(E), A \subset f^{-1}\langle f(A)\rangle\ y-a-t-il\ égalité$?

Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Montrons que : $A \subset f^{-1}\langle f(A)\rangle$.
Soit $a \in A$. Alors $f(a) \in f(A)$. Alors, comme a est un antécédent de $f(a)$, $a \in f^{-1}\langle f(A)\rangle$. Ainsi, $A \subset f^{-1}\langle f(A)\rangle$.
L'égalité n'est en général pas vraie comme le prouve l'exemple suivant :

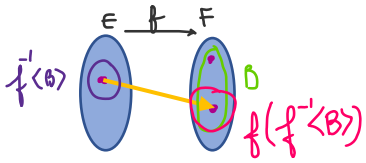


4) $(f\ injective) \Leftrightarrow (\forall A \in \mathscr{P}(E), A = f^{-1}\langle f(A)\rangle)$.

D'après ce qui précède : $\forall A \in \mathscr{P}(E), A \subset f^{-1}\langle f(A)\rangle$ est toujours vraie, donc il faut et suffit de prouver que : $(f\ injective) \Leftrightarrow (\forall A \in \mathscr{P}(E), A \supset f^{-1}\langle f(A)\rangle)$.
$\Rightarrow$je suppose que f est injective. Montrons que $\forall A \in \mathscr{P}(E), A \supset f^{-1}\langle f(A)\rangle$.Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Soit $x \in f^{-1}\langle f(A)\rangle$. Alors $f(x) \in f(A)$. Donc il existe $a \in A$ tel que $f(a) = f(x)$. Comme f est injective , $a = x$. Donc $x \in A$. Ainsi, $f^{-1}\langle f(A)\rangle \subset A$.
$\Rightarrow$je suppose que$\forall A \in \mathscr{P}(E), A \supset f^{-1}\langle f(A)\rangle$. Montrons que f est injective. Soit $x_1\ et\ x_2$ deux éléments de E tels que $f(x_1) =\ f(\ x_2)$. Considérons $A = \{x_1\}$. Alors $f(A) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\}$ donc $\{x_1, x_2\} \subset f^{-1}\langle f(A)\rangle$. Or, par hypothèse, $f^{-1}\langle f(A)\rangle \subset A = \{x_1\}$. Par conséquent, $\{x_1, x_2\} \subset \{x_1\}$ ce qui entraine que $x_1 = x_2$. J'en conclus que f est injective.

5) Montrons que $\forall B \in \mathscr{P}(F), f(f^{-1}\langle B\rangle) \subset B.\ y-a-t-il\ égalité$?

Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Soit $y \in f(f^{-1}\langle B\rangle)$. Alors il existe $x \in f^{-1}\langle B\rangle$ tel que : $y = f(x)$. Or, comme $x \in f^{-1}\langle B\rangle, f(x) \in B$. Ainsi, $y \in B$. J'en conclus que $f(f^{-1}\langle B\rangle) \subset B$.
Il n'y a pas en général égalité comme le prouve l'exemple suivant :



6) $(f\ surjective) \Leftrightarrow \forall B \in \mathscr{P}(F), f(f^{-1}\langle B\rangle) = B$

D'après ce qui précède que $\forall B \in \mathscr{P}(F), f(f^{-1}\langle B\rangle) \subset B$, il s'agit donc de prouver que $(f\ surjective) \Leftrightarrow \forall B \in \mathrm{P}\ (F), f(f^{-1}\langle B\rangle) \supset B$.
$\Rightarrow$Je suppose f surjective . Montrons qu'alors $\forall B \in \mathscr{P}(F), f(f^{-1}\langle B\rangle) \supset B$.

Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Soit $y \in B$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que : $y = f(x)$. Alors, $x \in f^{-1}\langle B\rangle$ et par suite $y = f(x) \in f(f^{-1}\langle B\rangle)$. Ainsi, $B \subset f(f^{-1}\langle B\rangle)$.

$\Leftarrow$Je suppose que : $\forall B \in \mathscr{P}(F), f(f^{-1}\langle B\rangle) \supset B$. . Montrons que f est surjective.

Soit $y \in F$. Posons $B = \{y\}$. Alors $\{y\} \subset f(f^{-1}\langle B\rangle)$; autrement dit, $y \in f(f^{-1}\langle B\rangle)$. Donc il existe $x \in f^{-1}\langle B\rangle$ tel que $y = f(x)$. J'en conclus que f est surjective.

Ex 6 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$. Montrer que $\forall x \in [0,1], f \circ f(x) = x$. Que peut-on en déduire que f ?

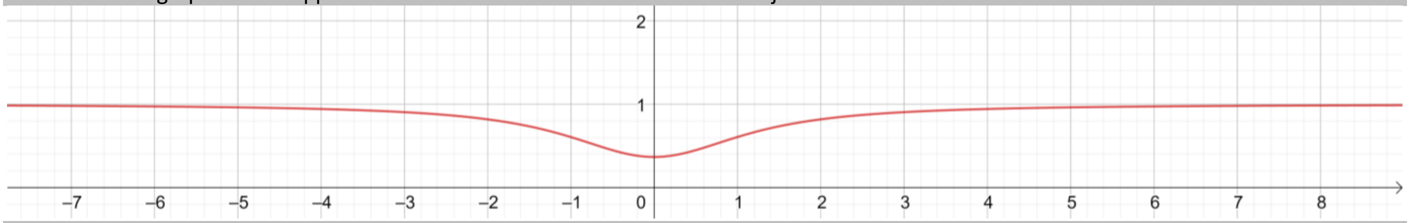
Soit $x \in [0,1], f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2$. Comme $x \in [0,1], \sqrt{x} - 1 \in [0,1]$ et par suite, $f(x) \in [0,1]$. Donc $f\big(f(x)\big)$ existe

et $f\big(f(x)\big) = \left(\sqrt{f(x)} - 1\right)^2 = \left(\sqrt{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2} - 1\right)^2 = \left(\left|\sqrt{x} - 1\right| - 1\right)^2 = \left(1 - \sqrt{x} - 1\right)^2 = \left(-\sqrt{x}\right)^2 = x$. Ainsi, $f \circ f = id_{[0,1]}$.

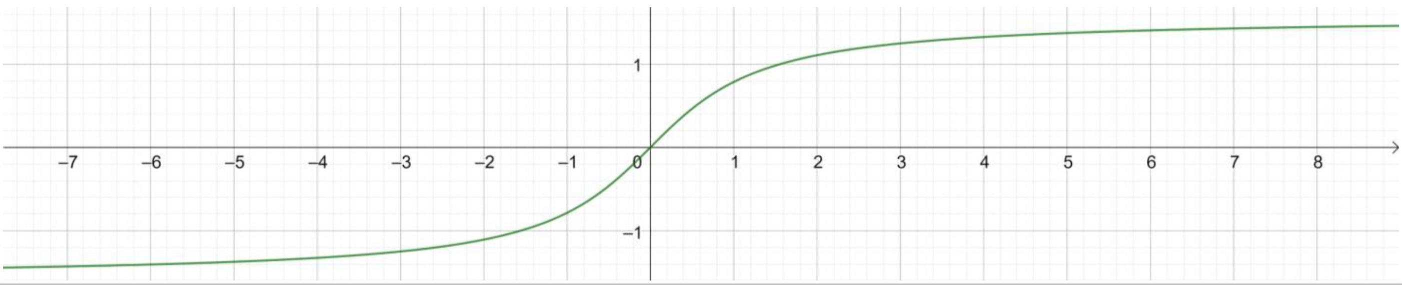
J'en déduis que f est bijective de $[0,1]$ sur $[0,1]$ et $f^{-1} = f$.

Ex 7

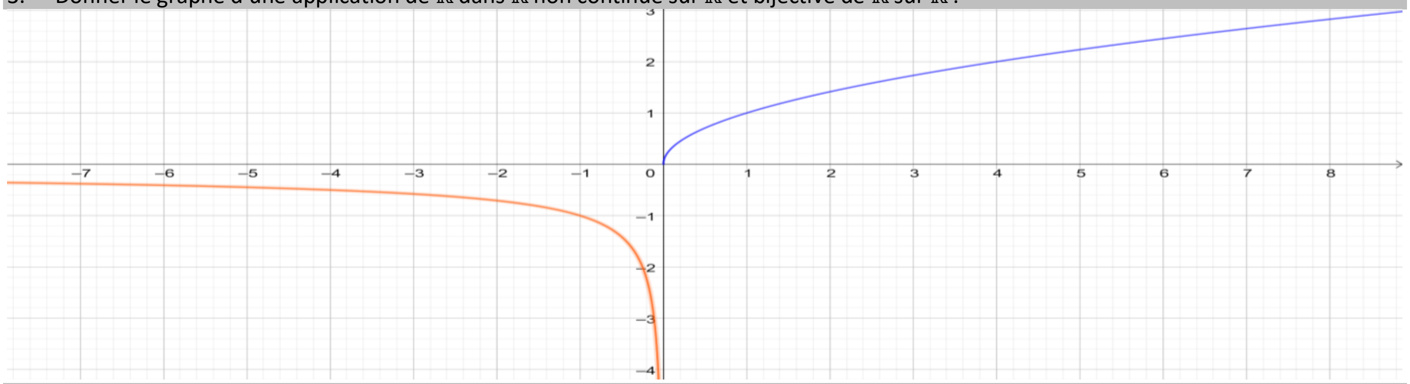
1. Donner le graphe d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et non bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.



2. Donner le graphe d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone et non bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.



3. Donner le graphe d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non continue sur $\mathbb{R}$ et bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.



Ex 8 Pour chacune des fonctions f suivantes , justifier que f est bijective de Df sur un domaine à définir et déterminer f^{-1}.

1. $f(x) = 1 - 4\sqrt[3]{x}$
2. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
3. $f(x) = ln(2x + 1)$

1. $Df = \mathbb{R}$. Soit y et x des réels. $y = 1 - 4\sqrt[3]{x} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{1-y}{4} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1-y}{4}\right)^3$. Donc, f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \left(\frac{1-y}{4}\right)^3$.
2. $Df = \mathbb{R}^+$ $et\ \forall x \geq 0,\ f(x) = e^{\sqrt{x}} = \left(\exp \circ \sqrt{\ \ }\right)(x)$.

Or, $u = \sqrt{\ \ }$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ de bijection réciproque u^{-1}: $\begin{pmatrix} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{pmatrix}$.

Et v =exp est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$ $et\ v^{-1}$: $\begin{pmatrix} [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{pmatrix}$.

Donc f est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$ $et\ \forall x \in\ [1, +\infty[, f^{-1}(x) = u^{-1} \circ v^{-1}(x) = (\ln(x))^2$.

3. $Df =]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et $\forall x > -\frac{1}{2},\ f(x) = (v \circ u)(x)$ où $u(x) = 2x + 1$ et $v = ln$.

Or, u: $(x \mapsto 2x + 1)$ est bijective de $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de bijection réciproque u^{-1}: $\begin{pmatrix} \mathbb{R}^{+*} \to]-\frac{1}{2}, +\infty[\\ x \mapsto \frac{1}{2}(x - 1) \end{pmatrix}$.

Et $v = ln$ est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$ $et\ v^{-1}$: $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*+} \\ x \mapsto e^x \end{pmatrix}$.

Donc f est bijective de $]-\frac{1}{2},+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ $et\ \forall x\in]-\frac{1}{2}\ ,+\infty[, f^{-1}(x)=u^{-1}\circ v^{-1}(x)=\frac{1}{2}(e^x-1)$.

Ex 9 Pour chacune des fonctions f suivantes, montrer que f est bijective de Df sur un domaine à définir et déterminer f^{-1}.

1. $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$.
2. $f(x)=\lfloor x\rfloor+\sqrt[6]{x-\lfloor x\rfloor}$.
3. $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$.
4. $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$.
5. $f(x)=\frac{e^x+2}{e^x-1}$
6. $f(x)=sh(x)$

1. $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$.

$\forall x\in\mathbb{R}, 1+x^2\geq 1>0$ donc $Df=\ \mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ car son expression n'est constituée que des fonctions continues sur leur domaine de définition.

Dans l'expression de f seule la fonction racine carrée n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition mais n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$. Or, $\forall x\in\mathbb{R}, 1+x^2\in\mathbb{R}^{+*}$. Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$. Or $|x|=\sqrt{x^2}<\sqrt{x^2+1}$. Donc $-\sqrt{x^2+1}<x<\sqrt{x^2+1}$. Et par suite, $x+\sqrt{x^2+1}>0$ et finalement , $f'(x)>0$. Sur l'intervalle $\mathbb{R}$, f est donc strictement croissante.

Alors le $TBSCM$ assure que $f(\mathbb{R})=]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)[$ et f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}\overset{\substack{quantité\\ conjuguée}}{\triangleq}\frac{-1}{x-\sqrt{1+x^2}}$ donc, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$. Donc $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}^{+*}$. Ainsi, f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soit $y\in\mathbb{R}^{+*}$. Notons x l'unique antécédent de y par f. Alors $y\overset{(*)}{\triangleq}x+\sqrt{1+x^2}$. Donc $y=\frac{-1}{x-\sqrt{1+x^2}}$ donc $x-\sqrt{1+x^2}\overset{(**)}{\triangleq}-\frac{1}{y}$. J'en déduis, en additionnant (*) et (**), que : $2x=y-\frac{1}{y}$ et ainsi, $x=\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)$. Ainsi, $\forall y\in\mathbb{R}^{+*}, f^{-1}(y)=\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)$.

2. $f(x)=\lfloor x\rfloor+\sqrt[6]{x-\lfloor x\rfloor}$.

$\forall x\in\mathbb{R}, x-\lfloor x\rfloor\geq 0$ donc $Df=\ \mathbb{R}$.

Soit $p\in\mathbb{Z}$. Soit $x\in[p,p+1[$. Alors $\lfloor x\rfloor=p$ donc $f(x)=p+\sqrt[6]{x-p}$. Comme $x-p\in[0,1[, \sqrt[6]{x-p}\in[0,1[\ et\ f(x)\in[p,p+1[$.

Les ensembles $[p,p+1[$ tq $p\in\mathbb{Z}$ sont deux à deux disjoints. Par conséquent, si $y\in[p,p+1[$ alors les antécédents de y , s'il en existe, sont dans $[p,p+1[$.

Soit $y\in\mathbb{R}$. Posons $p=\lfloor y\rfloor$. Alors $y\in[p,p+1[$ .Donc les solutinos de , $f(x)=y$sont dans $[p,p+1[$ Soit $x\in[p,p+1[$.

$$f(x)=y\Leftrightarrow p+\sqrt[6]{x-p}=y\Leftrightarrow\sqrt[6]{x-p}=y-p\underset{\substack{car\ y-p\geq 0\\ x-p\geq 0}}{\underbrace{\Leftrightarrow}}x-p=(y-p)^6\Leftrightarrow x=p+(y-p)^6\Leftrightarrow x=\lfloor y\rfloor+(y-\lfloor y\rfloor)^6.$$

J'en déduis que $\lfloor y\rfloor+(y-\lfloor y\rfloor)^6$est l'unique antécédent de y par f. Donc f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}, f^{-1}(y)=\lfloor y\rfloor+(y-\lfloor y\rfloor)^6$.

3. $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$.

$\forall x\in\mathbb{R}, 1+|x|>0\ donc\ \ 1+|x|\neq 0$ donc $Df=\ \mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}^+, x\geq 0\ et\ 1+|x|>0\ donc\ f(x)\geq 0. \forall x\in\mathbb{R}^{-*}, x<0\ et\ 1+|x|>0\ donc\ f(x)<0.$

Donc si $y\in\mathbb{R}^+$, alors les antécédents de y s'il en existe sont positifs et si $y\in\mathbb{R}^{-*}$, alors les antécédents de y s'il en existe sont strictement négatifs.

Soit $y\in\mathbb{R}$.

<u>1er cas</u> $y\in\mathbb{R}^+$. Soit $x\in\mathbb{R}^+$. Alors $f(x)=y\Leftrightarrow\frac{x}{1+x}=y\Leftrightarrow x=y(1+x)\Leftrightarrow(1-y)x=y\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{y}{1-y}\ si\ y\neq 1\\ 0=1\ si\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}x=\frac{y}{1-y}\ si\ y\neq 1\\ impossible\ si\ y=1\end{cases}\underset{\substack{car\\ x\geq 0}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=\frac{y}{1-y}\ si\ y\in[0,1[\\ impossible\ si\ y\in[1,+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{y}{1-|y|}\ si\ y\in[0,1[\\ impossible\ si\ y\in[1,+\infty[\end{cases}.$$

<u>2ème cas</u> $y\in\mathbb{R}^{-*}$. Soit $x\in\mathbb{R}^{-*}$. Alors $f(x)=y\Leftrightarrow\frac{x}{1-x}=y\Leftrightarrow x=y(1-x)\Leftrightarrow(1+y)x=y\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{y}{1+y}\ si\ y\neq-1\\ 0=1\ si\ y=-1\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}x=\frac{y}{1+y}\ si\ y\neq-1\\ impossible\ si\ y=-1\end{cases}\underset{\substack{car\\ x<0}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=\frac{y}{1+y}\ si\ y\in]-1,0[\\ impossible\ si\ y\in]-\infty,-1[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{y}{1-|y|}\ si\ y\in]-1,0[\\ impossible\ si\ y\in]-\infty,-1[\end{cases}.$$

Ainsi, $si\ y\in]-1,1[$ alors y a un unique antécédent qui est $\frac{y}{1-|y|}$ $et\ si\ y\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ alors y n'a pas d'antécédent .

J'en conclus que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et $\forall y\in]-1,1[, f^{-1}(y)=\frac{y}{1-|y|}$.

Conséquence : f est donc injective . Comme, de plus, f est continue, f est strictement monotone et comme $f(0)<f(1)$, f est strictement croissante ; alors le $TBCSM$ assure que $1=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $-1=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

4. $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$.

$Df=\ \mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)>0$.

Soit $y\in\mathbb{R}\ et\ x\in\mathbb{R}.\ Posons\ X=e^x$

$$f(x)=y\Leftrightarrow y=\frac{e^x}{1+e^x}\Leftrightarrow(1+e^x)y=e^x\Leftrightarrow(1-y)e^x=y\Leftrightarrow e^x=\frac{y}{1-y}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)\ si\ \left(\frac{y}{1-y}\right)>0\\ impossible\ si\ \left(\frac{y}{1-y}\right)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)\ si\ y\in]0,1[\\ impossible\ si\ y\notin]0,1[\end{cases}.$$

Donc , tout réel $y\in]0,1[$ admet un unique antécédent qui vaut $\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$ et tout réel $y\notin]0,1[$ n'a pas d'antécédent par f.

Ainsi, f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ et $\forall y\in]0,1[, f^{-1}(y)=\ \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$.

Soit $f(x)=\frac{e^x+2}{e^x-1}$.

1. $f(x)\ existe$ <u>sietssi</u> $e^x\neq 1$ <u>sietssi</u> $x\neq 0$. Donc $Df=\mathbb{R}^*$.
2. Etudions f : $\forall x\in Df, f(x)=\frac{e^x-1+3}{e^x-1}=1+\frac{3}{e^x-1}$. f est dérivable sur Df et $\forall x\in Df, f'(x)=\frac{-3e^x}{(e^x-1)^2}<0$.

Donc sur chaque intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ *et* $\mathbb{R}^{-*}$, f est strictement décroissante.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\Vert$	$-$
$f(x)$	$-2 \searrow -\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow 1$

f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty,0[$. Donc , le TBCSM assure que $f(\,]-\infty,0[) = \,]-\infty,-2[$ *et* f est bijective de $]-\infty,0[$ sur $]-\infty,-2[$. De même, $f(\,]0,+\infty[) = \,]1,+\infty[$ *et* f est bijective de $]0,+\infty[$ sur $]1,+\infty[$. Par conséquent, tout réel de $]-\infty,-2[\,\cup\,]1,+\infty[$ admet un et un seul antécédent par f dans Df. Donc f est bijective Df *sur* $]-\infty,-2[\,\cup\,]1,+\infty[$.

3. Cherchons une expression de f^{-1} : soit $y \in \,]-\infty,-2[\,\cup\,]1,+\infty[$ *et* x l'antécédent de y par f .

On a : $1+\frac{3}{e^x-1} = y$

Donc, $\frac{3}{e^x-1} = y-1$ puis $e^x-1 = \frac{3}{y-1}$ et $e^x = 1+\frac{3}{y-1} = \frac{y+2}{y-1} > 0$ car $y \in \,]-\infty,-2[\,\cup\,]1,+\infty[$.

Ainsi, $x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$.

J'en conclus que $\forall y \in \,]-\infty,-2[\,\cup\,]1,+\infty[, f^{-1}(\mathrm{y}) = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$.

5. $f(x) = sh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$Df = \mathbb{R}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$ *et* $x \in \mathbb{R}$. *Posons* $X = e^x$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \Leftrightarrow \frac{\left(X-\frac{1}{X}\right)}{2} = y \Leftrightarrow (X^2-1) = 2yX \Leftrightarrow X^2-2yX-1 = 0 \overset{\substack{\Delta=(2y)^2+4=4(y^2+1) \\ \Delta=\left(2\sqrt{y^2+1}\right)^2}}{\Longleftrightarrow} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} X = \frac{2y+2\sqrt{y^2+1}}{2} = y+\sqrt{y^2+1} \\ \quad ou \\ X = y-\sqrt{y^2+1} \end{cases} \overset{\substack{car\ x>0 \\ et \pm y \leq |y| < \sqrt{y^2+1} \\ donc\ y-\sqrt{y^2+1}<0<y+\sqrt{y^2+1}}}{\Longleftrightarrow} \quad x = y+\sqrt{y^2+1}.$$ Donc tout réel y admet $y+\sqrt{y^2+1}$ comme unique antécédent.

Ainsi, sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}, (sh^{-1})(y) = y+\sqrt{y^2+1}$.

Ex 10 Soit f : $\left(x \mapsto \frac{2\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}}\right)$.

a. Montrer que f est bijective de Df sur un intervalle J à déterminer et donner une expression de f^{-1}.
b. Justifier que Cf a une tangente verticale en 0. En déduire . $(f^{-1})'(-1)$.
c. Calculer $(f^{-1})'(x)$ pour $x \in J$ et retrouver la valeur de $(f^{-1})'(-1)$.

a. $Df = \mathbb{R}^+$. Soit y un réel et $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\frac{2\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}} = y \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-1 = (1+\sqrt{x})y \Leftrightarrow (2-y)\sqrt{x} = y+1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{y+1}{2-y} \Leftrightarrow \begin{cases} impossible\ si\ \frac{y+1}{2-y} < 0\ ou\ y = 2 \\ x = \left(\frac{y+1}{2-y}\right)^2\ si\ \frac{y+1}{2-y} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} impossible\ si\ y \notin [-1,2[\\ x = \left(\frac{y+1}{2-y}\right)^2 \geq 0\ si\ y \in [-1,2[\end{cases}$$ Donc, tout réel $y \in [-1,2[$ admet un unique antécédent $\left(\frac{y+1}{2-y}\right)^2$ et tout autre réel y n'a pas d'antécédent.

Ainsi, f est bijective de $\mathbb{R}^+$*sur* $[-1,2[$ et $\forall y \in [-1,2[, f^{-1}(y) = \left(\frac{y+1}{2-y}\right)^2$.

b. f est continue en 0 et $\forall x > 0, \tau(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{2\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}}+1}{x} = \frac{2\sqrt{x}-1+1+\sqrt{x}}{x(1+\sqrt{x})} = \frac{3\sqrt{x}}{x(1+\sqrt{x})} = \frac{3}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$. Donc, $\lim\limits_{x\to 0} \tau(x) = +\infty$. Ainsi, Cf a une tangente verticale au point $A(0,-1)$. Alors le TDBR assure que f^{-1} est dérivable en -1 et $(f^{-1})'(-1) = 0$; autrement dit, $C_{f^{-1}}$a une tangente horizontale au point $B(-1,0)$.

c. $\forall y \in [-1,2[, f^{-1}(y) = \left(\frac{y+1}{2-y}\right)^2$. Donc f^{-1} est dérivable sur $[-1,2[$ (puisque son expression n'est constituée que de fonctions dérivables partout sur leur propre domaine de définition). Et $\forall y \in [-1,2[, (f^{-1})'(y) = 2u'(y)u(y)$ avec $u(y) = \frac{y+1}{2-y}$ et $u'(y) = \frac{(2-y)+(y+1)}{(2-y)^2} = \frac{3}{(2-y)^2}$.

Donc, $\forall y \in [-1,2[, (f^{-1})'(y) = 6\frac{y+1}{(2-y)^3}$.On retrouve ainsi $(f^{-1})'(-1) = 0$.

Ex 11 **1.** Soit f définie par : $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$. Montrer que f est bijective de $]0,\frac{\pi}{2}]$ sur un domaine J à déterminer. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J\backslash\{1\}$ et calculer $(f^{-1})'(2)$. Que se passe –t-il en 1 ? Donner une expression de f^{-1} à l'aide de l'$Arcsin$.

2. Etudier et représenter la fonction f de la variable réelle telle que : $f(x) = x+\ln(x)$. Montrer que f est bijective de Df sur un domaine à déterminer. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(x) = 1-\frac{1}{f^{-1}(x)+1}$.

1) Soit f définie par : $f(x)=\frac{1}{\sin(x)}$.

$Df=]0,\frac{\pi}{2}]$. f est continue sur Df .

Soit $(x_1,x_2)\in]0,\frac{\pi}{2}]^2$. $x_1<x_2 \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{car\ \sin\ est\\ strictement\ croissante\\ sur\ ]0,\frac{\pi}{2}]\ et\ ne\ s'annule\ pas}} 0<sin(x_1)<\sin(x_2)\Rightarrow\frac{1}{sin(x_1)}>\frac{1}{sin(x_2)}$. Donc f est strictement décroissante.

- Alors le $TBCSM$ assure que :
  1) $f\left(]0,\frac{\pi}{2}]\right)=[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x),\lim_{x\to0^+} f(x)[=[1,+\infty[$.
  2) f est bijective de $]0,\frac{\pi}{2}]$ sur $[1,+\infty[$.
  3) f^{-1} est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ et bijective de $[1,+\infty[$ sur $]0,\frac{\pi}{2}]$.
- f est dérivable sur Df et $\forall x\in Df, f'(x)=-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$. Donc $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[, f'(x)\neq0$. Le $TDBR$ assure alors que f^{-1}est dérivable sur $f(]0,\frac{\pi}{2}[)=]1,+\infty[$ et $\forall x\in]1,+\infty[,(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. $En\ particulier,\ (f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(f^{-1}(2))}$. Or $a=f^{-1}(2)\Leftrightarrow f(a)=2\Leftrightarrow \frac{1}{\sin(a)}=2\Leftrightarrow\sin(a)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{\pi}{6}$. Donc, $(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(\frac{\pi}{6})}=-\frac{1}{\frac{cos(\frac{\pi}{6})}{\sin^2(\frac{\pi}{6})}}=-\frac{\sin^2(\frac{\pi}{6})}{cos(\frac{\pi}{6})}=-\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt3}{2}}=-\frac{1}{4}\times\frac{2}{\sqrt3}=-\frac{1}{2\sqrt3}$.
- Comme f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ et $f'(1)=0$, $f^{-1}n'$est pas dérivable en $1=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et la courbe de f^{-1} a une tangente verticale au point $B(1,\frac{\pi}{2})$.
- $Soit\ y\in[1,+\infty[.$ $Notons\ x\ l'uniqueantcédent\ de\ y\ par\ f\ .Alors\ \ x\in]0,\frac{\pi}{2}]$ et$\frac{1}{sin(x)}=y$. Donc $sin(x)=\frac{1}{y}\ et\frac{1}{y}\in]0,1]$. x est donc l'unique élément de $]0,\frac{\pi}{2}]$ dont le sinus vaut $1/y$. J'en déduis que $x=Arcsin\left(\frac{1}{y}\right)$. Ainsi, $f^{-1}(y)=Arcsin\left(\frac{1}{y}\right)$.

2) Soit f définie par : $f(x)=x+\ln(x)$.$Df=\mathbb{R}^{+*}$. f étant la somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur leur propre domaine de définition, f est continue et strictement croissante sur Df .
Alors, le $TBSCM$ assure que : $f(\mathbb{R}^{+*})=]\lim_{x\to0} f(x),\lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty,+\infty[$ et f est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$sur $\mathbb{R}$ et f^{-1}est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
f est dérivable sur Df et $\forall x>0, f'(x)=1+\frac{1}{x}\neq0$. Donc f^{-1}est dérivable sur $f(D_f)=\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{1+\frac{1}{f^{-1}(x)}}=\frac{f^{-1}(x)}{1+f^{-1}(x)}=\frac{f^{-1}(x)+1-1}{1+f^{-1}(x)}=1-\frac{1}{1+f^{-1}(x)}$. OK !

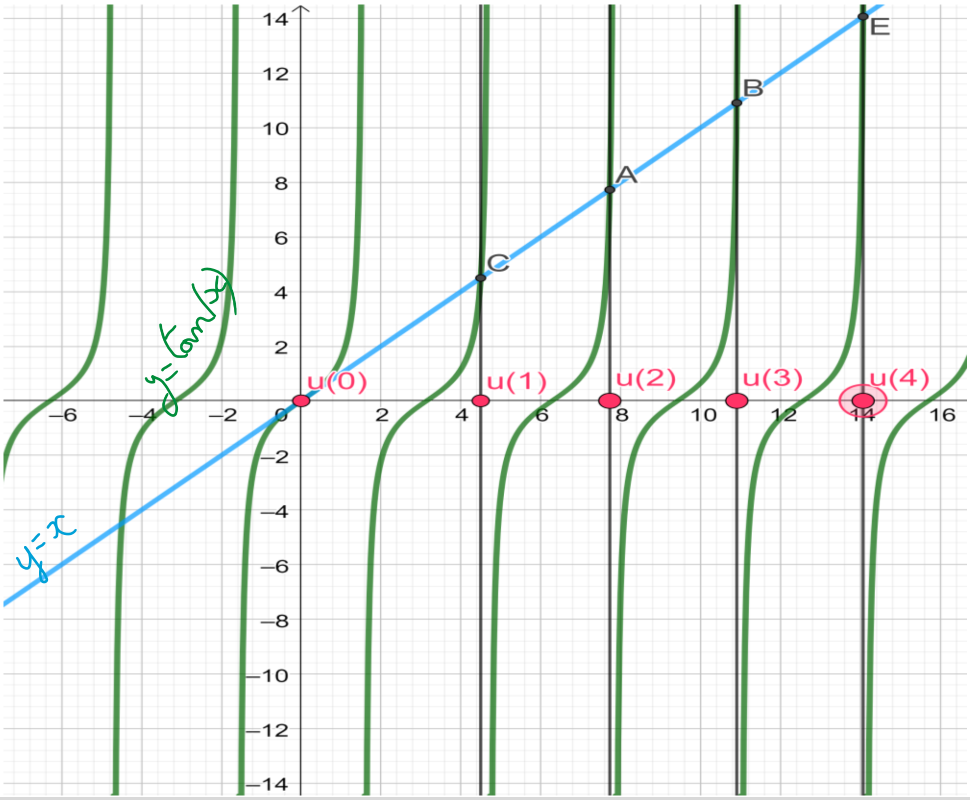
Ex 12 Soit $f:(x\mapsto x^3+x-8)$.

1) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Donner $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$.
2) Résoudre l'équation $2f(x)+3f^{-1}(x)=10$.
3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'(-6)$.
4) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},(f^{-1})'(x)=\frac{1}{3(f^{-1}(x))^2+1}$.

1) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=3x^2+1>0$. Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Alors le TBCSM assure que $f(\mathbb{R})=\left]\lim_{x\to+\infty} f(x),\lim_{x\to-\infty} f(x)\right[=\mathbb{R}$ et f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et f^{-1}est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. De plus, par symétrie des courbes Cf et Cf par rapport à la première bissectrice, $\lim_{x\to a} f(x)=b\Leftrightarrow\lim_{x\to b} f^{-1}(x)=a$.
Or, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ donc, $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=+\infty$.
2) $f\ et\ f^{-1}$ sont strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\varphi:(x\mapsto 2f(x)+3f^{-1}(x))$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc est injective. Par conséquent, 10 admet au plus un antécédent par φ. De plus, $f(2)=2$ donc $f^{-1}(2)=2$ et $\varphi(2)=10$. Ainsi, 2 est un antécédent de 10 par φ. J'en déduis que 2 est ;'unique antécédent de 10 par φ et ainsi, l'unique solution de l'équation $2f(x)+3f^{-1}(x)=10$.
3) Comme $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)\neq0$, le TDBR assure que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(f^{-1})'(-6)=\frac{1}{f'(f^{-1}(-6))}$.
Cherchons $(f^{-1}(-6))$: $a=(f^{-1}(-6))\Leftrightarrow-6=f(a)\Leftrightarrow\ -6\overset{*}{=}a^3+a-8\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{f\ étant\ bijective,\\ (*)n'a\ qu'une\ solution}} a=1$.
Par suite, $(f^{-1})'(-6)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}$.
4) Le $TDBR$ assure que : $\forall x\in\mathbb{R},(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{3(f^{-1}(x))^2+1}$.

Ex 13 Montrer que l'équation $\tan(x)=x$ admet une unique solution u_n dans chaque intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi[\ tq\ n\in\mathbb{N}$. Un tel réel u_n est appelé un point fixe de tan. Illustrer ce résultat. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Posons $f:(x\mapsto\tan(x)-x)$. Alors $Df=D_{tan}=\cup_{n\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi[$. f est continue et dérivable sur D_{tan}car son expression n'est constituée que de fonctions continues et dérivables sur leur propre domaine de définition. Et $\forall x\in Df, f'(x)=1+tan^2(x)-1=tan^2(x)\geq0$. Sur chaque intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi[$, f' est positive et s'annule au point isolé $n\pi$ donc f est strictement croissante. Alors le Donc 0 admet un unique antécédent u_n dans chaque intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi[$. Donc l'équation $\tan(x)=x$ admet une unique solution u_n dans chaque intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi[\ tq\ n\in\mathbb{N}$.



$\forall n \in \mathbb{N}$,

$-\frac{\pi}{2}+n\pi < u_n < \frac{\pi}{2}+n\pi$. Comme $\lim_{n\to+\infty} -\frac{\pi}{2}+n\pi = +\infty$, le théorème des gendarmes assure que ;

$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Ex 14 Soit $f : [a,b] \to [a,b]$, continue. Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in [a,b]$ tel que : $f(\alpha)=\alpha$. Un tel réel α est appelé un point fixe de f.

Soit $g : (x \mapsto f(x)-x)$.

g est la somme de deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$, donc g est continue sur $[a,b]$.

$g(a)=f(a)-a \geq 0$ car $f(a) \in [a,b]$.

$g(b)=f(b)-b \leq 0$ car $f(b) \in [a,b]$.

Alors le TVI assure que g s'annule au moins une fois sur $[a,b]$ en un réel α. Alors $f(\alpha)-\alpha=0$ et ainsi $f(\alpha)=\alpha$.

Ex 15 Soit f et g deux fonctions réelles, continues sur un intervalle I et telles que : $\forall x \in I, |f(x)|=|g(x)|\ et\ f(x)\neq 0$.
Montrer : $\forall x \in I, f(x)=g(x)\ ou\ \forall x \in I, f(x)=-g(x)$.

$\forall x \in I, |f(x)|=|g(x)|\ donc\ \forall x \in I, f(x)=g(x)\ ou\ f(x)=-g(x)$. Or, $\forall x \in I, f(x)\neq 0\ donc\ |g(x)|=|f(x)|\neq 0$ et par conséquent $et\ \forall x \in I, g(x)\neq 0$. Comme f et g sont contonues sur l'interavlle I et ne s'annule pas sur I nécessairement f et g garde un même signe sur I. Il en résulte que si f et g ont le même signe alors $\forall x \in I, f(x)=g(x)$ et si f et g sont de signe opposé alors $\forall x \in I, f(x)=-g(x)$.

Ex 16 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que: $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

1) f est-elle injective ? surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$?
2) Montrer que $f(\mathbb{R})=[-1;1]$.
3) Montrer que f induit une bijection g de $[-1,1]$ sur $[-1,1]$ et déterminer une expression de g^{-1}.

1) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)=\frac{-2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}=-2\frac{(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$. Donc , le TBCSM assure que $f(]1,+\infty[)=]0,1[$. De même, $f([-1,1])=[-1,1]$ et $f(]-\infty,1[)=]-1,0[$. J'en déduis que :

1) 2 n'a pas d'antécédent par f et par conséquent , f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2) $\frac{1}{2}$ admet au moins deux antécédents par f l'un dans $]1,+\infty[$ et l'autre dans $[-1,1]$. Donc, f n'est pas injective.

2) $f(\mathbb{R})=f(]1,+\infty[\cup[-1,1]\cup]-\infty,1[)=f(]1,+\infty[)\cup f([-1,1])\cup f(]-\infty,1[)=[-1,1]$.

3) f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1,1]$. Donc , le TBCSM assure que f induit une bijection g de $[-1,1]$sur $f([-1,1]) = [-1,1]$. Autrement dit, $g:\begin{pmatrix}[-1,1] \to [-1,1] \\ x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}\end{pmatrix}$est donc bijective.

Cherchons une expression de g^{-1}. Soit $y \in [-1,1]$ et x l'unique antécédent de y par g dans $[-1,1]$. Je sais que : $y = g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Alors $yx^2 - 2x + y = 0$. Posons $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1-y^2) = \left(2\sqrt{1-y^2}\right)^2$, $x_1 = \frac{2-2\sqrt{1-y^2}}{2y} = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. Donc, $x = x_1 \; ou \; x = x_2$.

Mais si $1 > y \geq 0$ alors $1 + \sqrt{1-y^2} > 1$ donc $x_2 = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} > \frac{1}{y} > 1$. Donc , x_2 ne convient pas et ainsi, $x = x_1$ est l'unique antécédent de y par g. Mais si $-1 < y < 0$ alors $x_2 = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} < \frac{1}{y} < -1$. Donc , x_2 ne convient pas et ainsi, $x = x_1$ est l'unique antécédent de y par g.

Ainsi, $g^{-1}(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$.

Vérification : $g\left(\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\right) = \frac{2\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}}{1+\left(\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\right)^2} = 2y\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y^2+\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)^2} = 2y\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y^2+1+(1-y^2)-2\sqrt{1-y^2}} = 2y\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{2-2\sqrt{1-y^2}} = y$ OK !!!

Ex 17: Soit a et b réels et $f: (x \mapsto ax + b|x|)$.Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Le cas échéant, donner une expression de f^{-1}.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b|x| = \begin{cases}(a+b)x \; si \; x > 0 \\ 0 \qquad si \; x = 0 \\ (a-b)x \; si \; x < 0\end{cases}$.

<u>1er cas</u> : $\begin{cases}a+b > 0 \\ a-b > 0\end{cases}$.

Alors, $\begin{cases}\forall x \geq 0, (a+b)x \geq 0 \\ \forall x < 0, (a-b)x < 0\end{cases}$.Donc, un réel positif et un réel strictement négatif n'ont jamais la même image.

De plus $h: (x \mapsto (a+b)x)$ est bijective de $\mathbb{R}^+$sur $\mathbb{R}^+$ et $h^{-1}: (x \mapsto \frac{1}{a+b}x)$. Et $g: (x \mapsto (a-b)x)$ est bijective de $\mathbb{R}^{-*}$sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $g^{-1}: (x \mapsto \frac{1}{a-b}x)$. Par conséquent, f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{-1}: \left(x \mapsto \begin{cases}\frac{1}{a+b}x \; si \; x \geq 0 \\ \frac{1}{a-b}x \; si \; x < 0\end{cases}\right)$.

<u>2er cas</u> : $\begin{cases}a+b < 0 \\ a-b < 0\end{cases}$.

Alors, $\begin{cases}\forall x \geq 0, (a+b)x \leq 0 \\ \forall x < 0, (a-b)x > 0\end{cases}$.Donc, un réel positif et un réel strictement négatif n'ont jamais la même image. Comme précédemment, f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{-1}: \left(x \mapsto \begin{cases}\frac{1}{a+b}x \; si \; x \geq 0 \\ \frac{1}{a-b}x \; si \; x < 0\end{cases}\right)$.

<u>3ème cas</u> : $a+b > 0 \; et \; a-b < 0$.

Alors $h: (x \mapsto (a+b)x)$ est bijective de $\mathbb{R}^+$sur $\mathbb{R}^+$ et $g: (x \mapsto (a-b)x)$ est bijective de $\mathbb{R}^{-*}$sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc tout réel strictement positif à 2 antécédents par f : l'un strictement positifs et l'autre strictement négatif. Ainsi, f n'est pas bijectif.

<u>4ème cas</u> : $a+b < 0 \; et \; a-b < 0$.

Alors comme précédemment, je peux affirmer que tout réel strictement négatif à 2 antécédents par f : l'un strictement positif et l'autre strictement négatif. Ainsi, f n'est pas bijectif.

<u>5ème cas</u> : $a+b = 0 \; \boldsymbol{OU} \; a-b = 0$.

Alors $\forall x \geq 0, f(x) = 0 \; \boldsymbol{OU} \; \forall x < 0, f(x) = 0$. Donc 0 a une infinité d'antécédents par f. Donc f n'est pas bijective.

Ainsi,

f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b < 0 \\ a-b < 0\end{cases}$ ou $\begin{cases}a+b > 0 \\ a-b > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a < -b \\ a < b\end{cases}$ ou $\begin{cases}a > -b \\ a > b\end{cases} \Leftrightarrow a < -|b| \; ou \; a > |b|$

f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow |a| > |b|$. Et le cas échéant, $f^{-1}: \left(x \mapsto \begin{cases}\frac{1}{a+b}x \; si \; x \geq 0 \\ \frac{1}{a-b}x \; si \; x < 0\end{cases}\right)$.

Ex 18 Montrer que $f: ((n,p) \mapsto 2^n(2p+1))$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$.

<u>Surjectivité</u> : pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$, je cherche $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m = 2^n(2p+1)$.

Montrons par récurrence forte sur m que $H(m)$: « il existe $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m = 2^n(2p+1)$.» est vraie.

<u>Initialisation :</u> $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$. Donc, $n = 0 \; et \; p = 0$ conviennent.

<u>Propagation :</u> Soit m un entier naturel non nul. Je suppose que $H(1), \dots, H(m-1), H(m)$ sont vraies et sous cette hypothèse forte, je vais montrer que $H(m+1)$ est vraie.

Si $m+1$ est impair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = (2k+1)$. Donc $m+1 = 2^0(2k+1)$. Ainsi, $n = 0 \; et \; p = k$ conviennent.

Si $m+1$ est pair alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = 2k$. Comme $1 \leq k \leq m$, $H(k)$ est vraie donc il existe $(n',p') \in \mathbb{N}^2$ tel que $k = 2^{n'}(2p'+1)$.Donc, $m = 2k = 2^{n'+1}(2p'+1)$. Ainsi, $n = n'+1 \; et \; p = p'$ conviennent.

Ainsi, $H(m+1)$ est vraie dès que $H(1), H(2), \dots, H(m)$ sont vraies.
<u>Conclusion :</u> Le théorème de récurrence forte assure alors que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m = 2^n(2p+1)$. Ainsi, f est surjective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$.

<u>Injectivité :</u> Prenons (n,p) et (n',p') des couples d'entier naturels tels que : $2^n(2p+1) \overset{(*)}{=} 2^{n'}(2p'+1)$.
Imaginons que $n < n'$. Alors $\begin{cases} 2p+1 = 2^{n'-n}(2p'+1) \\ n'-n > 0 \end{cases}$ donc $2p+1$ est pair ce qui est absurde. Par conséquent, $n \geq n'$.
De même en imaginons que $n > n'$. Alors $2p+1 = 2^{n-n'}(2p'+1)$ est pair ce qui est absurde. Par conséquent, $n \leq n'$.
Donc , nécessairement, $n = n'$. Par suite, $(*) s'écrit (2p+1) = (2p'+1)$ et par conséquent, $p = p'$.
J'en conclus que f est injective. Et finalement $f : ((n,p) \mapsto 2^n(2p+1))$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$.

Ex 19 Méthode de dichotomie : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$ et telle que : $f(a)f(b) < 0$ (i.e. $f(a)$ et $f(b)$sont de signes opposés). Alors le TBCSM assure que f s'annule une seule fois sur $[a,b]$ en un réel $\alpha \in]a,b[$. Lorsque l'équation $f(x) = 0$ est impossible à résoudre de manière algébrique, la méthode de dichotomie permet alors, dans cette situation, de déterminer une valeur approchée de α à une précision ε choisie. Voici le principe de dichotomie :

Etape 1 : On calcule $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Ou bien $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ alors $\alpha = \frac{a+b}{2}$. Et c'est fini : on a trouvé la valeur exacte de α.
Ou bien $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ alors

Soit $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ est de signe opposé à $f(a)$. Alors $\alpha \in]a, \frac{a+b}{2}[$. Posons $a_1 = a$ et $b_1 = \frac{a+b}{2}$.
Soit $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ est de signe opposé à $f(b)$. Alors $\alpha \in]\frac{a+b}{2}, b[$. Posons $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = b$.
Alors $\alpha \in]a_1, b_1[$ et a_1 et $b_1$sont deux valeurs approchées de α par défaut et excès à la précision $\frac{b-a}{2}$

$$\boxed{|b_1 - a_1| = \frac{b-a}{2}}$$

Etape 2 : On calcule $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$. Ou bien $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$ alors $\alpha = \frac{a_1+b_1}{2}$. Et c'est fini.
Ou bien $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \neq 0$ alors

Soit $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ est de signe opposé à celui de $f(a_1)$. Alors $\alpha \in]a_1, \frac{a_1+b_1}{2}[$. Posons $a_2 = a_1$ et $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
Soit $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ est de signe opposé f à celui de $f(b_1)$. Alors $\alpha \in]\frac{a_1+b_1}{2}, b_1[$. Posons $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ et $b_2 = b_1$.
Alors $\alpha \in]a_2, b_2[$ et a_2 et b_2 sont deux valeurs approchées de α par défaut et excès à la précision $\frac{b-a}{2^2}$

$$\boxed{|b_2 - a_2| = \frac{b-a}{2^2}}$$

…

Etape $\boldsymbol{n}$: On calcule $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)$. Ou bien $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) = 0$ alors $\alpha = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$. Et c'est fini.
Ou bien $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) \neq 0$ alors

Soit $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)$ et$f(a_{n-1})$ sont de signes opposés. Alors $\alpha \in]a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}[$. Posons $a_n = a_{n-1}$ et $b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$.
Soit $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)$ et $f(b_{n-1})$ sont de signes opposés. Alors $\alpha \in]\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}[$. Posons $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ et $b_n = b_{n-1}$.
Alors $\alpha \in]a_n, b_n[$ et a_n et b_n sont deux valeurs approchées de α par défaut et excès à la précision $\frac{b-a}{2^n}$.

$$\boxed{|b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n}}$$

L'étau se resserre donc autour de la racine α de f sur $]a,b[$. Il suffit de savoir quel entier n choisir pour obtenir la précision ε souhaitée. Il suffit de choisir $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon$. Or, $0 < \frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2^n}{b-a} \geq \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow 2^n \geq \frac{b-a}{\varepsilon} \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \Leftrightarrow n\ln(2) \geq \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}$.
Prenons $n_0 = \left\lfloor \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$. Alors a_{n_0} et b_{n_0} sont deux valeurs approchées de α par défaut et excès à la précision ε.

Application : 1) Montrer que l'équation $e^x + \sqrt{x-2} = 7$ admet une unique solution et en trouver une valeur approchée à 10^{-2} près.
2) Donner une valeur approchée de l'unique point fixe de la fonction cosinus.