Les méthodes classiques sur les matrices et systèmes linéaires

Ex 1 Rang- Produit matriciel-Système linéaire- Matrice non inversible.

Soit $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient ligne i est $c_i = i$ et $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ telle que : $a_{ij} = \frac{i}{j}$.

1. Déterminer $rg(A)$.
2. Calculer AC puis résoudre le système linéaire $AX = C$.
3. Exprimer A^2 en fonction de A.
4. En déduire par l'absurde que A n'est pas inversible.

1. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & & \frac{1}{n} \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & & \frac{2}{n} \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \dots\dots & \frac{3}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{n}{1} & \frac{n}{2} & & \frac{n}{n} \end{pmatrix}$. Donc, $\forall i \in [\![2,n]\!], L_i = iL_1$. Ainsi, $A \underbrace{\sim_L}_{\substack{L_i \leftarrow L_i - iL_1 \\ pou \\ i\in[\![2,n]\!]}} \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \dots\dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$. Donc $rg(A) = 1$.

2.Notons $U_1, \dots, U_n$ *les colonnes de* A.

Alors $AC \underbrace{=}_{\substack{cours \\ cas\ particulier \\ 70.1}} \sum_{j=1}^{n} c_j U_j$. Or, $c_j U_j = jU_j = j \begin{pmatrix} \frac{1}{j} \\ \frac{2}{j} \\ \frac{3}{j} \\ \vdots \\ \frac{n}{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = C$. Donc $AC = \sum_{j=1}^{n} C = nC$.

En conséquence, $A\left(\frac{1}{n}C\right) = \frac{1}{n}(AC) = \frac{1}{n}(nC) = \left(\frac{1}{n}n\right)C = C$. Donc $\frac{1}{n}C = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{2}{n} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{n}{n} \end{pmatrix}$ est une solution particulière du système linéaire $AX = C$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. $\underbrace{AX = 0}_{\substack{(SH) \\ \text{associé à } (S)}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \dots + \frac{1}{n}x_n = 0 \\ 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \dots + \frac{1}{n}x_n) = 0 \\ \vdots \\ n(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \dots + \frac{1}{n}x_n) = 0 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{L_i \leftarrow L_i - iL_1 \\ pour \\ i\in[\![2,n]\!]}} \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \dots + \frac{1}{n}x_n = 0 \\ 0 = 0 \\ \vdots \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \dots - \frac{1}{n}x_n$.

Donc $sol(SH) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \dots - \frac{1}{n}x_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} / x_2, .., x_n réels \right\}$. Alors le cours assure que $sol(S) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \dots - \frac{1}{n}x_n \\ \frac{2}{n} + x_2 \\ \vdots \\ \frac{n}{n} + x_n \end{pmatrix} / x_2, .., x_n réels \right\}$.

3. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $\underbrace{(A^2)_{ij}}_{\substack{coef\ lignei \\ colonne\ j \\ de\ A^2}} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{k}\frac{k}{j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{j} = n\frac{i}{j} = \underbrace{na_{ij}}_{\substack{coef\ ligne\ i \\ colonne\ j\ de\ nA}}$. J'en déduis que $A^2 = nA$.

4. Alors $A(A - nI) = 0$. Or $A \neq nI$ donc $A - nI \neq 0$. Le cours assure alors que A ne peut pas être inversible.

Ex 2 Reste de la division euclidienne-Polynôme annulateur d'une matrice - Puissances et inverse d'une matrice.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que A est combinaison linéaire de A et I.
   b. En déduire A^n où $n \in \mathbb{N}$.
   c. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} (on écrira cette matrice inverse sous forme d'un tableau).

1. Si $n \in \mathbb{N}$ *et* $n < 2$, alors le reste est nul.
   Prenons $n \in \mathbb{N}$ *et* $n \geq 2$. Il existe deux uniques polynômes Q et R tels que $X^n = (X-1)^2Q(X) + R(X)$ *et* $degR < 2$. Donc il existe deux réels a et b tels que $R = aX + b$. On pose $T(X) = (X-1)^2Q(X)$. Alors T admet 1 comme racine au moins double donc $T(1) = T'(1) = 0$. Or, $X^n = T(X) + aX + b$ et $nX^{n-1} = T'(X) + a$. Donc, en évaluant en 1, $\begin{cases} 1 = a + b \\ n = a \end{cases}$. Donc $a = n$ et $b = 1 - n$ et $R(X) = (1-n) + nX$. Ce résultat est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
2. a. $A^2 = 2A - I$
   b. $(A - I)^2 \underbrace{=}_{\substack{FBN \\ avec\ A\ et -I \\ qui\ commutent}} A^2 - 2A + I = 0$. Donc $(X-1)^2$ est annulateur de A.
   Or, on a prouvé que $X^n = (X-1)^2Q(X) + (1-n) + nX$. Donc, $A^n = (A-I)^2Q(A) + (1-n)I + nA = (1-n)I + nA$.
   d. $I = 2A - A^2 = A(2I - A)$. Donc A est inversible et $A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ex 3 Puissance de matrices. FBN. Suite matricielle « géométrique ».

Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et x, y et z des suites telles que $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \\ z_0 = -1 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + y_n + z_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + 2y_n + z_n) \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + y_n + 2z_n) \end{cases}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer les puissances de A .
2. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n.
3. En déduire x_n, y_n *et* z_n en fonction de n. Les suites x , y et z sont –elles convergentes ?

1. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(J + I)$. Comme I et J commuent, $A^n = \frac{1}{4^n}(I + J)^n = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k I^{n-k} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k$. Or, $J^k = \begin{cases} 3^{k-1}J \text{ si } k \geq 1 \\ I \text{ si } k = 0 \end{cases}$.

   Donc, $A^n = \frac{1}{4^n}I + \frac{1}{4^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}J^k = \frac{1}{4^n}I + \frac{1}{4^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}J = \frac{1}{4^n}I + \frac{1}{4^n}\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}\right]J$.

   Or, $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}4^n - \frac{1}{3}$. Donc, $A^n = \frac{1}{4^n}I + \frac{1}{4^n}\left[\frac{1}{3}4^n - \frac{1}{3}\right]J = \frac{1}{3\times4^n}[3I + (4^n - 1)J]$.

2. $X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{4}z_n) \\ \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{4}z_n \\ \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{2}z_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = AX_n$.

   Alors on montre facilement par récurrence que $\forall n, X_n = A^n X_0$. Ainsi, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3\times4^n}\begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   $x_n = \frac{1}{3\times4^n}(2 \times 4^n + 1) \sim_{n\to+\infty} \frac{2\times4^n}{3\times4^n} = 2/3$

   $y_n = \frac{1}{3\times4^n}(2 \times 4^n + 4) \sim_{n\to+\infty} \frac{2\times4^n}{3\times4^n} = 2/3$. Les trois suites convergente vers la même limité 2/3.

   $z_n = \frac{1}{3\times4^n}(2 \times 4^n - 5) \sim_{n\to+\infty} \frac{2\times4^n}{3\times4^n} = 2/3$

Ex 4 Stabilité d'un ensemble-Inversibilité matricielle.

Soit G l'ensemble des matrices de la forme $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où x réel.

1. Montrer que G est stable pour le produit matriciel et que G contient l'élément neutre pour le produit matriciel.
2. Montrer que toute matrice de G est inversible et que son inverse appartient à G.

1. Soit x et y deux réels. $M(x)M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(x+y)^2 & 1 & x+y \\ -2(x+y) & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(x+y) \in G$. et $I = M(0)$.
2. Soit x un réel. D'après 1. $M(x)M(-x) = M(0) = I$ donc $M(x)$ est inversible et $M(x)^{-1} = M(-x) \in G$.

Ex 5 Inverse d'une matrice. Puissances de matrices. FBN.

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Montrer que : $AP = PD$.
3. En déduire que A est inversible et expliciter A^{-1} *et* A^k tel que $k \in \mathbb{N}$.

1. Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 2y + 3z = a \\ 9x + 3y + 3z = b \\ 5x + y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 6z = a + b & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 9x + 3y + 3z = b & L_2 \leftarrow L_2 \\ 6x = 3c - b & L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2 \end{cases}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} y + 6z = a + b \\ 3\left(\frac{c}{2} - \frac{b}{6}\right) + y + z = \frac{b}{3} \\ x = \frac{c}{2} - \frac{b}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 6z = a + b \\ y + z = \frac{5}{6}b - \frac{3}{2}c \\ x = \frac{c}{2} - \frac{b}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5z = a + \frac{1}{6}b + \frac{3}{2}c & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 5y = -a + 4b - 9c & L_2 \leftarrow -L_1 + 6L_2 \\ x = \frac{c}{2} - \frac{b}{6} & L_3 \leftarrow L_3 \end{cases}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{6} + \frac{c}{2} \\ y = -\frac{a}{5} + \frac{4}{5}b - \frac{9}{5}c \\ z = \frac{a}{5} + \frac{b}{30} + \frac{3}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{9}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Le système admet donc une unique solution.

   J'en conclus que P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{9}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$.

2. Par le calcul de AP puis de PD, on vérifie que $AP = PD$.
3. **Inversibilité ?**

   $AP = PD$ donc $A = PDP^{-1}$. Or D est diagonale et n'a pas de coefficient nul sur la diagonale donc D est inversible. Alors A est le produit des trois matrices inversibles : P ; D et P^{-1}, A est donc inversible et $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}(PD)^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ *et* $D^{-1} = diag(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{7})$.

   Puissances ? Enfin, $A^k = (PDP^{-1})^k = PDP^{-1}PDP^{-1}\,PDP^{-1}\,PDP^{-1} = PD^k\,P^{-1}$ *et* $D^k = diag(1, 2^k, 7^k)$.

Ex 6 Matrice nilpotente. Puissances de matrices.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les puissances de A puis celles de B.
2. Montrer que B est inversible et calculer B^k tel que $k \in \mathbb{Z}$.

Puissances de A et de B ?

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ 12 & 12 & -6 \\ 12 & 12 & -6 \end{pmatrix}$ $et\ A^3 = 0$. Donc, $\forall k \geq 3, A^k = 0$.

Je remarque que $B = A - 2I$. Comme A et $-2I$ commutent (puisque I commute avec toute matrice de son type), pour tout entier naturel p ,

$$B^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k(-2I)^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k((-2)^{p-k} I^{p-k}) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-2)^{p-k} A^k I = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-2)^{p-k} A^k$$

$$= \binom{p}{0}(-2)^p A^0 + \binom{p}{1}(-2)^{p-1} A + \binom{p}{2}(-2)^{p-2} A^2 + \underbrace{\binom{p}{3}(-2)^{p-3} A^3 \ldots + \binom{p}{p}(-2)^0 A^p}_{=0}$$

$$= \binom{p}{0}(-2)^p A^0 + \binom{p}{1}(-2)^{p-1} A + \binom{p}{2}(-2)^{p-2} A^2$$

$$B^p = (-2)^p I + p(-2)^{p-1} A - p(p-1)(-2)^{p-3} A^2 = (-2)^{p-3}\left[\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8p & 12p & -8p \\ 8p & 0 & 4p \\ 32p & 24p & -8p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6p(p-1) & 6p(p-1) & -3p(p-1) \\ -12p(p-1) & -12p(p-1) & 6p(p-1) \\ -12p(p-1) & -12p(p-1) & 6p(p-1) \end{pmatrix}\right]$$

$B^p = (-2)^{p-3}\begin{pmatrix} -8+2p+6p^2 & 6p+6p^2 & -5p-3p^2 \\ 20p-12p^2 & -8+12p+12p^2 & -2p+6p^2 \\ 44p-12p^2 & 36p-12p^2 & -8-14p+6p^2 \end{pmatrix}$ (vérifié pour $p = 0,\ 1\ et\ 2$).

Inversibilité de B ?

Je remplace p par -1 pour définir C. Et ensuite je vérifié que C est l'inverse de B en calculant CB.

1ère méthode : D'après la formule de factorisation (autorisée car A et $2I$ commutent) , $A^3 - (2I)^3 = (A - 2I)(A^2 + A(2I) + (2I)^2)$. Après « simplification », j'obtiens : $-8I = B(A^2 + 2A + 4I)$. J'en déduis que $B\left(-\frac{1}{8}A^2 - \frac{1}{4}A - \frac{1}{2}I\right) = I$. J'en conclus que B est inversible et $B^{-1} = A$.

2ème méthode : Posons $C = (-2)^{-1}I - (-2)^{-2}A + (-2)^{-3}A^2$.

Alors $CB = \left(-\frac{1}{2}I - \frac{1}{4}A - \frac{1}{8}A^2\right)(A - 2I) = -\frac{1}{2}A - \frac{1}{4}A^2 - \frac{1}{8}\underbrace{A^3}_{=0} + I + \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}A^2 = I$. J'en conclus que B est inversible et $B^{-1} = A$.

Puissance de B^{-1} ?

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $B^{-n} = (B^{-1})^n = (B^n)^{-1}$. Montrons que $(B^n)^{-1}. = (-2)^{-n}I + (-n)(-2)^{-n-1}A - (-n)(-n-1)(-2)^{-n-3}A^2$

Posons $D = (-2)^{-n}I + (-n)(-2)^{-n-1}A - (-n)(-n-1)(-2)^{-n-3}A^2$.

Alors, $DB^n = [(-2)^{-n}I + (-n)(-2)^{-n-1}A - (-n)(-n-1)(-2)^{-n-3}A^2][(-2)^n I + n(-2)^{n-1}A - n(n-1)(-2)^{n-3}A^2]$

car $A^3 = A^4 = 0$

$$DB^n = \underbrace{(-2)^n(-2)^{-n}}_{=1} I + n\underbrace{[-(-2)^n(-2)^{-n-1} + (-2)^{-n}(-2)^{n-1}]}_{=0}A$$
$$+ n\underbrace{[(-2)^{n-1}(-n)(-2)^{-n-1} - (-2)^{-n}(n-1)(-2)^{n-3} + (-2)^n(-n-1)(-2)^{-n-3}]}_{=-\frac{n}{4}+\frac{n-1}{8}+\frac{n+1}{8}=0}A^2$$

Donc, $DB^n = I$. Ainsi, $B^{-n} = (B^{-1})^n = (B^n)^{-1} = D = (-2)^{-n}I + (-n)(-2)^{-n-1}A - (-n)(-n-1)(-2)^{-n-3}A^2$.

Ex 7 Produit matriciel et inverse d'une matrice.

Soit $n \in \mathbb{N}^*\ et\ \ \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}\ et\ A = \left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2}$.Calculer $A\bar{A}$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Posons $a_{kl} = \omega^{(k-1)(l-1)}\ et\ \ b_{kl} = \overline{\omega^{(k-1)(l-1)}} = \overline{\omega}^{(k-1)(l-1)}$. Posons $C = A\bar{A} = (c_{kl})$. Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$.

$c_{kl} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}b_{sl} = \sum_{s=1}^{n} \omega^{(k-1)(s-1)}\overline{\omega}^{(s-1)(l-1)} = \sum_{s=1}^{n}(e^{\frac{2i\pi}{n}})^{(k-1)(s-1)-(s-1)(l-1)}$

$$\underbrace{=}_{\substack{car \\ (k-1)(s-1)-(s-1)(l-1)= \\ ks-ls-k+l=(k-l)s-(k-l) \\ =(k-l)(s-1)}} \sum_{s=1}^{n}(e^{\frac{2i\pi}{n}})^{(k-l)(s-1)} = \sum_{t=0}^{n-1}(e^{\frac{2i\pi(k-l)}{n}})^t = \begin{cases} \dfrac{1-\left(e^{\frac{2i\pi(k-l)}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2i\pi(k-l)}{n}}}\ si\ e^{\frac{2i\pi(k-l)}{n}} \neq 1 \\ n\ si\ e^{\frac{2i\pi(k-l)}{n}} = 1 \end{cases} \overset{\left(e^{\frac{2i\pi(k-l)}{n}}\right)^n = e^{2i\pi(k-l)} = 1}{\triangleq} \begin{cases} 0\ si\ (k-l)\ \not\equiv 0[n] \\ n\ si\ (k-l)\ \equiv 0[n] \end{cases}.$$

Comme$(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$, $(k-l)\ \equiv 0[n] \Leftrightarrow k = l$. Donc, $c_{kl} = \begin{cases} 0\ si\ k \neq l \\ n\ si\ k = l \end{cases}$. Ainsi, $A\bar{A} = nI$. Par conséquent, $A\left(\frac{1}{n}\bar{A}\right) = I$.

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{n}\bar{A}$.

Ex 8 Caractérisation d'une matrice inversible par le système $AX = 0$

Soit $a_1, a_2, \ldots., a_n$ des réels strictement positifs et $A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & & 1+a_n \end{pmatrix}$.

1. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$, calculer la matrice $X^T AX$.
2. En déduire que A est inversible .

D'abord, $AX = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & & 1+a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+a_1)x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ x_1 + (1+a_2)x_2 + x_3 \ldots + x_n \\ \vdots \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + (1+a_n)x_n \end{pmatrix}$.

Puis $X^T AX = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n) \begin{pmatrix} (1+a_1)x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ x_1 + (1+a_2)x_2 + x_3 \ldots + x_n \\ \vdots \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + (1+a_n)x_n \end{pmatrix}$

$= [(1+a_1)x_1^2 + x_2x_1 + \cdots + x_nx_1] + [x_1x_2 + (1+a_2)x_2^2 + \cdots + x_nx_2] + \cdots + [x_1x_n + \cdots + x_{n-1}x_n + (1+a_n)x_n^2]$

$= \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n x_j\right) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$. Par conséquent,

$AX = 0 \Longrightarrow X^T AX = 0 \Longrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^n \underbrace{a_i x_i^2}_{\substack{réel \\ positif}} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}_{\substack{réel \\ positif}}}_{somme\ nulle\ de\ réels\ positifs} = 0 \Longrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], a_i x_i^2 = 0\ et\ \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = 0 \underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{car \\ \forall i, a_i > 0}} \forall i \in [\![1, n]\!], x_i^2 = 0 \Longrightarrow X = 0$.

J'en conclus que le système linéaire $AX = 0$ admet 0 comme unique solution. Donc A est inversible.