Des exercices classiques sur les polynômes

Ex1 Produit de deux polynômes

Soit m et n deux entiers naturels.

Démontrons $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k} = \binom{n+m}{n}$ en déterminant de deux manières le coefficient de X^n dans $(1+X)^n(1+X)^m$

D'une part, $P = (1+X)^n(1+X)^m = (1+X)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}X^k$. Donc le coefficient de X^n dans P est $\binom{n+m}{n}$.

D'autre part, $P = (1+X)^n(1+X)^m = \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\right]\left[\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}X^j\right] = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ où $c_k = \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{n}{k-j}$. Donc le coefficient de X^n dans P est $c_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{n-j}$. Ainsi, par unicité des coefficients d'un polynôme, $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \binom{n+m}{n}$.

Ex 2 Degré d'un produit, d'une somme, d'une composée de polynômes

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ par analyse-synthèse. Dans l'analyse, on cherchera d'abord le degré d'un tel polynôme.

Le polynôme nul est solution.

Analyse : Supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que : $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Posons $d = \deg(P)$. Alors, $deg\big(P(X^2)\big) = deg\big((X^2+1)P(X)\big)$.

Or, $degP \times deg(X^2) \underbrace{=}_{\substack{degré \\ d'une \\ composée}} 2d$ et $deg\big((X^2+1)P(X)\big) \underbrace{=}_{\substack{degré \\ d'un \\ produit}} deg\big((X^2+1)\big) + \deg(P) = 2 + d$. Donc, $2d = d + 2$ donc $d = 2$.

Ainsi les solutions non nulles de notre problème sont nécessairement de la forme $P(X) = aX^2 + bX + c$ tels que a, b et c $réels$ et $a = 0$.

Ces polynômes sont-ils tous solutions ? Prenons $P(X) = aX^2 + bX + c$ tels que a, b et c $réels$ et $a = 0$. Alors,

$P(X^2) = (X^2+1)P(X) \Leftrightarrow aX^4 + bX^2 + c = (X^2+1)(aX^2+bX+c) \Leftrightarrow -bX^3 + (b-c-a)X^2 + bX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b-c-a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ b = 0 \end{cases}$.

Ainsi, les solutions de notre problème sont tous les polynômes de la forme $a(X^2-1)$ tq $a \in \mathbb{R}$ (pour $a = 0$, on retrouve le polynôme nul).

Ex 3 Factorisation en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P_n = \left(1+\frac{X}{n}\right)^n - \left(1-\frac{X}{n}\right)^n$. Factorisons P_n en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Racines complexes de P_n :

$P_n(z) = 0 \Leftrightarrow \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left(1-\frac{z}{n}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1+\frac{z}{n}}{1-\frac{z}{n}}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{n+z}{n-z}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], \frac{n+z}{n-z} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], n - z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(n-z) \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], z\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) \overset{**}{=} -n\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!]\backslash\{\frac{n}{2}\}, z = -\frac{n\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}{\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)} \underbrace{=}_{\substack{identités \\ du \\ losange}} \frac{ni\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = ntan\left(\frac{k\pi}{n}\right)i.$

car $1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ s'annule pour n pair et $k = \frac{n}{2}$ uniquement . De plus, pour n pair et $k = \frac{n}{2}$, l'égalité (**) n'est pas vérifiée.

On a donc trouvé toutes les racines complexes de P_n. Ces réels $-ntan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ tels que $k \in [\![0, n-1]\!]\backslash\{\frac{n}{2}\}$ sont tous distincts : en effet, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]\backslash\{\frac{n}{2}\}$, $\frac{k\pi}{n} \in [0, \pi/2[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$ tan est strictement croissante (donc injective) et positive sur $[0, \pi/2[$ et tan est strictement croissante (donc injective) et négative sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ et par conséquent, tan est injective sur $[0, \pi/2[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Degré et coefficient dominant de P_n

$P_n = \left(1+\frac{X}{n}\right)^n - \left(1-\frac{X}{n}\right)^n \overset{FBN}{=} \left[\left(\frac{X}{n}\right)^n + n\left(\frac{X}{n}\right)^{n-1} + U(X)\right] - \left[\left(-\frac{X}{n}\right)^n + n\left(-\frac{X}{n}\right)^{n-1} + V(X)\right]$ et $\begin{cases} \deg(U) < n-1 \\ \deg(V) < n-1 \end{cases}$.

Alors, $P_n = \frac{1}{n^n}(1-(-1)^n)X^n + \frac{1}{n^{n-2}}(1-(-1)^{n-1})X^{n-1} + U - V$ et $deg(U-V) \leq \max(\deg(U), \deg(V)) < n-1$.

De plus, $\frac{1}{n^n}(1-(-1)^n) = 0$ $sietssi$ n pair. Et, $\frac{1}{n^{n-2}}(1-(-1)^{n-1}) = 0$ $sietssi$ n impair.

1^er^ cas n impair. Alors $\deg P_n = n$ et codom$(P_n) = \frac{2}{n^n}$. De plus, on a trouvé n racines distinctes de P_n qui sont les complexes $ntan\left(\frac{k\pi}{n}\right)i$ tels que $k \in [\![0, n-1]\!]$. Donc, ces racines sont toutes simples dans P_n et $P_n(X) = \frac{2}{n^n}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - ntan\left(\frac{k\pi}{n}\right)i\right)$.

Parmi ces racines, une seule est réelle qui est $0 = ntan\left(\frac{0.\pi}{n}\right)i$. Donc $P_n(X) = \frac{2}{n^n}X\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - ntan\left(\frac{k\pi}{n}\right)i\right)$.

Ensuite les autres racines non réelles sont deux à deux conjuguées (car P_n est à coefficients réels). Pour $k \in \left[\!\left[1, \frac{n-1}{2}\right]\!\right]$, $ntan\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$ et pour $k \in \left[\!\left[\frac{n+1}{2}, n-1\right]\!\right]$, $ntan\left(\frac{k\pi}{n}\right) < 0$. Donc, les complexes $ntan\left(\frac{k\pi}{n}\right)i$ $avec$ $k \in \left[\!\left[\frac{n+1}{2}, n-1\right]\!\right]$ sont les conjugués des complexes $ntan\left(\frac{k\pi}{n}\right)i$ $avec$ $k \in \left[\!\left[1, \frac{n-1}{2}\right]\!\right]$. J'en déduis que :

$P_n(X) = \frac{2}{n^n}X\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X - ntan\left(\frac{k\pi}{n}\right)i\right)\left(X + ntan\left(\frac{k\pi}{n}\right)i\right) = \frac{2}{n^n}X\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X^2 + n^2tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2\right)$.

2ème cas n pair. Alors $\deg P_n = n-1$ et $\operatorname{codom}(P_n) = \frac{2}{n^{n-2}}$. De plus, on a trouvé $n-1$ racines distinctes de P_n qui sont les complexes $n\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)i$ tels que $k \in [\![0, n-1]\!] \backslash \{n/2\}$. Donc, ces racines sont toutes simples dans P_n et $P_n(X) = \frac{2}{n^n}\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq\frac{n}{2}}}^{n-1}\left(X - n\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)i\right)$.

Parmi ces racines, une seule est réelle qui est $0 = n\tan\left(\frac{0.\pi}{n}\right)i$. Donc $P_n(X) = \frac{2}{n^n}X\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq\frac{n}{2}}}^{n-1}\left(X - n\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)i\right)$.

Ensuite les autres racines non réelles sont deux à deux conjuguées (car P_n est à coefficients réels). Pour $k \in \left[\!\left[1, \frac{n}{2}-1\right]\!\right]$, $n\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$ et pour $k \in \left[\!\left[\frac{n}{2}+1, n-1\right]\!\right]$, $n\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) < 0$. Donc, les complexes $n\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)i$ avec $k \in \left[\!\left[\frac{n}{2}+1, n-1\right]\!\right]$ sont les conjugués des complexes $n\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)i$ avec $k \in \left[\!\left[1, \frac{n}{2}-1\right]\!\right]$. J'en déduis que :

$P_n(X) = \frac{2}{n^{n-2}}X\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(X - n\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)i\right)\left(X + n\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)i\right) = \frac{2}{n^{n-2}}X\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(X^2 + n^2\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2\right)$.

Ex 4 Divisibilité-Caractérisation des racines multiples-Polynôme dérivé (dérivé d'un produit et d'une somme).

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. Montrer que $(X-1)^2$ divise $A = (\sum_{k=0}^{n-1} X^k)^2 - n^2X^{n-1}$.

$(X-1)^2$ divise A sietssi $\exists Q \in \mathbb{R}[X], A = (X-1)^2Q(X)$ sietssi 1 est racine au moins double de A sietssi $\tilde{A}(1) = \tilde{A}'(1) = 0$.

Calculons $\tilde{A}(1)$ et $\tilde{A}'(1)$:

$\tilde{A}(1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} 1\right)^2 - n^2 = n^2 - n^2 = 0$.

$A'(X) = 2(\sum_{k=0}^{n-1} X^k)'(\sum_{k=0}^{n-1} X^k) - n^2(X^{n-1})' = 2(\sum_{k=1}^{n-1} kX^{k-1})(\sum_{k=0}^{n-1} X^k) \quad - n^2(n-1)X^{n-2}$

Donc $\tilde{A}'(1) = 2(\sum_{k=1}^{n-1} k)(\sum_{k=0}^{n-1} 1) \quad - n^2(n-1) = \frac{2n(n-1)}{2}\ n - n^2(n-1) = 0$.

J'en conclus que $(X-1)^2$ divise A.

Ex 5 Relation entre le degré et nombre de racines

Soit a , b et c trois réels distincts.

1. Trouver A, B et C trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que $\begin{cases} A(b) = A(c) = 0 \text{ et } A(a) = 1 \\ B(a) = B(c) = 0 \text{ et } B(b) = 1. \\ C(a) = C(b) = 0 \text{ et } C(c) = 1 \end{cases}$
2. Montrer, sans développer $A + B + C$, que : $A + B + C = 1$
3. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $P = \tilde{P}(a)A + \tilde{P}(b)B + \tilde{P}(c)C$.
4. Prouver que cette écriture de P comme combinaison linéaire *de* A, B *et* C est unique.

1. A est de degré au plus 2 et admet b et c comme racines. Donc il existe un réel λ tel que : $A(X) = \lambda(X-b)(X-c)$. Alors $\tilde{A}(a) = \lambda(a-b)(a-c) = 1$ donc $\lambda = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$. Ainsi, $A(X) = \frac{1}{(a-b)(a-c)}(X-b)(X-c)$.

De même, $B(X) = \frac{1}{(b-c)(c-a)}(X-c)(X-a)$ et $C(X) = \frac{1}{(c-a)(c-b)}(X-a)(X-b)$.

2. Posons $T = A + B + C - 1$. Alors $\tilde{T}(a) = A(a) + B(b) + C(c) = 1 + 0 + 0 - 1 = 0$. De même $\tilde{T}(B) = \tilde{T}(C) = 0$.

Donc a, b et c sont racines de T. De plus, $\deg(T) \leq \max(\deg(A), \deg(B), \deg(C), \deg(1)) = 2$. Donc T a un nombre de racines strictement supérieur à son degré. Donc $T = 0$. Ainsi, $A + B + C = 1$.

3. Posons $T = P - [\tilde{P}(a)A + \tilde{P}(b)B + \tilde{P}(c)C]$. Alors, comme précédemment, $T(a) = T(b) = T(c) = 0$ et $\deg(T) \leq 2$.

Ainsi, T est nul et $P = \tilde{P}(a)A + \tilde{P}(b)B + \tilde{P}(c)C$.

4. Soit u, v et w des réels tels que $P = uA + vB + wC$. Alors $\tilde{P}(a) = uA(a) + uB(a) + wC(a) = u$. De même, $\tilde{P}(b) = v$ et $\tilde{P}(c) = w$.

Ainsi, $P = \tilde{P}(a)A + \tilde{P}(b)B + \tilde{P}(c)C$ est l'unique décomposition de P comme combinaison linéaire de A, B et C.

Ex 6 Forme scindée. Relation entre les racines de P et celles de P'.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $deg(P) \geq 2$. Montrer si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

●On note λ le coefficient dominant de P et $\alpha_1, .., \alpha_s$ les racines de P de multiplicités respectives non nulles $m_1, .., m_s$ où $s \in \mathbb{N}^*$.
$\alpha_1, .., \alpha_s$ étant réels , on peut les ordonner. On impose donc : $\alpha_1 < \alpha_2 < .. . < \alpha_s$.
On a ainsi, $P = \lambda\prod_{k=1}^{s}(X-\alpha_k)^{m_k}$ et $\deg(P) = \sum_{k=1}^{s}\deg((X-\alpha_k)^{m_k}) = \sum_{k=1}^{s} m_k$.

●α_k est racine de P d'ordre de multiplicité m_k i.e. $P(\alpha_k) = P'(\alpha_k) = P''(\alpha_k) = .. = P^{(m_k-1)}(\alpha_k) = 0$ et $P^{(m_k)}(\alpha_k) \neq 0$. Donc, $(P')'(\alpha_k) = .. = (P')^{(m_k-2)}(\alpha_k) = 0$ et $(P')^{(m_k-1)}(\alpha_k) \neq 0$. Donc, α_k est racine de P' d'ordre de multiplicité $m_k - 1$, avec, par convention, si $m_k - 1 = 0$ alors α_kn'est pas racine de P'. Cela fait déjà $\sum_{k=1}^{s}(m_k - 1)$ racines pour P'.

●Soit $k \in [\![1, s-1]\!]$. Le théorème de Rolle s' applique à $\tilde{P}$ sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$: $\tilde{P}$ est continue sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ et dérivable sur $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ et $\tilde{P}(\alpha_k) = 0 = \tilde{P}(\alpha_{k+1})$ donc il existe $c_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $\tilde{P}'(c_k) = 0$.
$c_1, c_2, \ldots, c_{s-1}$ sont $(s-1)$ racines distinctes au moins simple de P'.

●Nous avons ainsi trouvé $s - 1 + \sum_{k=1}^{s}(m_k - 1)$ racines de P'. Or, $s - 1 + \sum_{k=1}^{s}(m_k - 1) = s - 1 + (\sum_{k=1}^{s} m_k) - (\sum_{k=1}^{s} 1) = s - 1 + \deg(P) - s = \deg(P) - 1 = \deg(P')$. Donc les racines déjà trouvées sont les seules racines de P' et P' est scindé sur $\mathbb{R}$ et

$$P' = \lambda n\left[\prod_{k=1}^{s}(X-\alpha_k)^{m_k-1}\right]\left[\prod_{k=1}^{s-1}(X-c_k)\right] \text{ où } n = \deg(P) = \sum_{k=1}^{s} m_k \text{ et .}$$

Ex 7 D'Alembert Gauss

Trouver tous les P polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$.

Les polynômes P constants vérifient $P(X+1) = P(X)$.

Soit P un polynôme non constant. Imaginons un instant que $P(X+1) = P(X)$. Donc $\forall z \in \mathbb{C}, \tilde{P}(z+1) = \tilde{P}(z)$.

P étant non constant , le théorème de d'Alembert Gauss, P admet au moins une racine complexe α. Alors $\tilde{P}(\alpha) = 0$. Alors $\tilde{P}(\alpha+1) = \tilde{P}(\alpha) = 0$. Donc, $\alpha + 1$ est racine de P . Alors $\tilde{P}(\alpha+2) = \tilde{P}(\alpha+1) = 0$. Donc, $\alpha + 2$ est racine de P . On montrer alors facilement par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, \alpha + k$ est racine de P. Ainsi, P a une infinité de racines donc P est le polynôme nul ce qui contredit le fait que P n'est pas constant. Ainsi, il n'existe pas de polynôme non constant vérifiant $P(X+1) = P(X)$ et nous pouvons conclure que les polynômes constants sont les solutions de notre problème.

Ex 8 Relation coefficients-racines

Soit $P = X^3 + X^2 + 1$.

1. Justifier que P admet une racine réelle et deux racines complexes conjuguées. On ne demande pas de les déterminer. On les note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
2. Calculer $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ *et* $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\,\alpha_3$.
3. En déduire ${\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + {\alpha_3}^2$ et $\frac{{\alpha_2}^2+{\alpha_3}^2}{{\alpha_1}^2} + \frac{{\alpha_1}^2+{\alpha_3}^2}{{\alpha_2}^2} + \frac{{\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2}{{\alpha_3}^2}$.
4. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^7 par $X^3 + X^2 + 1$. En déduire ${\alpha_1}^7 + {\alpha_2}^7 + {\alpha_3}^7$

1. Etudions $\tilde{P}: \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^3 + t^2 + 1 \end{pmatrix}$. $\tilde{P}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\tilde{P}'(t) = 3t^2 + 2t = 3t\left(t + \frac{2}{3}\right)$. D'où les variations de $\tilde{P}$:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$\tilde{P}'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$\tilde{P}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Comme $\tilde{P}(0) = 1 > 0$, $\tilde{P}\left(-\frac{2}{3}\right) = 1$. Grâce aux variations et valeurs, et limites de $\tilde{P}$ et la continuité de $\tilde{P}$, $\tilde{P}$ s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$ en un réel $\alpha_1$et $\alpha_1 \in]-\infty, -\frac{2}{3}[$.

Comme P est de degré 3, P a trois racines complexes comptées avec leur multiplicité et dont une seule réelle (d'après ce qui précède) . Les deux autres racines sont donc complexes non réelles. Et comme P est à coefficients réels, ces deux racines complexes sont conjuguées. Soit α_2 *et* $\alpha_3 = \overline{\alpha_2}$ ces deux racines complexes non réelles.

2. D'après le cours, en notant $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1$ les coefficients de P,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{a_2}{a_3} = -1 \text{ et } \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = (-1)^3\frac{a_0}{a_3} = -1.$$

De plus, $P = X^3 + X^2 + 1 = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3) = X^3 - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)X^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3)X + \alpha_1\alpha_2\alpha_3$. Donc par unicité des coefficients, je peux identifier ces derniers et j'obtiens $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 = 0$.

Rque: $\alpha_1 + \alpha_2 + \overline{\alpha_2} = \alpha_1 + 2Re(\alpha_2)$ *et* $\alpha_1\alpha_2\overline{\alpha_2} = \alpha_1|\alpha_2|^2$ *et* $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\overline{\alpha_2} + \alpha_1\overline{\alpha_2} = 2\alpha_1Re(\alpha_2) + |\alpha_2|^2$. Donc, $\begin{cases} \alpha_1 + 2Re(\alpha_2) = -1 \\ \alpha_1|\alpha_2|^2 = -1 \\ 2\alpha_1Re(\alpha_2) + |\alpha_2|^2 = 0 \end{cases}$.

3. Alors, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3) = 1$.

Puis, $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_2^2\alpha_3 + {\alpha_1}^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2 + \alpha_1\alpha_3^2)$

$$= -1 - (\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2) + \alpha_2\alpha_3(\alpha_2+\alpha_3) + \alpha_1\alpha_3(\alpha_1+\alpha_3))$$

$$= -1 - (\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_3) + \alpha_2\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1) + \alpha_1\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_2))$$

$$= -1 - (\alpha_1\alpha_2(-1-\alpha_3) + \alpha_2\alpha_3(-1-\alpha_1) + \alpha_1\alpha_3(-1-\alpha_2))$$

$$= -1 - (-\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \quad = -1 - (0+3) = -4.$$

Enfin, $\frac{{\alpha_2}^2+{\alpha_3}^2}{{\alpha_1}^2} + \frac{{\alpha_1}^2+{\alpha_3}^2}{{\alpha_2}^2} + \frac{{\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2}{{\alpha_3}^2} = \frac{{\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2+{\alpha_3}^2-{\alpha_1}^2}{{\alpha_1}^2} + \frac{{\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2+{\alpha_3}^2-{\alpha_2}^2}{{\alpha_2}^2} + \frac{{\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2+{\alpha_3}^2-{\alpha_3}^2}{{\alpha_3}^2}$

$$= \frac{1-{\alpha_1}^2}{{\alpha_1}^2} + \frac{1-{\alpha_2}^2}{{\alpha_2}^2} + \frac{1-{\alpha_3}^2}{{\alpha_3}^2} = \frac{1}{{\alpha_1}^2} + \frac{1}{{\alpha_2}^2} + \frac{1}{{\alpha_3}^2} - 3$$

$$= \frac{{\alpha_2}^2{\alpha_3}^2 + {\alpha_1}^2{\alpha_3}^2 + {\alpha_1}^2{\alpha_2}^2}{{\alpha_1}^2{\alpha_2}^2{\alpha_3}^2} - 3$$

$$= \frac{(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2{\alpha_3}^2 + \alpha_1{\alpha_2}^2\alpha_3 + {\alpha_1}^2\alpha_2\alpha_3)}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2} - 3$$

$$= \frac{-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{1} - 3 = \frac{-2(-1)(-1)}{1} - 3 = -5.$$

4. Effectuons la division euclidienne :

X^7	X^3+X^2+1
$\underline{-(X^7+X^6+X^4)}$	$X^4-X^3+X^2-2X+3$
$-X^6-X^4$	
$\underline{-(-X^6-X^5-X^3)}$	
$X^5-X^4+X^3$	
$\underline{-(X^5+X^4+X^2)}$	
$-2X^4+X^3-X^2$	
$\underline{-(-2X^4-2X^3-2X)}$	
$3X^3-X^2+2X$	
$\underline{-(3X^3+3X^2+3)}$	
$-4X^2+2X-3$	

Alors $-4X^2+2X-3$ est le reste de la division euclidienne de X^7 par X^3+X^2+1 et $Q=X^4-X^3+X^2-2X+3$ est le quotient.
On a $X^7=P(X)Q(X)-4X^2+2X-3$. Donc, pour chaque racine α de $P, \alpha^7=\underbrace{P(\alpha)}_{=0}Q(\alpha)-4\alpha^2+2\alpha-3=-4\alpha^2+2\alpha-3$.

Donc, ${\alpha_1}^7+{\alpha_2}^7+{\alpha_3}^7=-4({\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2+{\alpha_3}^2)+2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-3=-4-2-3=-5$.

Ex 9 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $P_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples.

$P_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$ donc $P_n{}'(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{kX^{k-1}}{k!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{X^{k-1}}{(k-1)!}=\sum_{p=1}^{n-1}\frac{X^p}{p!}=P_n(X)-\frac{X^n}{n!}$.

Imaginons un instant que α soit une racine multiple de P_n. Alors α est une racine commune de de P_n et P_n'. Donc α
$0=P_{n-1}(\alpha)=P_n(\alpha)-\frac{\alpha^n}{n!}=0-\frac{\alpha^n}{n!}=-\frac{\alpha^n}{n!}$ et par suite, $\alpha=0$. Alors $0 \underbrace{=}_{\substack{car\\ \alpha=0\\ est\ racine\\ de\ P}} P_n(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{0^k}{k!}\underbrace{=}_{car\ 0^0=1} 1$ ce qui est absurde ! Ainsi $P_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples.