

DL 11

Problème

Résultats préliminaires

1. Montrer que si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall t \in [-1,1], \tilde{P}(t) = \tilde{Q}(t)$ alors $P = Q$.
2. Justifier que si f est une fonction continue sur $[-1,1]$ alors $\max_{t \in [-1,1]} |f(t)|$ existe ; on notera alors $\|f\|_\infty = \max_{t \in [-1,1]} |f(t)|$.

Partie I Une famille de polynômes

$\forall n \in \mathbb{N}$, on cherche dans cette partie à prouver l'existence et l'unicité d'un polynôme T_n tel que :

$$\forall x \in [-1,1], \tilde{T}_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x)).$$

3. Montrer que T_0 et T_1 existent et les déterminer.
4. Montrer que si T_n existe alors il est l'unique polynôme vérifiant :

$$\forall x \in [-1,1], \tilde{T}_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x)).$$
5. Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}$ existe et $T_{n+2}(X) + T_n(X) = 2XT_{n+1}(X)$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n .
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la parité de T_n .
8. (a) Justifier que : $\forall \theta \in [0, \pi], \tilde{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
 (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $[0, \pi]$, l'équation $\cos(n\theta) = 0$.
 (c) Montrer que T_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses racines.
 (d) Donner la factorisation de T_n en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
 (e) Montrer que : $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\|\tilde{T}_n\|_\infty = 1$.
10. On pose $V_n = 2^{1-n}T_n$. Montrer que V_n est unitaire (i.e. son coefficient dominant vaut 1) et est de degré n .
11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\|\tilde{V}_n\|_\infty = 2^{1-n}$.
12. Imaginons un instant qu'il existe un polynôme P unitaire tel que $\|\tilde{P}_n\|_\infty < 2^{1-n}$.
 $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
 (a) Montrer que $\deg(V_n - P) \leq n - 1$.
 (b) Donner le signe de $(\tilde{V}_n - \tilde{P})(x_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
 (c) En déduire que $V_n = P$.
 (d) Conclure.

Partie II Approximation polynomiale d'une fonction de classe C^n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe C^n sur $[-1,1]$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels de $[-1,1]$ tous distincts.
 On pose $S(x) = \prod_{k=1}^n (X - a_k)$.

13. Déterminer le degré, le coefficient dominant et les racines de S .
14. Pose $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_j(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{(X - a_k)}{(a_j - a_k)}$.
 (a) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer le degré, le coefficient dominant et les racines de L_j . Calculer $L_j(a_j)$.
 (b) Montrer que $(L_1, \dots, L_n)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
 (c) Montrer que $H(X) = \sum_{j=1}^n f(a_j)L_j(X)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \tilde{H}(a_i) = f(a_i).$$
15. Soit $\forall t \in [-1,1], \varphi(t) = f(t) - \tilde{H}(t) - \lambda \tilde{S}(t)$ où λ est un réel que l'on va choisir.
 Soit $x \in [-1,1] \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

- (a) Déterminer la valeur de λ telle que $\varphi(x) = 0$. Désormais λ prend cette valeur.
- (b) Montrer que φ s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[-1, 1]$.
- (c) En déduire que $\varphi^{(n)}$ s'annule au moins 1 fois sur $[-1, 1]$.
- (d) Déterminer $\varphi^{(n)}$ en fonction de $f^{(n)}$, n et λ .

(e) En déduire qu'il existe un réel $a \in [-1, 1]$ tel que : $f(x) - \tilde{H}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tilde{S}(x)$.

16. Déduire de la question précédente que : $\forall x \in [-1, 1], |f(x) - H(x)| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} |S(x)|$.

17. Pour quelles valeurs de $a_1, a_2, \dots, a_n$, la quantité $\|S\|_\infty$ est-elle minimale ?

18. En déduire que $\|f - H\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} 2^{1-n}$.