Corrigé DL 11

Résultats préliminaires

1. Montrer que si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall t \in [-1,1], \tilde{P}(t) = \tilde{Q}(t)$ alors $P = Q$.

Soit P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall t \in [-1,1], \tilde{P}(t) = \tilde{Q}(t)$. Posons $T = P - Q$. Alors $T \in \mathbb{R}[X]$ et $\forall t \in [-1,1], \tilde{T}(t) = 0$. Donc T est un polynôme ayant une infinité de racines. Par conséquent, T est le polynôme nul et ainsi, $P = Q$.

2. Justifier que si f est une fonction continue sur $[-1,1]$ alors $max_{t\in[-1,1]}|f(t)|$ existe ; on notera alors $\|f\|_\infty = max_{t\in[-1,1]}|f(t)|$.

Soit f une fonction continue sur $[-1,1]$. Alors, comme la fonction valeur absolue et continue sur $\mathbb{R}$, $|f|$ est continue sur le segment [-1,1] donc $|f|$ est bornée et atteint ses bornes sur $[-1,1]$. Ainsi, $max_{t\in[-1,1]}|f(t)|$ existe.

Partie I Une famille de polynômes

$\forall n \in \mathbb{N}$, on cherche dans cette partie à prouver l'existence et l'unicité d'un polynôme réel T_n tel que :
$\forall x \in [-1,1], \widetilde{T_n}(x) = \cos(nArccos(x))$.

3. Montrer que T_0 et T_1 existent et les déterminer.

$\forall x \in [-1,1], \cos(0Arccos(x)) = \cos(0) = 1$. Donc, $T_0 = 1$ convient.
$\forall x \in [-1,1], \cos(Arccos(x)) = x$. Donc, $T_1 = X$ convient.

4. Montrer que si T_n existe alors il est l'unique polynôme vérifiant $\forall x \in [-1,1], \widetilde{T_n}(x) = \cos(nArccos(x))$.

Supposons qu'il existe deux polynômes P et T_n tels que : $\forall x \in [-1,1], \widetilde{T_n}(x) = \cos(nArccos(x))$ et $\tilde{P}(x) = \cos(nArccos(x))$. Alors, : $\forall x \in [-1,1], \widetilde{T_n}(x) = \tilde{P}(x)$. Alors d'après 1. , $P = T_n$. Donc, si T_n existe alors il est unique.

5. Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}$ existe et $T_{n+2}(X) + T_n(X) = 2XT_{n+1}(X)$.

Posons $H(n)$ la propriété : « T_{n+2}, T_{n+1}, T_n existent et $T_{n+2}(X) = -T_n(X) + 2XT_{n+1}(X)$ ».

Initialisation : T_0 et T_1 existent . Posons $U(X) = -T_0(X) + 2XT_1(X) = 2X^2 - 1$.
Alors, $\forall x \in [-1,1], \cos(2Arccos(x)) = 2cos^2(Arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1 = \tilde{U}(x)$. Donc $T_2 = U$ convient et par conséquent, $H(2)$ est vraie.

Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}$. Je suppose que $H(n)$ est vraie.
Alors T_{n+2}, T_{n+1}, T_n existent et $T_{n+2}(X) = -T_n(X) + 2XT_{n+1}(X)$. Alors , $\forall x \in [-1,1]$,
$\cos((n+3)Arccos(x)) + \cos((n+1)Arccos(x)) = 2\cos((n+2)Arccos(x))\cos(Arccos(x)) = 2x\widetilde{T_{n+2}}(x)$
Donc, $\cos((n+3)Arccos(x)) = 2x\widetilde{T_{n+2}}(x) - \widetilde{T_{n+1}}(x)$. Posons $T_{n+3}(X) = 2XT_{n+2}(X) - T_{n+1}(X)$.
Alors, $T_{n+3} \in \mathbb{R}[X]$ et $\forall x \in [-1,1], \cos((n+3)Arccos(x)) = \widetilde{T_{n+3}}(x)$. Donc T_{n+3}convient.

CCL : Le théorème de récurrence simple assure que pour tout entier naturel n , T_n existe et $T_{n+2}(X) = -T_n(X) + 2XT_{n+1}(X)$.

Bilan : les réponses 3,4 et 5 assurent que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que :
$\forall x \in [-1,1], \widetilde{T_n}(x) = \cos(nArccos(x))$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.

$T_0(X) = 1, T_1(X) = X, T_2(X) = 2X^2 - 1$ et $T_3(X) = -T_1(X) + 2XT_2(X) = -X + 2X(2X^2 - 1) = 4X^3 - 3X$.
Conjecture : $\forall n \geq 1, [2^{n-1}X^n$ est le terme dominant $de\ T_n]_{=H(n)}$. Montrons $H(n)$ par récurrence.

Initialisation : $H(1)$ et $H(2)$ sont vraies.

Propagation : Soit n un entier naturel non nul. Je suppose que $H(n)$ et $H(n+1)$ sont vraies. Alors il existe Q et R deux polynômes tels que : $T_n = 2^{n-1}X^n + Q$ et $T_{n+1} = 2^nX^{n+1} + R$ et $deg(Q) < n$ et $deg(R) < n+1$. Alors,
$T_{n+2}(X) = -T_n(X) + 2XT_{n+1}(X) = 2X(2^nX^{n+1} + R) - 2^{n-1}X^n - Q = 2^{n+1}X^{n+2} + \underbrace{2XR - 2^{n-1}X^n - Q}_{S}$. De plus, $deg(S) \leq \max(\deg(R) + 1, n, \deg(Q)) < n+1$. Par conséquent, $\deg(T_{n+2}) = n+2$ et $2^{n+1}X^{n+2}$est le terme dominant de T_{n+2}.

Conclusion : le théorème de récurrence double assure que : $\forall n \geq 1, 2^{n-1}X^n$ est le terme dominant $de\ T_n$; autrement dit, T_n est de degré n et 2^{n-1} est le coefficient dominant de T_n.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la parité de T_n.

T_0 et T_2 sont pairs et T_1 et T_3 sont impairs. On peut conjecturer que $[T_n$ a la même parité que $n; autrement\ dit, T_n(-X) = (-1)^nT_n(X).]_{H(n)}$.

Initialisation : $H(0), H(1), H(2), H(3)$ sont vraies.

Propagation : Soit n un entier naturel. Je suppose que $H(n)$ et $H(n+1)$ sont vraies. Alors

$$\begin{aligned}T_{n+2}(-X) &= -T_n(-X) + 2(-X)T_{n+1}(-X) = -(-1)^nT_n(X) + 2(-X)(-1)^{n+1}T_{n+1}(X)\\ &= (-1)^{n+1}T_n(X) + 2X(-1)^{n+2}T_{n+1}(X)\\ &=(-1)^{n+2}(-T_n(X) + 2XT_{n+1}(X))\end{aligned}$$

$=(-1)^{n+2}T_{n+2}(X)$ OK !!

Conclusion : le théorème de récurrence double assure que : $\forall n, T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$; i.e. T_n a la même parité que n.

8. (a) Justifier que : $\forall \theta \in [0,\pi], \widetilde{T_n}(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

$Soit\ \theta \in [0,\pi]. Posons\ x = \cos(\theta). Alors\ x \in [-1,1]\ et\ \theta = Arccos(x)$. Donc,

$\widetilde{T_n}(\cos(\theta)) = \widetilde{T_n}(x) = \cos(nArccos(x)) = \cos(n\theta)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $[0,\pi]$, l'équation $\cos(n\theta) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*\ et\ \theta \in [0,\pi]$.

$\cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/ n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car \\ \theta\in[0,\pi]}} \exists k \in [\![0, n-1]\!]/\ \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$.

Ainsi, $Sol = \{\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} / k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

(c) Montrer que T_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses racines.

Soit $\theta \in [0,\pi]$. D'après (a) et (b), $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ si\ \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ alors $\widetilde{T_n}(\cos(\theta)) = 0$. Par conséquent, les réels $cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})$ tq $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont <u>des</u> racines de T_n. Or, $\deg T_n = n$ donc T_n a au plus n racines réelles. De plus, les réels $\theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ tq $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont tous distincts dans $[0,\pi]$. Comme la fonction cosinus est injective sur $[0,\pi]$, les réels $cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})$ tq $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont tous distincts. Donc, T_n a au moins n racines réelles. Comme T_n a au plus n racines réelles, T_n a exactement n racines réelles , avec $n = deg(T_n)$. J'en déduis que T_n est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples qui sont $cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ tq $k \in [\![0, n-1]\!]$.

(d) Donner la factorisation de T_n en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $T_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$

(e) Montrer que : $\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} & si\ n\ est\ pair \\ 0\ sinon \end{cases}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = produit\ des\ racines\ de\ T_n = (-1)^n \frac{terme\ constant\ de\ T_n}{terme\ domionant\ de\ T_n} = (-1)^n \frac{\widetilde{T_n}(0)}{2^{n-1}}$

Or $\widetilde{T_n}(0) = 0\ si\ n\ est\ impair$ puisque dans ce cas T_n est impair.

Et $\widetilde{T_{2p}}(0) = \cos(2pArccos(0)) = \cos(p\pi) = (-1)^p$

Ainsi, $\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}\ si\ n\ pair \\ 0\ si\ n\ impair \end{cases}$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\|\widetilde{T_n}\|_\infty = 1$.

$\forall x \in [-1,1], |\widetilde{T_n}(x)| = |\cos(nArccos(x))| \le 1$. Par conséquent, $\|\widetilde{T_n}\|_\infty \le 1$.

Et, $|\widetilde{T_n}(1)| = |\cos(nArccos(1))| = |\cos(0)| = 1$. Donc, $\|\widetilde{T_n}\|_\infty = 1$.

10. On pose $V_n = 2^{1-n}T_n$. Montrer que V_n est unitaire (i.e. son coefficient dominant vaut 1) et est de degré n.

$$V_n = 2^{1-n} \times 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right).$$

Donc, $deg(V_n) = \sum_{k=0}^{n-1} deg\left(X - cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.

Et, $codom(V_n) = \prod_{k=0}^{n-1} codom\left(X - cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) = \prod_{k=0}^{n-1} 1 = 1$. Donc, V_n est unitaire.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\|\widetilde{V_n}\|_\infty = 2^{1-n}$.

$\forall x \in [-1,1], |\widetilde{V_n}(x)| = |2^{1-n}\widetilde{T_n}(x)| = 2^{1-n}|\widetilde{T_n}(x)|$. Par conséquent, $\|\widetilde{V_n}\|_\infty = 2^{1-n}\|\widetilde{T_n}\|_\infty = 2^{1-n}$.

12. Imaginons un instant qu'il existe P tel que $deg(P) = n$, $codom(P) = 1$ et $\|\tilde{P}\|_\infty < 2^{1-n}$.

(a) Montrer que $\deg(V_n - P) \le n-1$.

$\deg(V_n) = \deg(P) = n\ et\ \ codom(V_n) = 1 = \mathrm{codom}(P). Donc, \deg(V_n - P) \le n-1$.

(b) $\forall k \in [\![0, n]\!]$, on note $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Donner le signe de $(\widetilde{V_n} - \tilde{P})(x_k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

$Soit\ k \in [\![0, n-1]\!]$. $\widetilde{V_n}(x_k) = 2^{1-n}\cos\left(nArccos\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right) = 2^{1-n}\cos\left(\frac{nk\pi}{n}\right) = 2^{1-n}\cos(k\pi) = 2^{1-n}(-1)^k$

$\widetilde{V_n}(x_k) = \begin{cases} 2^{1-n}\ si\ k\ pair \\ -2^{1-n}\ si\ k\ impair \end{cases}$ Comme $\|\widetilde{V_n}\|_\infty = 2^{1-n}, \widetilde{V_n}(x_k) = \begin{cases} 2^{1-n} = max\widetilde{V_n}\ si\ k\ pair \\ -2^{1-n} = min\widetilde{V_n}\ si\ k\ impair \end{cases}$.

De plus, $-2^{1-n} < -\tilde{P}(x_k) < 2^{1-n}$. Donc, $\widetilde{V_n}(x_k) - \tilde{P}(x_k)\begin{cases} > 0 \, si \, k \, pair \\ < 0 \, si \, k \, impair \end{cases}$.

(c) En déduire que $V_n = P$.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. $\widetilde{V_n} - \tilde{P}$ *est continue ete change donc de signe sur* $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$. Donc $\widetilde{V_n} - \tilde{P}$ s'annule sur chaque intervalle $\left]\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right[$ en un réel t_k. Alors $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ sont n racines distinctes de $V_n - P$. Comme $\deg(V_n - P) \leq n - 1$, $V_n - P$ a dionc plus de racines que son degré et ainsi $V_n - P = 0$ i.e. $V_n = P$ ce qui est absurde puisque $\|\tilde{P}\|_\infty < \|\widetilde{V_n}\|_\infty$.

(d) Conclure.

Un tel polynôme P n'existe pas . Ainsi, tout polynôme P de degré n et unitaire verifie $\|\tilde{P}\|_\infty \geq \|\widetilde{V_n}\|_\infty$.

Partie II Approximation polynomiale d'une fonction de classe C^n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$et f une fonction de classe C^n sur $[-1,1]$ et $a_1, \ldots., a_n$ des réels de $[-1,1]$ tous distincts.
On pose $S(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$.

13. Déterminer le degré, le coefficient dominant et les racines de S.

$\deg(S) = \sum_{k=1}^{n} \deg(X - a_k) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$
$\text{codom}(S) = \prod_{k=1}^{n} \text{codom}(X - a_k) = \prod_{k=1}^{n} 1 = 1$
$a_1, \ldots., a_n$ sont les racines de S , elles sont toutes simples.

14. Pose $\forall j \in [\![1, n]\!], L_j(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{(X-a_k)}{(a_j - a_k)}$.

(a) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Déterminer le degré, le coefficient dominant et les racines de L_j. Calculer $L_j(a_j)$

$\deg(L_j) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \deg \frac{(X-a_k)}{(a_j-a_k)} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} 1 = n - 1$

$\text{codom}\, L_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \text{codom} \frac{(X-a_k)}{(a_j-a_k)} = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} 1 = 1$

$a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, .., a_n$ sont les racines de L_j et $L_j(a_j) = 1$

(b) Montrer que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Soit $\lambda_1, \ldots., \lambda_n$ des réels tels que : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k = 0$. Alors,
$\forall j \in [\![1, n]\!], \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\widetilde{L_k}(a_j)}_{=0 \, si \, k\neq j} = 0$. Cette égalité devient alors $\lambda_j \underbrace{\widetilde{L_j}(a_j)}_{=1}$=0 i.e. $\lambda_j = 0$.

Ainsi, $(L_1, \ldots, L_n)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
De plus $card(L_1, \ldots, L_n) = n = dim\mathbb{R}_{n-1}[X]$. J'en déduis que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(b) Montrer que $H(X) = \sum_{j=1}^{n} f(a_j)L_j(X)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \tilde{H}(a_i) = f(a_i).$$

$H(X) = \sum_{j=1}^{n} f(a_j)L_j(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ car $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est stable par combinaison linéaire.
$\forall i \in [\![1, n]\!], \tilde{H}(a_i) = \sum_{j=1}^{n} f(a_j) \underbrace{\widetilde{L_j}(a_i)}_{=0 \, si \, j\neq i} = f(a_i) \underbrace{\widetilde{L_i}(a_i)}_{=1} = f(a_i)$.

Donc, H est un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant :$\forall i \in [\![1, n]\!], \tilde{H}(a_i) = f(a_i)$.
Montrons que c'est le seul . Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant :$\forall i \in [\![1, n]\!], \tilde{Q}(a_i) = f(a_i)$.
Alors, :$\forall i \in [\![1, n]\!], (\tilde{Q} - \tilde{H})(a_i) = f(a_i) - f(a_i) = 0$. Donc $a_1, \ldots., a_n$sont n racines de $Q - H$. De plus, $\deg(Q - H) \leq \max(\deg(Q), \deg(H)) \leq n - 1$. Donc, $Q - H$ a davantage de racines que son degré et est donc le polynôme nul. Ainsi, $Q = H$.

J'en conclus que $H(X) = \sum_{j=1}^{n} f(a_j)L_j(X)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \tilde{H}(a_i) = f(a_i).$$

15. Soit $\forall t \in [-1,1], \varphi(t) = f(t) - \tilde{H}(t) - \lambda\tilde{S}(t)$ où λ est un réel que l'on va choisir.
Soit $x \in [-1,1] \backslash \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

(a) Déterminer la valeur de λ telle que $\varphi(x) = 0$. Désormais λ prend cette valeur.

$$\varphi(x) = f(x) - \tilde{H}(x) - \lambda\tilde{S}(x) = 0 \quad \underbrace{\Longleftrightarrow}_{\substack{cat \, \forall i, x\neq a_i \\ donc \, \tilde{S}(x)\neq 0}} \quad \lambda = \frac{f(x) - \tilde{H}(x)}{\tilde{S}(x)}.$$

Désormais, $\lambda = \frac{f(x) - \tilde{H}(x)}{\tilde{S}(x)}$.

(b) Montrer que φ s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[-1,1]$.

$\forall i \in [\![1, n]\!], \varphi(a_j) = \underbrace{f(a_j) - \tilde{H}(a_j)}_{=0} - \lambda \underbrace{\tilde{S}(a_j)}_{=0} = 0$. Et $\varphi(x) = 0$. Donc, φ s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[-1,1]$ aux points $a_1, \ldots., a_n$ *et* x.

(c) En déduire que $\varphi^{(n)}$ s'annule au moins 1 fois sur $[-1,1]$.

Dans la suit pour simplifier la preuve supposons que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Alors, x est coincé entre -1 et a_1 ou bien il existe k tel que x soit coincé entre deux $a_k\ et\ a_{k+1}$ ou bien entre a_n et 1. Supposons par exemple que x se trouve entre $a_k\ et\ a_{k+1}$

$f, \widetilde{H}\ et\ \tilde{S}$ une fonction de classe C^n sur $[-1,1]$ donc φ l'est aussi. Appliquons alors le théorème de Rolle aux fonctions continues et dérivables $\varphi^{(k)}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.
$\varphi(a_1) = \ldots = \varphi(a_k) = \varphi(x) = \varphi(a_{k+1}) = \cdots = \varphi(a_n) = 0$. Alors le théorème de Rolle assure que φ' s'annule en un point a_{11} sur $]a_1, a_2[$
en un point a_{12} sur $]a_2, a_3[$
...
en un point a_{1k} sur $]a_k, x[$
en un point $a_{1k+1}\ sur\ ]x, a_{k+1}[$
en un point $a_{1k+2}\ sur\ ]a_{k+1}, a_{k+2}[$
...
en un point $a_{1n}\ sur\ ]a_{n-1}, a_n[$

$\boxed{\varphi' \text{ s'annule } n \text{ fois sur }]-1,1[.}$

$\varphi'(a_{11}) = \ldots = \varphi'(a_{1k}) = \varphi'(a_{1k+1}) = \cdots = \varphi'(a_{1n}) = 0$. Alors le théorème de Rolle assure que φ'' s'annule
en un point a_{21} sur $]a_{11}, a_{12}[$
en un point a_{22} sur $]a_{12}, a_{13}[$
...
en un point $a_{2n}\ sur\ ]a_{1n-1}, a_{1n}[$

$\boxed{\varphi'' \text{ s'annule } n-1 \text{ fois sur }]-1,1[.}$

On itère ce précédé. A la $(n-1)ième$ itération, on obtient que $\varphi^{(n-1)}$ s'annule 2 fois sur $]-1,1[$ en $a_{n-2,n-1}\ et\ a_{n-1,n-1}$. Alors le théorème de Rolle assure que $\varphi^{(n)}(= \varphi^{(n-1)''})$ s'annule entre $a_{n-2,n-1}\ et\ a_{n-1,n-1}$. Donc $\varphi^{(n)}$ s'annule au moins une fois que $]-1,1[$.

(d) Déterminer $\varphi^{(n)}$ en fonction de $f^{(n)}$, n et λ.

$\forall t \in [-1,1], \varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - \widetilde{H}^{(n)}(t) - \lambda \tilde{S}^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - \underbrace{\widetilde{H}^{(n)}(t)}_{=0} - \lambda \underbrace{\tilde{S}^{(n)}(t)}_{=n!} = f^{(n)}(t) - \lambda n!$

(e) En déduire qu'il existe un réel $a \in [-1,1]$ tel que : $f(x) - \widetilde{H}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\tilde{S}(x)$.

D'après (c), il existe un réel $a \in [-1,1]$ tel que $\varphi^{(n)}(a) = 0$. Donc, d'après (d), $f^{(n)}(a) - \lambda n! = 0$ i.e. $f^{(n)}(a) - \frac{f(x)-\widetilde{H}(x)}{\tilde{S}(x)}n! = 0$. J'en déduis que $f(x) - \widetilde{H}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\tilde{S}(x)$.

16. Déduire de la question précédente que : $\forall x \in [-1,1], |f(x) - H(x)| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!}|S(x)|$.

$|f(x) - \widetilde{H}(x)| = \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}|\tilde{S}(x)|$ et $|f^{(n)}(a)| \leq \|f^{(n)}\|_\infty$. Alors, $|f^{(n)}(a)|\frac{|\tilde{S}(x)|}{n!} \leq \|f^{(n)}\|_\infty \frac{|\tilde{S}(x)|}{n!}$ et ainsi, $|f(x) - \widetilde{H}(x)| \leq \|f^{(n)}\|_\infty \frac{|\tilde{S}(x)|}{n!}$

17. Pour quelles valeurs de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la quantité $\|S\|_\infty$ est -elle minimale ?

D'après la partie précédente, $\|S\|_\infty$ est minimale lorsque $S = V_n$ i.e. lorsque $\forall k \in [\![1, n]\!], a_k = cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$. Alors,
Désormais prenons $\forall k \in [\![1, n]\!], a_k = cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$ et S, les L_j et H associés. Alors, $\|S\|_\infty = 2^{1-n}$.

18. En déduire que $\|f - H\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!}2^{1-n}$.

$\forall x \in [-1,1] \backslash \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, |f(x) - \widetilde{H}(x)| \leq \|f^{(n)}\|_\infty \frac{|\tilde{S}(x)|}{n!}$ et $\forall x \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, |f(x) - \widetilde{H}(x)| = 0 = \|f^{(n)}\|_\infty \frac{|\tilde{S}(x)|}{n!}$. Donc, $\forall x \in [-1,1], |f(x) - \widetilde{H}(x)| \leq \|f^{(n)}\|_\infty \frac{|\tilde{S}(x)|}{n!}$. Par conséquent,
$\|f - H\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!}\|S\|_\infty$ i.e. $\|f - H\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!}2^{1-n}$.