QCM Polynômes

Exercice 1

On vérifie que :

A - La décomposition de $P(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X) = X^2 (X-3)^2$$

la factorisation par X² puis l'identité remarquable sont évidente

B - La décomposition de $Q(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$Q(X) = \left(X^2 - 3X - 3i\right)\left(X^2 - 3X + 3i\right)$$

Dans C[X], la décomposition est la forme scindée : produit de polynômes de degré 1

C - La décomposition de $Q(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$Q(X) = \left(X^2 - \left(2\sqrt{3}+3\right)X - 3\sqrt{3} + 6\right)\left(X^2 + \left(2\sqrt{3}-3\right)X + 3\sqrt{3} + 6\right)$$

Le calcul du coeff de X ne donne pas 0

D - La décomposition de $Q(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$Q(X) = \left(X^2 - \left(2\sqrt{3}+3\right)X + 3\sqrt{3} + 6\right)\left(X^2 + \left(2\sqrt{3}-3\right)X - 3\sqrt{3} + 6\right)$$

En développant ça fonctionne !

Exercice 2

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n ayant n racines réelles distinctes.

Question 1 :

Il suffit d'appliquer Rolle à P entre deux racines réelles consécutives.

On établit que :

A - Toutes les racines de P' sont réelles et distinctes,

B - Toutes les racines de P' sont réelles mais pas forcément distinctes,

C - Toutes les racines de P' sont distinctes, mais certaines peuvent être complexes conjuguées,

D - Les racines de P' ne sont ni forcément distinctes, ni forcément réelles.

Question 2 :

Le polynôme $P^2 + 1$:

A - n'admet que des racines réelles et distinctes

B - n'admet que des racines complexes non réelles et distinctes

C - n'admet que des racines distinctes, certaines étant réelles et d'autres complexes conjuguées,

Q=P²+1 n'a pas de racines réelles car pour tout réel x, P²(x)+1>0.
De plus, Q'=2PP' donc si Q'(z)=0 alors P(z)=0 ou P'(z)=0.donc z est réel.et par conséquent, n'est pas racine de Q.
Ainsi, Q n'a pas de racines multiples.

Exercice 3

Question 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ qui s'écrit : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$

A) Pour tout P ainsi défini, P n'admet jamais de racine dans $\mathbb{Q}$. Faux contre-exemple: $P(X)=X^2-1$

B) Pour tout P ainsi défini, P admet toujours au moins une racine dans $\mathbb{Q}$. faux contre-exemple: $P(X)=X^2+1$

C) Si le rationnel $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$ et $pgcd(p,q)=1$, est racine de P alors p divise a_0 et q divise a_n.

D) Si le rationnel $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$ et $pgcd(p,q)=1$, est racine de P alors p divise a_n et q divise a_0.

Question 2 :

d'après la question 1

A) Les racines rationnelles possibles de P sont parmi les réels $\frac{p_i}{q_j}$ où p_i est un entier relatif diviseur de a_0 *et* q_j est un entier relatif diviseur de a_n.

B) Les racines rationnelles possibles de P sont parmi les réels $\frac{p_i}{q_j}$ où p_i est un entier naturel diviseur de a_0 *et* q_j est un entier relatif diviseur de a_n.

C) Il n'existe pas de critère de localisations d'éventuelles racines de P .

D) L'étude des variations de la fonction polynomiale associée à P permet de déterminer le nombre de racines de P. L'étude de P ne permet de compter les racines complexes.

Question 3 :

Soit $Q(X) = 6X^3 - 2X^2 + 3X + 4$. La proposition suivante est vérifiée :

A) le nombre de rationnels pouvant éventuellement être racine de Q est : 8.

B) le nombre de rationnels non entiers pouvant éventuellement être racine de Q est : 5.

C) le nombre de rationnels pouvant éventuellement être racine de Q est : 14.

D) le nombre de rationnels non entiers pouvant éventuellement être racine de Q est : 10.

Il faut compter :
les valeurs de q sont les diviseurs de 6 : 1,-1,6,-6,2,-2,3,-3
les valeurs de p sont les diviseurs de 4 : 1,-1,2,-2,4,-4
les quotients non entiers de p/q sont : 1/6,-1/6, 1/2,-1/2,1/3,-1/3,2/3,-2/3,4/3,-4/3

Question 4

Soit $S(X) = X^3 - 3X + 1$. La proposition suivante est vérifiée :

A) S admet une racine rationnelle.

B) S n'admet pas de racine rationnelle.

car les seules possibles sont 1 et -1 et ces réels ne sont pas racines de S.

C) S admet deux racines rationnelles.

D) S admet trois racines rationnelles.

Question 5

En étudiant la fonction polynômiale associée à $S(X) = X^3 - 3X + 1$, on démontre que :

A) S admet seulement une racine réelle.

Les variations et valeurs de P assurent que P a trois racines réelles.

B) S admet trois racines réelles distinctes.

C) S admet seulement deux racines réelles distinctes.

Un polynôme à coeff réels et de degré impair admet toujours une racine réelle.

D) S n'admet pas de racines réelles.

Exercice 4

Soit $P = X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 7X^2 + 6X - 2$

A - 1 est racine de P avec une multiplicité de 3

B - P admet plusieurs racines réelles distinctes

C - Le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$ est $R = 12X - 12$

D - Le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$ est $R = 2X^2 - 3X + 1$

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $E_n = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall k \in [\![0\,;n]\!]\ P^k(1) = 1\}$

A - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, P \in E_n \Leftrightarrow E_{n-1}$

B - $P \in E_n$ si et seulement si le reste R de la division euclidienne de P par $(X-1)^{n+1}$ appartient à E_n

C - $P_0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(X-1)^k}{k!}$ est l'unique élément de E_n

D - $F_n = \{P - P_0 \mid P \in E_n\}$ est un espace vectoriel

Exercice 6

Question 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $w_n = e^{i\frac{\pi}{n}}$

A - $\{w_n^k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$ est l'ensemble des racines du polynôme $X^{2n} - 1$

B - $w_n \in \mathbb{U}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

C - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ pair, $P = \prod_{k=1}^{n} \left(X - w_n^k\right)$ appartient à $\mathbb{R}[X]$

D - Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que w_n^k soit racine de $X^n + 1$

Question 2

Pour tout $n \geqslant 1$:

A - $\sum_{k=1}^{n} w_n^k = 0$

B - $\sum_{k=1}^{n} w_n^k = \dfrac{1 - w_n^n}{1 - w_n}$

C - $\left(1 - w_n^k\right)\left(1 - \overline{w}_n^k\right) = 2 - 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$

D - $\prod_{k=1}^{n} w_n^k = (-1)^n$

Question 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

A - $\dfrac{2w_n}{1 - w_n} = \dfrac{2\overline{w}_n}{1 - \overline{w}_n}$ si et seulement si $n = 1$

B - $\dfrac{2w_n}{1 - w_n} + \dfrac{2\overline{w}_n}{1 - \overline{w}_n} = 2$

C - $\dfrac{2w_n}{1 - w_n} \times \dfrac{2\overline{w}_n}{1 - \overline{w}_n} = 4$

D - $\dfrac{2w_n}{1 - w_n} = \dfrac{ie^{i\frac{\pi}{2n}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$

Exercice 7

Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

A - $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3}$

B - $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3$

C - $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi}{3} - 3$

D - $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \pi^2 - 3$