DS 5

4 heures et calculatrice interdite. En cas de doute sur le sujet, n'hésitez pas à m'en faire part.
Encadrer vos résultats en couleurs (pas de fluo). Soigner l'écriture et la présentation.

EXERCICE 1 Théorèmes classiques et applications. Les parties A, B et C sont indépendantes.

A. Théorème de Rolle

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $g: [a, b] \to \mathbb{R}$, de classe C^2 sur $[a, b]$ telle que $g(a) = g(b) = 0$ et $g'(a) = 0$. On pose $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x-a} \ si\ x \in]a, b] \\ 0 \ si\ x = a \end{cases}$.

1. Etude de φ.

1.1 Enoncer le critère de classe C^1 .

1.2 Montrer que φ est de classe C^1 sur $[a, b]$ et déterminer $\varphi'(x)$ pour $x \in [a, b]$. (indication : utiliser le $DL_2(0)$ de g)

2. Propriété de g.

2.1.Enoncer le théorème de Rolle.

2.2. Montrer, en utilisant φ, qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que : $g'(c) = \frac{g(c)}{c-a}$.

2.3. Interpréter géométriquement ce résultat.

1.1 Cours.

1.2 Soit $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x-a} \ si\ x \in]a, b] \\ 0 \ si\ x = a \end{cases}$.

g et $(x \mapsto x - a)$ sont continues sur $]a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ et $(x \mapsto x - a)$ ne s'annule pas sur $]a, b]$ don $\left(x \mapsto \frac{g(x)}{x-a}\right)$ est continue sur $]a, b]$ et dérivable sur $]a, b]$. De plus, g est dérivable en a et $g'(a) = 0$. Donc $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{x-a} = g'(a) = 0$. J'en déduis que φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b]$ et $\forall x \in]a, b], \varphi'(x) = \frac{(x-a)g'(x)-g(x)}{(x-a)^2}$.

Comme g est de classe C^2 sur $[a, b]$, Taylor Young assure que g admet le $DL_2(0)$ suivant : $g(x) = g(a) + g'(a)(x - a) + \frac{g''(a)}{2}(x - a)^2 + o_a((x - a)^2) = \frac{g''(a)}{2}(x - a)^2 + o_a((x - a)^2)$ et g' admet le $DL_1(0)$ suivant : $g'(x) = g'(a) + g''(a)(x - a) + o_a(x - a) = g''(a)(x - a) + o_a(x - a)$.Alors $\forall x \in]a, b], \varphi'(x) = \frac{g''(a)(x-a)^2+o_a((x-a)^2)-\frac{g''(a)}{2}(x-a)^2+o_a((x-a)^2)}{(x-a)^2} = \frac{g''(a)}{2} + o_a(1)$. Donc $\lim_{x\to a} \varphi'(x) = \frac{g''(a)}{2}$. Alors le critère de classe C^1assure que φ est de classe C^1 sur $[a, b]$ et $\varphi'(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)g'(x)-g(x)}{(x-a)^2}. \ si\ x \in]a, b] \\ \frac{g''(a)}{2} \ si\ x = a \end{cases}$.

2.1 cours

2.2 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ et φ est de classe C^1 sur $[a, b]$ donc φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors le théorème de Rolle assure qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\varphi'(c) = 0$ i.e. $\frac{(c-a)g'(c)-g(c)}{(c-a)^2} = 0$. Alors, $g'(c) = \frac{g(c)}{c-a}$.

2.3 La tangente à Cg en $C(c, g(c))$ a pour pente $g'(c)$ et passe par le point C. La droite (AC) a pour pente $\frac{g(c)-g(a)}{c-a}$ et passe par le point C. Ces deux droites ont la même pente et ont un point commun, elles sont donc égales.

B. Accroissements finis.

3.1 Enoncer le théorème d'égalité des accroissements finis.

3.2 Soit $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^+$ telle que f' est strictement décroissante et positive sur $\mathbb{R}^+$.

3.2.1 Montrer que $\forall x \in [1,+\infty[, f(x+1)-f(x) < f'(x) < f(x)-f(x-1)$.

3.2.2 Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = \sum_{k=1}^{n} f'(k)$.

Montrer que : $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente *si et seulement si* f a une limite finie en $+\infty$.

3.2.3. **Application** : étudier la convergence des suites u et v définies par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2}$ *et* $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k}}$.

3.1 . cours

3.2.1. Soit $x \in [1,+\infty[$. f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. Donc l'égalité des accroissements finis assure qu'il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que : $f'(c_x) = \frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f(x+1)-f(x)$.

De même, f est continue sur $[x-1, x]$ et dérivable sur $]x-1, x[$. Donc l'égalité des accroissements finis assure qu'il existe $d_x \in]x-1, x[$ tel que : $f'(d_x) = \frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)} = f(x)-f(x-1)$.

Comme f' est décroissante et $0 \le x-1 < d_x < x < c_x < x+1$, on a : $f'(d_x) \le f'(x) \le f'(c_x)$ et ainsi,

$f(x+1)-f(x) < f'(x) < f(x)-f(x-1)$.

3.2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in [\![1,n]\!], f(k+1)-f(k) \le f'(k) \le f(k)-f(k-1)$ donc

$\sum_{k=1}^{n} f(k+1)-f(k) \le \sum_{k=1}^{n} f'(k) \le \sum_{k=1}^{n} f(k)-f(k-1)$ et par télescopage, $f(n+1)-f(1) \le s_n \le f(n)-f(0)(**)$.

$\Rightarrow$Supposons (s_n) convergente.

Comme f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, f admet une limite finie ou infinie en $+\infty$.

De plus, (s_n) est majorée par un réel M . Et par suite $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n+1) \le f(1)+M$ $i.e.$ $\forall n \ge 2, f(n) \le f(1)+M$. Posons $M' = f(1)+M$. Alors la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par M'. Comme f est croissante, $\forall x \in \mathbb{R}^+, x \le \lfloor x \rfloor + 1$ $donc$ $f(x) \le f\left(\underbrace{\lfloor x \rfloor + 1}_{\in\mathbb{N}}\right) \le M'$. Donc f est majorée. Ainsi, la limite de f en $+\infty$ est finie.

$\Leftarrow$Supposons L finie. Alors f est bornée au voisinage de $+\infty$ et comme f est croissante, f est majorée sur $\mathbb{R}^+$ par un réel M. Par conséquent, la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par M.Alors d'après$(**)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n \le M - f(0)$. Donc la suite (s_n) est majorée. De plus, (s_n) est croissante car $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_{n+1} - s_n = f'(n+1) \ge 0$. J'en déduis que (s_n) est convergente.

3.2.3$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2} = \sum_{k=1}^{n} Arctan'(k)$ *et* $v_n = \sum_{k=1}^{n=} \frac{1}{\sqrt{1+k}} = \sum_{k=1}^{n} f'(k)$ *où* $f(x) = \sqrt{1+x}$.

$Arctan$ et f sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^+$ (car $\forall x \in \mathbb{R}^+, 1+x > 0$ donc il n' y a pas de problème avec la racine carrée).

et $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \ge 0$ et $Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \ge 0$ et $f''(x) = -\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} \le 0$ et $Arctan''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \le 0$. Donc f' et $Arctan'$ sont décroissantes et positives. Alors le résultat 4.b. s'applique : comme $Arctan$ a une limtie finie en $+\infty$, u est convergente et comme f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, v est divergente.

C. Une nouvelle formule de Taylor.

Soit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^{n+1} et a et b des réels fixés tels $a < b$.

On définit $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = g(b) - \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} g^{(k)}(x)\right] + V\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où V est une constante réelle (que vous choisirez à la question 6.)

4.1 Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!}\left[g^{(n+1)}(x) + V\right]$.

4.2 En choisissant « judicieusement » la constante V, montrer l'existence d'un réel $c \in [a,b]$ tel que :

$$g(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} g^{(k)}(a) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+1)}(c).$$

5.1 Justifier que $M = max_{[a,b]} g^{(n+1)}$ et $m = min_{[a,b]} g^{(n+1)}$ existent.

5.2 Montrer que : $m\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \le \int_a^b \frac{(b-u)^n}{n!} g^{(n+1)}(u)du \le M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

5.3 En déduire qu'il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b \frac{(b-u)^n}{n\,!} g^{(n+1)}(u)du = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} g^{(n+1)}(c)$.

5.4 Montrer par récurrence sur n que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} ,

$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)du$. (Formule de Taylor reste-intégral).

5.5 Retrouver le résultat obtenu à la question 6.

5. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^{n+1}donc $\forall k \in [\![0,n]\!], g^{(k)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; de plus, $\left(x \mapsto \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)\,!}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = -\left[\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(b-x)^k}{k!}g^{(k)}(x)\right]^{'abus}\right] + V\left[\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{'abus} = -g'(x) - \left[\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(b-x)^k}{k!}g^{(k)}(x)\right]^{'abus}\right] + V\left[\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{'abus}$$

$$= -g'(x) - \sum_{k=0}^{n}\left[-k\frac{(b-x)^{k-1}}{k!}g^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!}g^{(k+1)}(x)\right] - V(n+1)\frac{(b-x)^n}{(n+1)!}$$

$$= -g'(x) - \sum_{k=0}^{n}\left[\underbrace{-\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}g^{(k)}(x)}_{\alpha_k} + \underbrace{\frac{(b-x)^k}{k!}g^{(k+1)}(x)}_{\alpha_{k+1}}\right] - V\frac{(b-x)^n}{n!}$$

$$= \underbrace{-g'(x) + \alpha_0}_{=0} - \alpha_{n+1} - V\frac{(b-x)^n}{n!} = -\frac{(b-x)^n}{n!}\left[g^{(n+1)}(x) + V\right].$$

6. $\varphi(b) = g(b) - \left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-b)^k}{k!}g^{(k)}(b)\right] + V\frac{(b-b)^{n+1}}{(n+1)!} = g(b) - g(b) = 0$. Choisissons $V \in \mathbb{R}$ de sorte que $\varphi(a) = 0$.

$$\varphi(a) = g(b) - \left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}g^{(k)}(a)\right] + V\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \Leftrightarrow V = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left[\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}g^{(k)}(a)\right] - g(b)\right].$$

Désormais $V = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left[\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}g^{(k)}(a)\right] - g(b)\right]$.

Alors φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle (continuité sur $[a,b]$, dérivabilité sur $]a,b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b)$). Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que : $\varphi'(c) = 0$ $i.e.$ $-\frac{(b-c)^n}{n!}\left[g^{(n+1)}(c) + V\right] = 0$. Donc, $V = -g^{(n+1)}(c)$. Autrement dit, $\frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left[\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}g^{(k)}(a)\right] - g(b)\right] = -g^{(n+1)}(c)$. Ainsi, : $g(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}g^{(k)}(a) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+1)}(c)$.

5.5 $g^{(n+1)}$est continue sur le segment $[a,b]$ donc $g^{(n+1)}$est bornée et atteint ses bornes sur ce segment .
Ainsi, $M = max_{[a,b]}g^{(n+1)}$ et $m = min_{[a,b]}g^{(n+1)}$ existent et $[m,M] = g([a,b])$.

5.6 $\forall u \in [a,b], m \leq g^{(n+1)}(u) \leq M$ donc $m\frac{(b-u)^n}{n!} \leq g^{(n+1)}(u)\frac{(b-u)^n}{n!} \leq M\frac{(b-u)^n}{n!}$ car $\frac{(b-u)^n}{n!} \geq 0$. Alors par croissance de l'opérateur intégral appliqué aux fonctions continues $\left(u \mapsto m\frac{(b-u)^n}{n!}\right), \left(u \mapsto g^{(n+1)}(u)\frac{(b-u)^n}{n!}\right)$ et $\left(u \mapsto M\frac{(b-u)^n}{n!}\right)$, on a :

$$\int_a^b m\frac{(b-u)^n}{n!}du \leq \int_a^b g^{(n+1)}(u)\frac{(b-u)^n}{n!}du \leq \int_a^b M\frac{(b-u)^n}{n!}du.$$

Or, $\int_a^b M\frac{(b-u)^n}{n!}du = M\int_a^b\frac{(b-u)^n}{n!}du = M\left[-\frac{1}{n+1}\frac{(b-u)^{n+1}}{n!}\right]_a^b = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$. J'en conclus que :

$$m\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_a^b g^{(n+1)}(u)\frac{(b-u)^n}{n!}du \leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

5.7 Alors $m \leq \frac{\int_a^b g^{(n+1)}(u)\frac{(b-u)^n}{n!}du}{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}} \leq M$ $i.e.$ $\frac{\int_a^b g^{(n+1)}(u)\frac{(b-u)^n}{n!}du}{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}} \in [m,M]$. Or, $[m,M] = g([a,b])$.

Donc il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b \frac{(b-u)^n}{n!} g^{(n+1)}(u)du = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+1)}(c)$.

5.8 Démo de cours.

5.9 On a donc, $g(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-u)^n}{n!}g^{(n+1)}(u)du$ et $\int_a^b\frac{(b-u)^n}{n!}g^{(n+1)}(u)du=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+1)}(c)$. Ainsi,

$g(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+1)}(c)$.

EXERCICE 2 Intégrales à paramètres

Soient Φ et Ψ les fonctions définies par : $\Phi(x)=\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}dt$ et $\Psi(x)=\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}dt$

1. Justifier que $D_\Phi=D_\Psi=\mathbb{R}$.
2. **Etude de la fonction Φ**

   2.1 Calculer $\Phi(0)$.

   2.2 Montrer que :$\forall x>0,\frac{\pi}{4}e^{-2x}\leq\Phi(x)\leq\frac{\pi}{4}e^{-x}$. En déduire la limite de Φ en $+\infty$.

   2.3 Faire de même en $-\infty$.

   2.4 Etudier les variations de Φ.
3. **Nous démontrerons dans la question 4. que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que: $\forall x\in\mathbb{R},\Phi'(x)=-\Psi(x)$. Nous admettons et utilisons ce résultat cette question 3.**

On pose $G(x)=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ et $F(x)=2\Phi\left(\frac{x^2}{2}\right)+(G(x))^2$.

   3.1 Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   3.2 Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},F'(x)=0$.

   3.3 En déduire que : $\lim_{x\to+\infty}G(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4. **Etude de la dérivabilité de Φ**

   4.1 En appliquant Taylor-Lagrange, montrer que : $\forall h\in[-1;1],\forall x>0,|e^{-hx}-1+hx|\leq\frac{h^2x^2}{2}e^x$.

   4.2 Soit $a\in\mathbb{R}$. Démontrer que : $\exists A_{(a)}\in\mathbb{R}^+/\ \forall h\in[-1;1],\left|\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{h}+\Psi(a)\right|\leq A|h|$.

   4.3 En déduire que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que: $\forall a\in\mathbb{R},\Phi'(a)=-\Psi(a)$.

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. $\left(t\mapsto\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\right)$ et $\left(t\mapsto e^{-(1+t^2)x}\right)$ sont continues sur le segment $[0,1]$ donc les réels $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ existent. Ainsi, $D_\Phi=D_\Psi=\mathbb{R}$.

2.a. $\Phi(0)=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=Arctan(1)-Arctan(0)=\frac{\pi}{4}$.

2.b. Soit $x>0$. $\forall t\in[0,1],-2\leq-(1+t^2)\leq-1$ $donc\ -2x\leq-(1+t^2)x\leq-x\ (puisque\ x>0)$ et par croissance de la fonction exponentielle, $e^{-2x}\leq e^{-(1+t^2)x}\leq e^{-x}$. Alors, $\frac{e^{-2x}}{1+t^2}\leq\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\leq\frac{e^{-x}}{(1+t^2)}$. Donc par croissance de l'intégrale, $\int_0^1\frac{e^{-2x}}{1+t^2}dt\leq\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}dt\leq\int_0^1\frac{e^{-x}}{(1+t^2)}dt$. Alors par linéarité de l'opérateur intégral,

$e^{-2x}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt\leq\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}dt\leq e^{-x}$ i.e. $\frac{\pi}{4}e^{-2x}\leq\Phi(x)\leq\frac{\pi}{4}e^{-x}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{4}e^{-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{4}e^{-x}=0$, $\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=0$. Ainsi, la courbe de Φ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $+\infty$.

2.c. Soit $x<0$. $\forall t\in[0,1],-2\leq-(1+t^2)\leq-1$ $donc\ -2x\geq-(1+t^2)x\geq-x\ (puisque\ x<0)$ et par croissance de la fonction exponentielle, $e^{-2x}\geq e^{-(1+t^2)x}\geq e^{-x}$. Alors, $\frac{e^{-2x}}{1+t^2}\geq\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\geq\frac{e^{-x}}{(1+t^2)}$ (puisque $1+t^2>0$). Alors, par croissance de l'intégrale, $\int_0^1\frac{e^{-2x}}{1+t^2}dt\geq\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}dt\geq\int_0^1\frac{e^{-x}}{(1+t^2)}dt$. Alors par linéarité de l'opérateur intégral, $e^{-2x}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt\geq\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}dt\geq e^{-x}$ i.e. $\frac{\pi}{4}e^{-2x}\geq\Phi(x)\geq\frac{\pi}{4}e^{-x}$.

Comme $\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi}{4}e^{-x}=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)=+\infty$. De plus, $\forall\ x<0$, $\frac{\pi}{4}\frac{e^{-2x}}{x}\leq\frac{\Phi(x)}{x}\leq\frac{\pi}{4}\frac{e^{-x}}{x}$. Comme $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x}\overset{CC}{=}-\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{\Phi(x)}{x}=-\infty$.
Ainsi, la courbe de Φ admet une branche parabolique de direction asymptotique (Oy) en $-\infty$.

2.d. Soit x et y deux réels tels que $x<y$. Alors $\forall t\in[0,1],-(1+t^2)y\leq-(1+t^2)x$ donc $\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\geq\frac{e^{-(1+t^2)y}}{1+t^2}$ et par conséquent, $\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)y}}{1+t^2}dt\leq\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}dt$ $i.e.\Phi(y)\leq\Phi(x)$. Ainsi, Φ est décroissante.

4. $F(x)=2\Phi\left(\frac{x^2}{2}\right)+\left(\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2$. Posons $g(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$. g étant continue sur $\mathbb{R}$, $G:\left(x\mapsto\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)$ est la primitive de g sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0. Comme Φ, G et $u:\left(x\mapsto\frac{x^2}{2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $F=2\Phi\circ u+G^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque son expression n'est constituée que de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

a) De plus, $\forall x\in\mathbb{R}, F'(x)=2u'(x)\Phi'(u(x))+2G'(x)G(x)=2x\left(-\Psi\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)+2g(x)G(x)$

$$\forall x\in\mathbb{R}, F'(x)=-2x\int_0^1 e^{-\frac{(1+t^2)x^2}{2}}dt+2e^{-\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\int_0^1 2e^{-\frac{(1+t^2)x^2}{2}}xdt+\int_0^x 2e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$\forall x\in\mathbb{R}, F'(x)=-\int_0^1 2e^{-\frac{x^2+(tx)^2}{2}}xdt+\int_0^x 2e^{-\frac{x^2+t^2}{2}}dt \underbrace{=}_{\substack{CV\ 1\text{ère intégrale } u=tx\\ du=xdt}} -\int_0^x 2e^{-\frac{x^2+u^2}{2}}du+\int_0^x 2e^{-\frac{x^2+t^2}{2}}dt=0.$$

Ainsi, F est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Alors $\forall x\in\mathbb{R}, F(x)=F(0)=2\Phi(0)+\left(\int_0^0 e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2=\frac{\pi}{2}$.

b) Alors $\forall x\in\mathbb{R},\ 2\Phi\left(\frac{x^2}{2}\right)+\left(\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2=\frac{\pi}{2}$. Donc, $\left(\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2=\frac{\pi}{2}-2\Phi\left(\frac{x^2}{2}\right)$. Alors $\forall x>0,\ \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}-2\Phi\left(\frac{x^2}{2}\right)}$ puisque $\forall x>0,\ \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt>0$ par positivité de l'opérateur intégral. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(\frac{x^2}{2})=0$ (par composition) . J'en déduis que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3.a. Soit $h\in[-1\,;1]$ *et* $x>0$. L'exponentielle est de classe C^2 sur $[-x,x]$ et $\forall t\in[-x,x], |exp''(t)|=e^t\leq e^x$. Donc l'inégalité de Taylor Lagrange, $\forall t\in[-x,x], |e^t-(1+t)|\leq e^x\frac{|t|^2}{2}=e^x\frac{t^2}{2}$. En particulier, $t=hx\in[-x,x]$. Donc, $|e^{-hx}-1+hx|\leq\frac{h^2x^2}{2}e^x$.

3.b. soit $a>0$. Soit $h\in[-1;1]$,

$$\left|\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{h}+\Psi(a)\right|=\left|\frac{1}{h}\left(\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)(a+h)}}{1+t^2}dt-\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)a}}{1+t^2}dt\right)+\int_0^1 e^{-(1+t^2)a}\,dt\right|$$

$$\left|\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{h}+\Psi(a)\right|=\left|\left(\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)(a+h)}-e^{-(1+t^2)a}+(1+t^2)he^{-(1+t^2)a}}{(1+t^2)h}dt\right)\right|=\left|\left(\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)h}-1+(1+t^2)h}{(1+t^2)h}e^{-(1+t^2)a}\,dt\right)\right|$$

Alors l'inégalité triangulaire sur les intégrales **assure que :** $\left|\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{h}+\Psi(a)\right|\leq\int_0^1\left|\frac{e^{-(1+t^2)h}-1+(1+t^2)h}{(1+t^2)h}e^{-(1+t^2)a}\right|dt.$

$\left|\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{h}+\Psi(a)\right|\leq\int_0^1\left|e^{-(1+t^2)h}-1+(1+t^2)h\right|\frac{e^{-(1+t^2)a}}{(1+t^2)|h|}dt$. Or, d'après 3.a. en prenant $x=1+t^2>0$, on a : $\left|e^{-(1+t^2)h}-1+(1+t^2)h\right|\leq\frac{h^2(1+t^2)^2}{2}e^{1+t^2}$. Donc $\left|e^{-(1+t^2)h}-1+(1+t^2)h\right|\frac{e^{-(1+t^2)a}}{(1+t^2)|h|}\leq\frac{h^2(1+t^2)^2}{2}\left(e^{1+t^2}\right)\frac{e^{-(1+t^2)a}}{(1+t^2)|h|}$. Alors par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1\left|\frac{e^{-(1+t^2)h}-1+(1+t^2)h}{(1+t^2)h}e^{-(1+t^2)a}\right|dt\leq\int_0^1\frac{h^2(1+t^2)^2}{2}\left(e^{1+t^2}\right)\frac{e^{-(1+t^2)a}}{(1+t^2)|h|}dt=|h|\underbrace{\int_0^1\frac{1+t^2}{2}e^{(1+t^2)(1-a)}dt}_{A(a)\text{indépendant de } h}=A|h|.$$

Il en résulte que : $\left|\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{h}+\Psi(a)\right|\leq A|h|$ où A dépend de a mais est indépendant de h.

3.c. Comme $\lim\limits_{h\to0}A|h|=0$, $\lim\limits_{h\to0}\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{h}+\Psi(a)=0$, et par conséquent, $\lim\limits_{h\to0}\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{h}=-\Psi(a)$. Cela signifie que Φ est dérivable en a et $\Phi'(a)=-\Psi(a)$. J'en déduis que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\Phi'=-\Psi$.

FIN