Déterminants d'une matrice carrée

1 Si A une matrice carrée d'ordre n, on note C_i la colonne i de A. La matrice A est notée $A = (C_1 | C_2 | C_3 | \dots | C_n)$

I Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 1, 2 et 3 et plus.

1. Définition et premières propriétés

2 Calcul d'un déterminant d'ordre 1, 2, 3 ou 4.

1. **Déterminant d'ordre 1:** Le déterminant de la matrice $M = (a)$ carrée d'ordre 1 est le scalaire $\det(M) = a$.
2. **Déterminant d'ordre 2 :** Le déterminant de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le scalaire noté $\det(M)$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ tel que :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \underbrace{=}_{def} ad - cb$$

3. **Déterminant d'ordre 3:** Le déterminant de $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ est le scalaire $\det(M)$ ou $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$ tq :

$$\begin{vmatrix} a^{+} & b^{-} & c^{+} \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \underbrace{=}_{def} +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a(ek - fh) - b(dk - fg) + c(dh - eg)$$

développement par rapport à la première ligne

Ou encore : $\begin{vmatrix} a^{+} & b & c \\ d^{-} & e & f \\ g^{+} & h & k \end{vmatrix} = +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = a(ek - fh) - d(bk - ch) + g(bf - ce)$

développement par rapport à la première colonne

Ou encore : $\begin{vmatrix} a & b^{-} & c \\ d & e^{+} & f \\ g & h^{-} & k \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$ *développement par rapport à la deuxième colonne*

Ou encore : $\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g^{+} & h^{-} & k^{+} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{les signes attribués} \\ \text{aux coefficients} \\ \text{sont toujours} \\ \textbf{positifs sur la diagonale} \\ \textbf{et alternés.}}} = g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$ *développement par rapport à la dernière ligne* ***etc***

4. **Déterminant d'ordre 4 :** Le déterminant de $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, noté $\det(M)$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$, est défini par :

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}^{-} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}^{+} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}^{-} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}^{+} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{les signes attribués} \\ \text{aux coefficients} \\ \text{sont toujours} \\ \textbf{positifs sur la diagonale} \\ \textbf{et alternés.}}} = -a_{14} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{déterminant} \\ \text{d'ordre 3}}} + a_{24} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} - a_{34} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + a_{44} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

développement par rapport à la dernière colonne

3 Exemples Calculons $\Delta_1 = \begin{vmatrix} i+j & 2j-1 \\ 1-2i & 1+j^2 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -3 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} i+j & 2j-1 \\ 1-2i & 1+j^2 \end{vmatrix} = (i+j)\left(\underbrace{1+j^2}_{=-j}\right) - (1-2i)(2j-1) = \underbrace{-j-j^2}_{=1} \underbrace{-2j}_{1-i\sqrt{3}} + 1 + \underbrace{4ij}_{-2\sqrt{3}-2i} - 2i = (3 - 2\sqrt{3}) - i(4 + \sqrt{3}).$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1^{-} & 0^{+} & 5^{-} \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-6-4) - 5(8+3) = -65.$$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0^+ & 3 \\ 2 & 0 & 3^- & 1 \\ 3 & 2 & 5^+ & -3 \\ 4 & -2 & 0^- & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1^+ & -1 & 3 \\ 3^- & 2 & -3 \\ 4^+ & -2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -1^- & 3 \\ 2 & 0^+ & 1 \\ 4 & -2^- & 1 \end{vmatrix} = -3\left[1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\right] + 5\left[-(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right] = -3[-4 - 3\times 5 + 4\times(-3)] + 5[-2 + 2\times(-5)] = 33.$

4 Calcul d'un déterminant d'ordre $n \geq 2$:

Soit $A \in \boldsymbol{M_n}(\mathbb{R})$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,on note A_{ij} la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en enlevant la ligne i et la colonne j à A. Alors,

$$det(A) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})}_{\substack{developpement \\ par\ rapport\ à\ la\ colonne\ j}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})}_{\substack{développement \\ par\ rapport\ à\ la\ ligne\ i}}$$

On **admet** que quelle que soit la colonne ou la ligne choisie, le résultat est toujours le même.

5 Proposition : Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est égal au produit des éléments sur la diagonale

$\begin{vmatrix} a & 0 \\ * & d \end{vmatrix} = ad$, $\begin{vmatrix} a & * & * \\ 0 & e & * \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = aek$ et $\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & * \\ (0) & & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$

En particulier, $\det(O_n) = 0$ *et* $\det(I_n) = 1$.

Démo : $\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & * \\ (0) & & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & * \\ (0) & 0 \ 0 & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\det d'ordre\ n-1} = a_{11}a_{22} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & * \\ (0) & 0 \ 0 & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\det d'ordre\ n-2} = \cdots = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}.$

2. Forme n-linéaire alternée

6 Propriétés : $\boldsymbol{det}$ **est linéaire par rapport à chaque colonne (1) et alternée(2) ;** cela signifie que :

1) Si α *et* β sont des scalaires et $\forall k, C'_k$ est une colonne à n lignes alors

$\det(\alpha C_1 + \beta C'_1 | C_2 | \ldots | C_n) = \alpha \det(C_1 | C_2 | \ C_3 | \ldots | C_n) + \beta \det(C'_1 | C_2 | \ C_3 | \ldots | C_n)$

$\det(C_1 | \alpha C_2 + \beta C'_2 | \ C_3 | \ldots | C_n) = \alpha \det(C_1 | C_2 | \ C_3 | \ldots | C_n) + \beta \det(C_1 | C'_2 | C_3 | \ldots | C_n)$

$\det(C_1 | C_2 | \alpha C_3 + \beta C'_3 | \ldots | C_n) = \alpha \det(C_1 | C_2 | \ C_3 | \ldots | C_n) + \beta \det(C_1 | C_2 | C'_3 | \ldots | C_n).$ (…)

2) Si on échange deux colonnes de la matrice alors le déterminant change de signe.

$\det(C_3 | C_2 | \ C_1 | \ldots | C_n) = -\det(C_1 | C_2 | \ C_3 | \ldots | C_n)$.

$\det(C_1 | C_n | \ C_1 | \ldots | C_2) = -\det(C_1 | C_2 | \ C_3 | \ldots | C_n)$. (…)

Démo :

1) Soit $B = (C_1 | \ C_2 | .. \alpha C_k + \beta C'_k | \ \ldots | C_n)$ *et* $A = (C_1 | C_2 | \ldots | C_k | \ldots | C_n)$ et $A' = (C'_1 | C_2 | \ \ldots | C'_k | \ldots | C_n)$. Alors ,

$det(B) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k} (\alpha\, a_{ik} + \beta a'_{ik}) \det(A_{ik})}_{\substack{developpement \\ par\ rapport\ à\ la\ colonne\ k}} = \alpha \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) + \beta \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k} a'_{ik} \det(A'_{ik})$. Donc, $\det(B) = \alpha det(A) + \beta \det(A')$.

2) $H(n)$: « si j'échange deux colonnes dans une matrice carrée d'ordre n alors le déterminant change de signe. »

<u>Init</u> : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$ *et* $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - cb) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Donc $H(2)$ est vraie.

<u>Propag</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq 2$. Je suppose $H(n)$ vraie. Sous cette hypothèse, montrons que $H(n+1)$ vraie. Soit A une matrice carrée d'ordre $n+1$,notons $A = (C_1 | C_2 | C_3 | \ldots | C_n | C_{n+1})$ et B la matrice obtenue en échangeant les colonnes i *et* j *de* A où i *et* j deux entiers distincts compris entre 1 *et* $n+1$. Calculons $det(B)$ en développant par rapport à une colonne k distinctes des colonnes i et j (B ayant $n+1$ colonnes et $n+1 \geq 3$ donc cette colonne k existe bien) :

$det(B) = \underbrace{\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+k} b_{lk} \det(B_{lk})}_{\substack{developpement \\ par\ rapport\ à\ la\ colonne\ k \notin \{i,j\}}} \underset{\substack{car\ A\ et\ B\ ont \\ la\ même\ colonne\ k}}{=} \sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+k} a_{lk} \det(B_{lk})$. De plus, pour tout $l \in [\![1,n]\!]$, B_{lk}est carrée d'ordre n et est obtenue en échangeant les colonne i et j dans A_{lk}. Donc par hypothèse de récurrence, $\det(B_{lk}) = -\det(A_{lk})$.

Ainsi, $\det(B) = \sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+k} a_{lk}(-\det(A_{lk})) = -\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+k} a_{lk} \det(A_{lk}) = -\det(A)$. OK

CCL : $\forall n \geq 2$, $H(n)$ vraie.

7 On **admet <u>l'unicité</u> <u>du théorème</u>** suivant :

det est l'une unique application de $M_n(K)$ dans K vérifiant les propriétés suivantes :

- det est linéaire par rapport à chaque colonne i.e. $\forall(\alpha,\beta) \in K^2$et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, ,

$$\det\left(C_1 | C_2 | \ \ldots | C_{k-1} \underbrace{|\alpha X + \beta Y|}_{\substack{la\ colonne\ k \\ est\ c.l\ de \\ X\ et\ Y}} C_{k+1} | \ldots | C_n \right) = \alpha\det(C_1 | C_2 | \ \ldots | C_{k-1} | X | C_{k+1} | \ldots | C_n) + \beta \det(C_1 | C_2 | \ \ldots | C_{k-1} | Y | C_{k+1} | \ldots | C_n).$$

- det est alternée i.e. $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i \neq j \Longrightarrow \det(C_1 | C_2 | \ \ldots | C_i | \ldots \ldots | C_j | \ldots | C_n) = -\det(C_1 | C_2 | \ \ldots | C_j | \ldots \ldots | C_i | \ldots | C_n))$.
- $\det(I_n) = 1$.

On dit que det est une forme n-linéaire, alternée.

3. Autres Propriétés du déterminant

8 Propriétés Soit A une matrice carrée d'ordre n.On note C_i la colonne i de A. La matrice A est notée $A = (C_1 | C_2 | C_3 | \dots | C_n)$

1. Si l'une des colonnes de la matrice est nulle alors le déterminant de cette matrice est nul.
2. Une matrice carrée ayant deux colonnes identiques a un déterminant nul
3. **Si l'une des colonnes est combinaison linéaire des <u>autres</u> colonnes alors le déterminant est nul.** En particulier, si deux colonnes sont proportionnelles alors le déterminant est nul.
Par exemple, pour $n = 3$, $\det(C_1 | \ \alpha C_1 + \beta C_3 | \ C_3) = 0$
4. **Si on ajoute à l'une des colonnes une combinaison linéaire des <u>autres</u> colonnes alors on ne change pas le déterminant.**
Par exemple, pour $n = 3$, $\det(C_1 | \ C_2 + \alpha C_1 + \beta C_3 | \ C_3) = \det(C_1 | \ C_2 | \ C_3)$
5. **Si on multiplie une colonne par un scalaire k alors le déterminant est multiplié par k.**
Par exemple, pour $n = 3$, $\det(kC_1 | \ C_2 | \ C_3) = k \det(C_1 | \ C_2 | \ C_3)$
et $\det(k_1 C_1 | k_2 C_2 | k_3 C_3) = k_1 k_2 k_3 \det(C_1 | \ C_2 | \ C_3)$.
6. ***Si A* carrée d'ordre <u>n</u> alors $\forall k \in K, \det(kA) = k^n \det(A)$** ⚠
Par exemple, pour $n = 3$, $\det(kC_1 | \ kC_2 \ | kC_3) = k^3 \det(C_1 \ | C_2 | \ C_3)$
7. $\mathbf{\det(AB) = \det(A) \times \det(B)}$ **ADMIS**
8. $\mathbf{\det(A^T) = \det(A)}$
9. **Si on échange deux lignes alors le déterminant change de signe.**
10. **Si l'une des lignes est combinaison linéaire des <u>autres</u> lignes alors le déterminant est nul.**
11. **Si on ajoute à l'une des lignes une combinaison linéaire des <u>autres</u> lignes alors on ne change pas le déterminant.**
12. **Si on multiplie une ligne par un scalaire k alors le déterminant est multiplié par k .**

9 Déterminant et opérations élémentaires

$$A \underbrace{\sim_L}_{L_i \leftrightarrow L_j} B \Rightarrow \det(B) = -\det(A)$$

$$A \underbrace{\sim_L}_{\substack{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \\ i \neq j, \ \lambda \in K}} B \Rightarrow \det(B) = \det(A)$$

$$A \underbrace{\sim_L}_{\substack{L_i \leftarrow \lambda L_i \\ \lambda \in K^*}} B \Rightarrow \det(B) = \lambda \det(A)$$

Démo : 1) $\det(C_1 | C_1 | C_3) \underbrace{=}_{\substack{\text{en échangeant} \\ \text{le deux colonnes} \\ \text{identiques}}} -\det(C_1 | \ C_1 | \ C_3)$. Donc, $\det(C_1 | \ C_1 | \ C_3) = 0$.

1) $\det(C_1 | \ \alpha C_1 + \beta C_3 | \ C_3) \underbrace{=}_{prop\ 93.1} \alpha \underbrace{\det(C_1 | \ C_1 | \ C_3)}_{=0 \ d'après\ 1)} + \beta \underbrace{\det(C_1 | \ C_3 | \ C_3)}_{=0\ d'apères 1)} = 0.$
2) $\det(C_1 | \ C_2 + \alpha C_1 + \beta C_3 | \ C_3) \underbrace{=}_{prop\ 93.1} \det(C_1 | \ C_2 | \ C_3) + \alpha \underbrace{\det(C_1 | \ C_1 | \ C_3)}_{=0} + \beta \underbrace{\det(C_1 | \ C_3 | \ C_3)}_{=0} = \det(C_1 | \ C_2 | \ C_3).$
3) $\det(kC_1 | \ C_2 | \ C_3) \underbrace{=}_{prop\ 93.1} k \det(C_1 | \ C_2 | \ C_3)$ et $\det(k_1 C_1 | k_2 C_2 | k_3 C_3) \underbrace{=}_{prop\ 93.1} k_1 k_2 k_3 \det(C_1 | \ C_2 | \ C_3)$
4) $\det(kC_1 | \ kC_2 \ | kC_3) \underbrace{=}_{prop\ 93.1} k^1 \det(C_1 \ | kC_2 | \ kC_3) \underbrace{=}_{prop\ 93.1} k^2 \det(C_1 \ | C_2 | \ kC_3) \underbrace{=}_{prop\ 93.1} k^3 \det(C_1 \ | C_2 | \ C_3).$
5) Admis
6) Calculer $det(A)$ en développant par rapport à la ligne i revient à calculer $det(A^T)$ en développant par rapport à la colonne i. Donc $det(A^T) = \det(A)$.

10 En PRATIQUE : pour calculer $det(A)$,

1. **on regarde si l'une des lignes ou colonnes de A est combinaison linéaire des autres.**
2. **Lorsqu'on ne voit rien, on fait des opérations élémentaires sur les lignes <u>et</u> colonnes de A :**
   - **SOIT pour échelonner la matrice A et obtenir une matrice triangulaire supérieure (ou inf.) dont on sait calculer le déterminant.**
   - **SOIT pour faire apparaitre des colonnes ou lignes avec un seul coefficient non nul afin de développer le déterminant par rapport à cette colonne ou ligne « presque nulle ».**
3. **Pour calculer un déterminant Δ_n d'ordre n inconnu, on essaie souvent d'obtenir une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1}(et/ou Δ_{n-2} ...).**

11Exemples :

- $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$ =0 car $L_2 = -2L_1$ et $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 14 \end{vmatrix} = 0 \ car \ C_3 = 2(C_1 + C_2).$
- $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{L_1 \leftrightarrow L_3} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & -11 & -3 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{L_2 \leftarrow -\frac{1}{6} L_2} -6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} \\ 0 & -11 & -3 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{L_3 \leftarrow L_3 + 11L_2} -6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & \frac{59}{6} \end{vmatrix} = -59$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^+ & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & -12 & 5 \\ 0 & 2 & -11 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 5 & -12 & 5 \\ 2 & -11 & 6 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 - L_3 \\ puis\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}} \begin{vmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 2 & -11 & 6 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} 4 \begin{vmatrix} 1^+ & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -23 & 12 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -23 & 12 \end{vmatrix}$

$\Delta_2 = 4[12 - (-23) \times (-1)] = -44.$

Exemple CLASSQUE : **Déterminant de Vandermonde.** Soit $n \in \mathbb{N}\ tq\ n \geq 2,\ \ a_1, \dots, a_n$ des complexes et

$$V_n(a_1, .., a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

. Calculons $V_n(a_1, .., a_n)$

$$V_n(a_1, .., a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \underbrace{=}_{L_n \leftarrow L_n - a_1 L_{n-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - a_1 L_{n-2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2} - a_1 a_2^{n-3} & & a_n^{n-2} - a_1 a_n^{n-3} \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \underbrace{\cdots}_{\substack{L_{n-2} \leftarrow L_{n-2} - a_1 L_{n-3} \\ puis \\ L_{n-3} \leftarrow L_{n-3} - a_1 L_{n-4} \\ puis \\ \vdots \\ L_2 \leftarrow L_2 - a_1 L_1}} = \begin{vmatrix} 1^+ & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2} - a_1 a_2^{n-3} & & a_n^{n-2} - a_1 a_n^{n-3} \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= +1 \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} - a_1 a_2^{n-3} & a_3^{n-2} - a_1 a_3^{n-3} & \vdots & a_n^{n-2} - a_1 a_n^{n-3} \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ (a_2 - a_1)a_2 & (a_3 - a_1)a_3 & \cdots & (a_n - a_1)a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_2 - a_1)a_2^{n-3} & (a_3 - a_1)a_3^{n-3} & \vdots & (a_n - a_1)a_n^{n-3} \\ (a_2 - a_1)a_2^{n-2} & (a_3 - a_1)a_3^{n-2} & \dots & (a_n - a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{prop\ 94.4} (a_2 - a_1)a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \vdots & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

$J'en\ déduis\ que$, $V_n(a_1, .., a_n) = [\prod_{k=2}^{n}(a_k - a_1)]V_{n-1}(a_2, .., a_n)$. (c'est la relation de récurrence vérifiée par V_n)

Par conséquent, $V_n(a_1, .., a_n) = [\prod_{k=2}^{n}(a_k - a_1)][\prod_{k=3}^{n}(a_k - a_2)]V_{n-2}(a_3, .., a_n)$

$$V_n(a_1, .., a_n) = \left[\prod_{k=2}^{n}(a_k - a_1)\right]\left[\prod_{k=3}^{n}(a_k - a_2)\right]\left[\prod_{k=4}^{n}(a_k - a_3)\right]V_{n-3}(a_4, .., a_n) = \cdots .. = \left[\prod_{j=1}^{n-1}\prod_{k=j+1}^{n}(a_k - a_j)\right]\underbrace{V_1(a_n)}_{=|1|=1}$$

$$V_n(a_1, .., a_n) = \underbrace{\left[\prod_{1 \leq j < k \leq n}(a_k - a_j)\right]}_{produit\ double} = produit\ de\ tous\ les\ facteurs\ (a_k - a_j)\ possibles\ avec\ k > i.$$

4. Application du déterminant à l'inversibilité

12 Théorème : A inversible $si\ et\ ssi$ $\det(A) \neq 0$. Et si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Démo : $det(A) \neq 0 \Rightarrow$aucune des lignes de A n'est combinaison linéaire des autres$\Rightarrow A\ inversible$.

A inversible $\Rightarrow A^{-1}\ existe\ et\ AA^{-1} = I \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det(I) \Rightarrow \det(A)\, det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0$ et $det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

13Exemple : Déterminons tous les réels x tels que $A - xI$ est inversible où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \underbrace{=}_{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3} \begin{vmatrix} 3-x & 3-x & 3-x \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \underbrace{=}_{prop\ 92.4} (3-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$\det(A - xI) \underbrace{=}_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} (3-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = (3-x)x^2.$$ Donc, $(A - xI)\ inversible \Leftrightarrow x \neq 0\ et\ x \neq 3$.

14Conséquences : Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n.

- Si A et B sont semblables alors $\det(A) = \det(B)\ et\ tr(A) = tr(B)$.
- $Si\ AB$ est inversible alors $A\ et\ B$ sont inversibles. .

Démo A et B sont semblables$\Longrightarrow \exists P \in GL_n(K)/B = P^{-1}AP \Longrightarrow \exists P \in GL_n(K)/\begin{cases} \det(B) = \det(P^{-1}AP) \\ tr(B) = tr(P^{-1}AP) \end{cases} \underset{\substack{car \\ \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) \\ = \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A) \\ et\ tr(P^{-1}AP) = tr(APP^{-1}) = tr(A).}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \det(B) = \det(A) \\ tr(B) = tr(A) \end{cases}$.

AB inversible$\Longrightarrow \det(AB) \neq 0 \Longrightarrow \det(A)\det(B) \neq 0 \Longrightarrow \det(A) \neq 0\ et\ \det(B) \neq 0 \Longrightarrow A\ et\ B\ sont\ inversibles$.

II Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base et déterminant d'un endomorphisme.

15 Déf : Soit E de dimension finie n de base $\mathscr{B}$. Soit $\mathscr{V} \doteq (\overrightarrow{v_i})_{i\in\{1,..,n\}}$ une famille de vecteurs de E de cardinal n. Alors $det_{\mathscr{B}}\mathscr{V}$, le déterminant de la famille $\mathscr{V}$ dans la base $\mathscr{B}$ est le déterminant de la matrice de $\mathscr{V}$ dans B. $det_{\mathscr{B}}\mathscr{V} \doteq \det(mat_{\mathscr{B}}\mathscr{V})$.

16Conséquences Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E et $\mathscr{V}$ une famille de vecteurs de E de cardinal n. alors

- $det_{\mathscr{B}'}\mathscr{V} = (det_{\mathscr{B}'}\mathscr{B})(det_{\mathscr{B}}\mathscr{V})$.
- $\mathscr{V}$ est libre **si et ssi** $\mathscr{V}$ est une base **si et ssi** $\mathscr{V}$ est génératrice E **si et ssi** $det_{\mathscr{B}}\mathscr{V} \neq 0$.
- $det_{\mathscr{B}}$ est linéaire par rapport à chaque vecteur de la famille et alterné et vérifie $det_{\mathscr{B}}\mathscr{B}''= 1$.

17Préliminaire : Soit E de dimension finie et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E .
Soit u un endomorphisme de E tel que $\mathscr{B} = mat_{\mathscr{B}'}u$ et $A = mat_{\mathscr{B}}u$.
Alors, $mat_{\mathscr{B}'}u = mat_{\mathscr{B}'}\mathscr{B} \times mat_{\mathscr{B}}u \times mat_{\mathscr{B}}\mathscr{B}'$ ie. $M = P^{-1}AP$
Donc, $\det(B) = \det(P^{-1}) \times \det(A) \times \det(P) = \frac{1}{\det(P)} \times \det(A) \times \det(P) = \det(A)$

Donc, le déterminant de la matrice de u dans une base de E ne dépend pas de la base choisie. D'où la définition suivante :

18Def Soit E de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E . Le déterminant de l'endomorphisme u , noté $det(u)$, est le déterminant de la matrice de u dans n'importe quelle base de E .
Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, $det(u) = \det(mat_{\mathscr{B}}u)$.

19Exemple : Si s est une symétrie vectorielle dans le K-e-v E alors $\det(s) = (-1)^t$ où $t = dimKer(s + id_E)$.
Si p est une projection vectorielle dans le K-e-v E telle que $p \neq id_E$ alors $\det(p) = 0$.
Si h est l'homothétie vectorielle de rapport λ dans le K-e-v E de dimension n alors $\det(h) = \lambda^n = \lambda^{\dim(E)}$.

20Prop : Soit E de dimension finie p. Soit u un endomorphisme de E , λ un scalaire et $k \in \mathbb{N}$.

1. $\det(\lambda u) = \lambda^p \det(u)$
2. $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)$
3. $\det(u^k) = (\det(u))^k$.
4. u est injective **si et ssi** u est surjective **si et ssi** u est un automorphisme E **si et ssi** $\det(u) \neq 0$. Et dans le cas échéant, $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$.
5. $Ker(u - \lambda id_E)$ contient un vecteur non nul sietssi $\det(u - \lambda id_E) = 0$.

Démo :1. $\det(\lambda u) = \det(mat_B(\lambda u)) = \det(\lambda \det(mat_B u)) = \lambda^p \det(\det(mat_B u)) = \lambda^p \det(u)$

2. $\det(u \circ v) = \det((mat_B u \circ v) = \det((mat_B u) \times (mat_B v)) = \det(mat_B u) \times \det(mat_B v) = \det(u)\det(v)$

3. Par conséquent, on montre facilement par récurrence que $\det(u^k) = (\det(u))^k$.
Init° : $\det(u^0) = (\det(id)) = 1 = (\det(u))^0$.
Propag° : Soit $k \in \mathbb{N}$. *Je suppose que* $\det(u^k) = (\det(u))^k$. Alors, $\det(u^{k+1}) \underbrace{=}_{par\ 2} \det(u^k)\ \det(u^1) \underbrace{=}_{\substack{par\ hypo \\ de\ récurrence}} (\det(u))^k\ det(u)) = (\det(u))^k$.
CCL : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\det(u^k) = (\det(u))^k$.
4. u est injective **sietssi** u est surjective **sietssi** u est un automorphisme E **sietssi** $(mat_B u)$ inversible **sietssi** $det(u) \neq 0$.
Et quand u est un automorphisme, $u \circ u^{-1} = id$ donc $\det(u) \times \det(u^{-1}) \underbrace{=}_{2.} \det(u \circ u^{-1}) = \det(id) = 1$. Ainsi, $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$.
5. $Ker(u - \lambda id_E)$ contient un vecteur non nul sietssi $u - \lambda id_E$ n'est pas injective sietssi $\det(u - \lambda id_E) = 0$.