# Programme de colle 22

## Révision : résolution des équations différentielles d'ordre 1 (**)

## + Chapitre 16 Matrices

### III Matrices carrées

1. **Définition et opérations.**
2. **Trace :** définition et propriétés.

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K).\ tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Soit $(A, B) \in M_n(K)^2 et\ (\alpha, \beta) \in K^2.\ tr(\alpha A + \beta B) = \alpha tr(A) + \beta tr(B)$ et $tr(AB) = tr(BA)$

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K).\ tr(A^T A) = tr(AA^T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2$. A SAVOIR DEMONTRER !

3. **Matrices carrées particulières :**

Matrice nulle, identité

Matrices diagonales ou triangulaires Définition. Le produit et les combinaisons linéaires de matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. inférieures) sont diagonales ( resp. triangulaires supérieures, respectivement inférieures). Diagonale d'un produit de matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures, respectivement inférieures).

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. $A$ est diagonale lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0)$. On note $diag(\delta_1, \delta_2, .., \delta_n) = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_n \end{pmatrix}$.

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. $A$ est triangulaire supérieure lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. $A$ est triangulaire inférieure lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

Soit $(A, B) \in M_n(K)^2 et\ (\alpha, \beta) \in K^2$.
Si $A\ et\ B$ sont diagonales alors $\alpha A + \beta B$ et $AB$ sont diagonales.
Si $A\ et\ B$ sont triangulaires supérieures ( resp. inférieures) alors $\alpha A + \beta B$ et $AB$ sont triangulaires supérieures ( resp. inférieures).

Matrices symétriques ou antisymétriques. Définition. Les combinaisons linéaires de matrices symétriques (resp. antisymétriques), sont symétriques (resp. antisymétriques). Toute matrice s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Soit $A \in M_n(K)$. $A$ est symétrique lorsque $A^T = A$. $A$ est antisymétrique lorsque $A^T = -A$.

$A = (a_{ij})\ symétrique \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} = a_{ji}$.

$A = (a_{ij})\ antisymétrique \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} = -a_{ji}$. $A\ antisymétrique \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], a_{ii} = 0$.

Si $A\ et\ B$ sont symétriques (resp. antisymétriques) alors $\alpha A + \beta B$ et $AB$ sont symétriques (resp. antisymétriques).

Toute matrice $M$ de $M_n(K)$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique et l'écriture est $M = \frac{M+M^T}{2} + \frac{M-M^T}{2}$.

4. **Puissances d'une matrice carrée**

Définition :

Soit $A \in M_n(K)$ . $A^0 = I\ et\ \forall m \in \mathbb{N}^*, A^m = A^{m-1}A$.

Si $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + .. + a_pX^p \in K[X]$ alors $P(A) = a_0 I + a_1A + a_2A^2 + .. + a_pA^p$. $P$ est annulateur de $A$ lorsque $P(A) = 0$.

Si $P(X) = Q(X)S(X) + R(X)\ alors\ P(A) = Q(A)S(A) + R(A)$.

Règles de calcul : formule du binôme de Newton, formule de factorisation.

Si $A\ et\ B \in M_n(K)$ telles que $AB = BA$ ($A$ et $B$ commutent) alors $(A + B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}$ et $A^{N+1} - B^{N+1} = (A - B)(\sum_{k=0}^{N} A^k B^{N-k})$.

Si $(A, B) \in M_n(K)^2 et\ (\alpha, \beta) \in K^2$ telles que $A$ et $B$ commutent alors $\alpha A$ et $\beta B$ commutent.

Exemples : puissance de $\lambda A$ , de $I (= I_n)$ , de $J \in M_n(K)$ dont tous les coefficients valent 1, d'une matrice diagonale, du produit de deux matrices qui commutent.

Si $(A, B) \in M_n(K)^2$ et $\lambda \in K\ et\ m \in \mathbb{N}$, alors $(\lambda A)^m = \lambda^m A^m\ et\ si\ AB = BA$ alors $(AB)^m = A^m B^m$.

$I^m = I\ et\ J^m = \begin{cases} n^{m-1}J\ si\ m \geq 1 \\ I\ si\ m = 0 \end{cases}$.

$(diag(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n))^m = diag(\alpha_1{}^m, \alpha_2{}^m, .., \alpha_n{}^m)$

Matrices nilpotentes : définition, exemple : cas des matrices triangulaires avec la diagonale nulle

Soit $N \in M_n(K)$ . $N$ est nilpotente lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = O$.

Toute matrice triangulaire avec diagonale nulle est nilpotente.

### Méthodes pour calculer $A^m$ tq $m \in \mathbb{N}$.

a) Conjecture + récurrence (+ parfois suites)
b) Ecriture $A = B + C$ où $B\ et\ C$ commutent + formule du binôme de Newton.
c) Polynôme annulateur + division euclidienne.
d) $A = P^{-1}BP$ donc $A^k = P^{-1}B^kP$

# IV Matrices carrées inversibles

## 1. Définition

Soit $A \in M_n(K)$ . $A$ est inversible lorsqu'il existe $B \in M_n(K)$ tel que $AB = BA = I_n$. Une telle matrice $B$ lorsqu'elle existe est unique est appelée l'inverse de $A$ et est notée $A^{-1}$ . Ainsi, $A^{-1}$, si elle existe, est l'unique matrice vérifiant $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

$GL_n(K)$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $K$ et inversibles.

Si $A \in GL_n(K)$ alors $[AB = AC \Leftrightarrow B = C]$ $\ et\ [AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y]$.

## 2. Exemples de référence

1. $I_n$ et toute matrice d' opération élémentaires sont inversibles et $I_n^{-1} = I_n, T_{ij}^{-1} = T_{ij}, D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right), H_{ij}(\beta)^{-1} = H_{ij}(-\beta)$
2. Toute matrice d'opération élémentaire est inversible et l'inverse est la matrice de l'opération inverse i.e.
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\ tel\ i \neq j, \forall \beta \in K, \forall \lambda \in K^*,\ T_{ij}^{-1} = T_{ij}$ et $D_i(\lambda) = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ et\ H_{ij}(\beta) = H_{ij}(-\beta)$.
3. S'il existe $B$ non nulle telle que $AB = O$ ou $BA = O$ alors $A$ **n'est pas** inversible.
4. Si l'une des colonnes (resp. lignes) de $A$ est combinaison linéaire des autres colonnes ( resp. lignes) alors $A$ **n'est pas** inversible. ( en particulier si $A$ contient une ligne ou une colonne nulle alors $A$ n'est pas inversible)
5. Soit $D = diag(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$. $D$ est inversible **sietssi** $\forall k \in [\![1,n]\!], \delta_k \neq 0$. Et le cas échéant, $D^{-1} = diag\left(\delta_1^{-1}, \delta_2^{-1}, \dots, \delta_n^{-1}\right)$.
6. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$.

$A$ est inversible **sietssi** $\det(A) = ad - cb \neq 0$. Et le cas échéant, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

7. Soit $T = (t_{ij}) \in M_n(K)$ telle que $T$ triangulaire. $T$ est inversible **sietssi** $\forall k \in [\![1,n]\!], t_{kk} \neq 0$. Et le cas échéant, $T^{-1}$est aussi triangulaire.

<u>A savoir démontrer :</u>

1. Si $N$ est nilpotente telle que $N^p = O$ alors pour tout $\lambda \in K,\ I - \lambda N$ est inversible et $(I - \lambda N)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1}(\lambda N)^k$.
2. S' il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in K\ tels\ que\ a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_p A^p = O$ et $a_0 \neq 0$ ( autrement dit il existe un polynôme annulateur de A qui ne s'annule pas en 0 ) alors $A$ est inversible et on trouve $A^{-1}$ en isolant $I$ d'un côté de l'égalité puis en factorisant par $A$ de l'autre côté de l'égalité .

## 3. Opérations

$Si\ P\ et\ Q$ $\left(\in M_n(K)\right)$ sont inversibles, $\lambda \in K^*\ et\ k \in \mathbb{N}$ alors $\lambda P, PQ, P^T, P^k$ sont inversibles et

$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$ , $(\lambda P)^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)P^{-1}$, $(P^T)^{-1} = (P^{-1})^T$ $\ et\ $ $(P^k)^{-1} = (P^{-1})^k$ mais $P + Q$ **n'est pas** toujours inversible.

Si $P$ est inversible alors on définit $\forall k \in \mathbb{N}, P^{-k} = (P^{-1})^k = (P^k)^{-1}$.

Si $P$ est inversible alors $(P^{-1}BP)^k = P^{-1}B^kP$ et si, de plus, $B$ est inversible alors $(P^{-1}BP)^{-1} = P^{-1}B^{-1}P$ .

## 4. Caractérisations

$Soit\ A \in M_n(K)$ .
$A$ est inversible **sietssi** rg(A)$= n$ **sietssi** $A \sim_L I_n$ **sietssi** $A$ est le produit de matrices d'opérations élémentaires.
$A$ est inversible **sietssi** le système $AX = 0$ admet $X = 0$ comme unique solution.
$A$ est inversible **sietssi** il existe $B$ tel que $AB = I$
$A$ est inversible **sietssi** il existe $B$ tel que $BA = I$
$A$ est inversible **sietssi** tout système linéaire $AX = Y$ associé à $A$ est de Cramer. Le cas échéant , l'unique solution est $X = A^{-1}Y$.
$A$ est inversible **sietssi** l'un des systèmes linéaires associés à $A$ est de Cramer.
$A$ est inversible **sietssi** $A^T$ est inversible.

$A$ **n'est pas** inversible **sietssi** $\mathrm{rg(A)} < n$
$A$ **n'est pas** inversible **sietssi** il existe $X \in M_{n,1}(K)$ non nulle telle que $AX = 0$
$A$ **n'est pas** inversible **sietssi** l'une des colonnes (resp. lignes) de $A$ est combinaison linéaire des autres colonnes(resp. lignes).

## 5. Méthodes pour prouver $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.

1. Utiliser un polynôme annulateur
2. Ecrire $A$ comme le produit de matrices inversibles, la transposée , une puissance d'une matrice inversible
3. Résoudre le système linéaire $(S)$ : $AX = Y$ où $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ paramètre et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ inconnue.
   - Ou bien $(S)$ a parfois plein de solutions et parfois aucune solution selon $Y$. Alors $A$ n'est pas inversible
   - Ou bien, pour tout $Y$, $(S)$ est de Cramer et $A^{-1}$se lit sur l'unique solution $X = A^{-1}Y$.
4. Echelonner $A$ en lignes (resp en colonnes) et faire, en parallèle, les mêmes opérations sur $I$
   - jusqu'à une matrice échelonnée pour connaitre $rg(A)$ et savoir si $A$ est inversible .
   - jusqu'à l'obtention de $I$ pour lire $A^{-1}$ qui sera la matrice obtenue, en parallèle, équivalence par ligne (resp. colonne) à $I$.
5. Calculer det $(A)$ et le cas échéant déterminer $com(A)$ et appliquer la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[com(A)]^T$.

# Chapitre 16bis Déterminant d'une matrice carrée

**Définition :** déterminant d'ordre 1, d'ordre 2, d'ordre 3, d'ordre 4, puis d'ordre $n$ par développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in M_n(K)$.

$\Delta_{ij}$ , le mineur d'indice $(i,j)$ de $A$, le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en ôtant à $A$ sa ligne $i$ et sa colonne $j$.

Alors, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \det(A) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k} a_{ik}\,\Delta_{ik}}_{\substack{développement\ du\ det \\ par\ rapport\ à\ la\ ligne\ i}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j} a_{kj}\,\Delta_{ki}}_{\substack{développement\ du\ det \\ par\ rapport\ à\ la\ colonne\ j}}$

Nous admettons que le résultat obtenu ne dépend pas de la ligne ou colonne choisie.

**Exemple :** le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est égal au produit des coefficients diagonaux.

**Propriétés**

$det$ est linéaire par rapport à chacune des colonnes et alterné :

$\det(C_1, C_2, \dots C_{k-1}, \alpha X + \beta Y, C_{k+1}, \dots C_n) = \alpha \det(C_1, C_2, \dots C_{k-1}, X, C_{k+1}, \dots C_n) + \beta \det(C_1, C_2, \dots C_{k-1}, Y, C_{k+1}, \dots C_n)$

si $i \neq j$ alors $\det(C_1, C_2, \dots C_i, \dots., C_j, \dots C_n) = -\det(C_1, C_2, \dots, C_j, \dots., C_i, \dots C_n)$. (échange de colonnes)

Pour toutes matrices $A$ et $B$ carrées d'odre $n$ , $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ $et$ $det(A) = det(A^T)$ .

**Conséquences :**

Lorsqu'une colonne (ou ligne) de $A$ est combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) alors le déterminant est nul. ( en particulier lorsqu'une ligne ou colonne est nulle ou lorsque deux colonnes ou deux lignes sont égales).

Ajouter à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) ne change pas le déterminant.

Si tous les coefficients d'une colonne (resp. ligne) ont un facteur commun alors je peux « factoriser » le déterminant par ce facteur.

Si on échange deux colonnes ( resp. lignes) d'une matrice alors le déterminant change de signe.

$\forall A \in M_n(K), \forall \lambda \in K, \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

**Exemple à savoir démontrer :** le déterminant de Vandermonde

**Application à la caractérisation de l'Inversibilité d'une matrice**

$A$ est inversible $sietssi$ $detA \neq 0$. Et le cas échéant, $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

**(**) résoudre deux ou trois équations différentielles linéaires d'ordre 1 pour se remémorer la méthode… Cela pourra faire l'objet d'un exercice de colle.**

## Questions de cours :

**QDC 1:** Démontrer que si $(A,B) \in M_n(K)^2$ et $(\alpha, \beta = \in K^2$, alors $tr(\alpha A + \beta B) = \alpha tr(A) + \beta tr(B)$ $et$ $tr(AB) = tr(BA) et$ $tr(A^T A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} {a_{ij}}^2$

**QDC 2:** Montrer que le produit de deux matrices carrées d'ordre $n$ triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

**QDC 3 :** Montrer que toute matrice carrée d'ordre $n$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

**QDC 4** : Montrer que s'il existe $B$ non nulle telle que $AB = O$ ou $BA = O$ alors $A$ n'est pas inversible. En déduire que si l'une des colonnes (resp. lignes) de $A$ est combinaison linéaire des autres colonnes ( resp. lignes) alors $A$ n'est pas inversible.

**QDC 5 :** Montrer que le déterminant est $n -$ linéaire et alterné.