

Programme de colle 23

Révision : résolution des équations différentielles d'ordre 2 et suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (**)+

Chapitre 16 bis Déterminants

Cf programme précédent.

Chapitre 17 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels . Familles finies de vecteurs.

I Généralités.

1. Définition et règles de calcul

P1 $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \vec{x} + \vec{y} \in E$ et $\forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K, \alpha \cdot \vec{x} \in E$ (E est stable par addition interne et multiplication externe).

P2 $(+)$ est ASSOCIATIVE et COMMUTATIVE i.e. $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in E^3, (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ et $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

P3 $(+)$ a un élément NEUTRE noté $\vec{0}_E$ ou $\vec{0}$ qui vérifie : $\forall \vec{x} \in E, \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$.

P4 Tout élément $\vec{x}$ de E a un unique SYMETRIQUE pour $(+)$. $\forall \vec{x} \in E, \exists ! \vec{y} \in E / \vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$. Alors, $\vec{y}$ est noté $-\vec{x}$ et appelé l'opposé de $\vec{x}$. $(-\vec{x})$ est désormais noté $\vec{-x}$

P5 $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$ et $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$ $(\cdot)$ est distributive sur $(+)$

P6 $\forall \vec{x} \in E, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha \beta) \cdot \vec{x} = \beta \cdot (\alpha \cdot \vec{x})$ (associativité mixte)

P7 $\forall \vec{x} \in E, 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

C1 $\forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K, (\alpha \cdot \vec{x} = \vec{0} \text{ si et ssi } \alpha = 0 \text{ ou } \vec{x} = \vec{0}_E)$

C2 $\forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K, -\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x}$ et $-(\alpha \cdot \vec{x}) = (-\alpha) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (-\vec{x})$

C3 $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, (\alpha - \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} - \beta \cdot \vec{x}$ et $(\vec{x} - \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} - \alpha \cdot \vec{y}$

Généralisation des propriétés P2 à 7 : Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ des vecteurs d'un K -e-v et $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ des éléments de K .

$$\sum_{k=1}^p \vec{u}_k = \sum_{k=1}^r \vec{u}_k + \sum_{k=r+1}^p \vec{u}_k \quad \text{où } r \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket.$$

$$\sum_{k=1}^p \vec{u}_k = \sum_{i=0}^{p-1} \vec{u}_{p-i}$$

$$\sum_{k=1}^p (\sum_{j=1}^n \vec{u}_{kj}) = \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^p \vec{u}_{kj})$$

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{x} = (\sum_{k=1}^p \alpha_k) \vec{x}$$

$$\alpha \sum_{k=1}^p \vec{u}_k = \sum_{k=1}^p \alpha \vec{u}_k$$

Si $\vec{x}, \vec{y}$ et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ sont des vecteurs de E alors

tout vecteur de la forme $\alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y}$ tq $\alpha, \beta \in K$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ et est élément de E .

tout vecteur de la forme $\sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{u}_k$ tq $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in K$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ et est élément de E .

Tout espace vectoriel est stable par combinaison linéaire.

2. Espaces vectoriels de référence.

Munis de leur addition et de leur multiplication externe usuelles,

P (l'ensemble des vecteurs du plan), E (l'ensemble des vecteurs de l'espace géométrique) sont des $\mathbb{R}$ -e-v.

$K, K^n, M_{n,p}(K), K^{\mathbb{N}}, F(\Omega, K), K[X]$ sont des K -e-v.

3. Espace produit- Espace de fonctions.

Structure de K -e-v. de $\mathcal{F}(T, E)$ où E est un K -e-v et T un ensemble. Structure de K -e-v. de $E \times F$ où E et F sont deux K -e-v.

II Sous-espaces vectoriels.

1. Définition

Deux définitions équivalentes d'un sous-e-v.

Soit $(E, +, \cdot)$ un K -e-v. F est un sous-espace-vectoriel de E lorsque

- $F \subset E$
- $\vec{0}_E \in F$ **ou** $F \neq \emptyset$
- $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2, \forall \alpha \in K, \alpha \vec{x} \in F$ et $\vec{x} + \vec{y} \in F$ **ou** $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in F$.

Tout ss-e-v d'un K -e-v est un K -e-v et est stable par somme, multiplication par un scalaire, par combinaison linéaire.

2. Sous-espaces vectoriels de référence.

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, C^k(I, K)$ est un ss-e-v de $F(I, K)$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}, K_m[X]$ est un ss-e-v de $K[X]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, D_n(K), TS_n(K), TI_n(K), AS_n(K), S_n(K)$ est un ss-e-v de $M_n(K)$.

3. Sous-e-v engendré par une famille de vecteurs.

Soit E un K -e-v et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ des vecteurs de E . L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ est un ss-e-v de E noté $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ et appelé ss-e-v engendré par la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille génératrice de $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$.

Droite vectorielle et plan vectoriel. Une droite vectorielle de E est un ss-e-v engendré par un vecteur non nul de E .

Un plan vectoriel de E est un ss-e-v de E engendré par deux vecteurs non colinéaires de E .

$\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est inclus dans tout ss-e-v de E contenant $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ et est donc le plus petit ss-e-v (au sens de l'inclusion) contenant la famille $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$.

Soit X un sous-ensemble de E et $\text{vect}(X)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de X . Alors, $\text{vect}(X)$ est un ss-e-v de E et est contenu dans tout ss-e-v de E contenant X . $\text{vect}(X)$ est appelé l'espace vectoriel engendré par X .

4. Intersection et somme de ss-e-v

- Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de ss-e-v de E . Alors $\bigcap_{i \in I} F_i = \{\vec{x} \in E / \forall i \in I, \vec{x} \in F_i\}$ est un sous-e-v de E .

- Soit F et G deux ss-e-v de E . Alors $F + G = \{\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} \in F, \vec{y} \in G\} = \{\vec{u} \in E \mid \exists \vec{x} \in F, \vec{y} \in G, \vec{u} = \vec{x} + \vec{y}\}$ est ss-e-v de E appelé ss-e-v somme de F et G .
- Si $F = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ et $G = \text{vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q)$ alors $F + G = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q)$.

5. Somme directe et sous-espaces supplémentaires.

Soit F et G deux ss-e-v de E .

- F et G sont en somme directe lorsque tout élément de $F + G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .
- F et G sont supplémentaires dans E lorsque tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G . On note alors $E = F \oplus G$. (définition)
- F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$. (caractérisation ou définition équivalente)
- F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ et $F + G = E$. (caractérisation ou définition équivalente)

III Famille finie libre ou/et génératrice. Base.

1. Famille libre

Définition

Soit E un K -e-v et $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E .

- $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille libre lorsque la seule manière d'écrire $\vec{0}_E$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ est la manière triviale $\vec{0}_E = 0 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{u}_p$; autrement dit lorsque l'équation $\vec{0}_E = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{u}_p$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in K^p$ admet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = (0, 0, \dots, 0)$ comme unique solution.
- $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille liée lorsque $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ n'est pas libre; autrement dit lorsqu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \neq (0, 0, \dots, 0)$ tel que $\vec{0}_E = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{u}_p$.

Caractérisation

- $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille libre si et seulement si aucun vecteur de cette famille n'est combinaison linéaire des autres.
- $((\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p))$ est une famille liée si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres.

Opérations

- La liberté d'une famille ne dépend pas de l'ordre des vecteurs dans cette famille.
- Si l'on ajoute à une famille libre $\mathcal{L}$ un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$ alors la famille obtenue est encore libre.
- Toute famille extraite d'une famille libre est encore libre (i.e. si on ôte des vecteurs à une famille libre, la famille conserve la liberté).
- Les opérations élémentaires sur les vecteurs d'une famille libre $\mathcal{L}$ conservent la liberté de $\mathcal{L}$.

Exemples à connaître et reconnaître

- Toute famille de polynômes non nuls et tous de degrés distincts est libre.
- Toute famille de n -uplets non nuls et échelonnés en zéros (par la droite ou la gauche) ou de matrices-colonnes non nulles et échelonnées en zéros (par le haut ou le bas) est libre.

Propriété

- Si $\mathcal{L}$ est une famille libre alors tout vecteur de $\text{vect}(\mathcal{L})$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{L}$.

2. Base

Définition

Soit E un K -e-v. $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une base de E lorsque B est génératrice de E et libre.

(**) Cela pourra faire l'objet d'un exercice de colle.

Questions de cours :

QDC 1 Démontrer que dans le $K - e - v (E, +, \cdot), \forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K. (\alpha \cdot \vec{x} = \vec{0} \text{ si et seulement si } \alpha = 0 \text{ ou } \vec{x} = \vec{0}_E)$

QDC 2 Soit E un $K - e - v$ et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E . Montrer que l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ est un ss-e-v de E .

QDC 3 Soit E un $K - e - v$. Démontrer que l'intersection de ss-e-v de E est un ss-e-v de E . Prouver que la réunion de deux ss-e-v de E n'est pas forcément un ss-e-v de E .

QDC 4 Démontrer la caractérisation de deux espaces en somme directe et celle de deux ss-e-v supplémentaires.

QDC 5 $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille liée si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres.