TD 17

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels. Familles libres-génératrices-bases .

I Sous-espace vectoriel . Famille génératrice

Ex 1 vect(…)

1. Montrer que $vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right) = vect\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.
2. Soit $P(X) = 1 + 2X + X^2$, $Q(X) = 2 - X - 2X^2$ et $R(X) = -1 + 2X + kX^2$.
   Déterminer les réels k tels que : $vect(P,Q) = vect(P,Q,R)$.

Ex 2 Espace vectoriel quelqconque

Soit $(E,+,.)$ un $K-e-v$.

1. Soit F et G deux ss-e-v d'un $K.e.v$ E tq : F *et* G distincts de E et de $\{\overrightarrow{O_E}\}$.
   $E\backslash F$ est – il un ss-e-v de E ? $E\backslash F \cup \{\overrightarrow{O_E}\}$ est –il un ss-e-v de E ? $(F \cup G)$ est-il un ss-e-v de E ?
2. Soit F un ss-e-v de E et $\vec{y}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de E.

Montrer que : $F + vect(\vec{x}) = F + vect(\vec{y})$ sietssi il existe $\vec{z} \in F$ et $(a,b) \in K^2$ tels que $ab \neq 0$ *et* $\vec{z} + a\vec{x} + b\vec{y} = \overrightarrow{O_E}$

3. Soit $\mathcal{G} = (\vec{u}_1,..,\vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E.
   - **a.** Soit F un ss-e-v de E contenant $\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p$. Quelle propriété fondamentale de F justifie $vect(\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p) \subset F$?
   - **b.** Soit $F=\{\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 +..+ \alpha_p\vec{u}_p/(\alpha_1,..,\alpha_p) \in K^p\}$ et $G = \{\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 +..+ \alpha_p\vec{u}_p/(\alpha_1,..,\alpha_p) \in K^p \text{ et } \alpha_1 +..+ \alpha_p = 0\}$. Lequel de ces deux ensembles F ou G est $vect(\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p)$? Justifier. Quelle relation y-a-t-il entre F et G ?
   - **c.** Montrer que F *et* G sont deux ss-e-v de E et en donner des familles génératrices.
   - **d.** Donner une écriture de $\vec{u}_2$ puis de $\vec{O}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p$. Ces écritures sont-elles uniques ? A quelle condition sur $\mathcal{G}$ cette écriture est-elle unique ?
   - **e.** Compléter et justifier : $vect(\vec{u}_1,..,\vec{u}_p,\vec{w}) = vect(\vec{u}_1,..,\vec{u}_p)$ *sietssi* $\vec{w}$ … … … … … … … … … ..
   - **f.** Déterminer plusieurs familles génératrices de F *et de* G.
4. Remplir avec l'un des symboles suivants : $\Longrightarrow, \Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$:
   - **a.** Soit x, y et z des vecteurs de E.Alors, (x,y,z) liée ………………… $x \in vect(x,y)$.
   - **b.** Soit A et B deux parties de E. $A \subset B$…………………$vect(A) \subset vect(B)$.
   - **c.** Soit F et G deux ss-e-v de E. $F \cup G$ ss-e-v …………$F \subset G$.
   - **d.** Soit F et G deux ss-e-v de E. $F + G = G$ …………$F \subset G$.

Ex 3 Ensembles de fonctions

Barrer dans la liste suivante les ensembles F qui ne sont pas des ss-e-v. Expliquer pourquoi ils n'en sont pas et pourquoi les autres sont des ss-e-v. Dans les cas (*), chercher une famille génératrice puis une base et la dimension de F. On précisera quand F est un plan ou une droite vectoriel(le).

1. $F = \{(x \mapsto (ax^2 + bx + c)\cos(x))/a, \text{b}, \text{c } réels\}$ (*).
2. $F = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(1) = f(2)^2\}$
3. $F = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(1) = f'(1) - 3f(2)\}$
4. F est l'ensembles des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ réelles et constantes (*).
5. Soit L un réel fixé. F *est l'ensemble* des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de limite L en $+\infty$.

3. $F = \{\left(x \mapsto \tilde{P}(x)ch(x) + \tilde{Q}(x)sh(x)\right)/(P\,,Q) \in \mathbb{R}_2[X]\,\}$ (*).
4. $F = \{f \in C^1([-1,0],\mathbb{R})/\forall x \in \mathbb{R}\,, (x^3 - 1)f'(x) = xf(x)\}$ (*).
5. Soit $F = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})/\exists(\,a,b,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \,acos(x - \alpha) + bcos(x - \beta)\}$ (*)
6. Soit φ une application de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. F *est l'ensemble* des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ négligeables devant φ au voisinage de 0.
7. $F = \{f \in C^0\,([-1,1],\mathbb{R})\,/\,f_{/[-1,0]}$ *et* $f_{/[0,1]}$ sont affines $\}$ (*).

Ex 4 Ensembles de n-uplets Mêmes questions….

1. $F = \{x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } xz = y\}$
2. $F = \left\{(x,y,z,t,w) \in \mathbb{R}^5/\begin{cases}2x + y + 3z + t - 2w = 0\\3x - y + z + 2t + w = 0\\5x - 2y - z + t + 3w = 0\end{cases}\right\}$.(*)
3. Soit $n \geq 3$ *et* $F = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n/\sum_{k=1}^{n} kx_k = \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}$ (*)
4. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/(x - y)^2 = (x + y)^2\}$.
5. $F = \{(a - b, a + 3b + c, c - a) \in \mathbb{R}^3/a, b, c \text{ réels}\}$ (*)

Ex 5 Ensembles de vecteurs de l'espace géométrique E Mêmes questions….

Soit $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ trois vecteurs de E non coplanaires (ils forment donc une base de E)

1. $F = \{\vec{u} \in E/\exists(\mu,\gamma) \in \mathbb{R}^2; \vec{u} = \mu\vec{\imath} + \gamma\vec{\jmath}\}$ (*)

2. $F=\{a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}\ /(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 et\ a+b+c=0\}$(*)
3. $D=\{a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}\ /(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 et\ \begin{cases}2a-b+c=0\\a+4b-2c=0\end{cases}\}$(*)
4. Soit t un réel. $F_t=\{a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}\ /(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 et\ a+b+c=t\}$
5. $F=\{a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}\ /(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 et\ a^2+bc=0\}$
6. Soit a un réel fixé. $F_a=\{\vec{u}\in E/\ \underbrace{\vec{u}.\vec{\imath}}_{\substack{produit\\scalaire}}\ =a\}$.

<u>Ex 6 Ensembles de suites</u> Mêmes questions….
1. Soit a un réel fixé. F est l'ensemble des suites réelles vérifiant : $\forall n,u_{n+2}+u_{n+1}+u_n=a$.(*)
2. F est l'ensemble des suites vérifiant : $\forall n,u_{n+1}={u_n}^2$.
3. F est l'ensemble des suites complexes et bornées.
4. Soit u une suite réelle fixée. F est l'ensemble des suites équivalentes à u.
5. F est l'ensemble des suites majorées par leur premier terme.
6. F est l'ensemble des suites somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante.
7. F est l'ensemble des suites périodiques.

<u>Ex 7 Ensembles de polynômes</u> Mêmes questions….Soit $n\in\mathbb{N}$.
1. $F=\{a+(a+b+c)X+(2c-b)X^2/a,b,c\ réels\}$.(*))
2. $F=\{a+bX+cX^2+dX^3/a,b,c,d\in\mathbb{C}$ et $\begin{cases}a+b-c+2d=0\\2a+b-c+d=0\end{cases}\}$.(*))
3. $F=\{P\in\mathbb{R}[X]/(X^2+1)P''-6P=0\}$.(*)
4. Fest l'ensemble des polynômes de degré 5.
5. Fest l'ensemble des polynômes constants. (*)
6. $F=\{P\in\mathbb{R}[X]/P(1)=P''(1)=1\}$.
7. $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X]/\int_0^1\tilde{P}(t)dt=0\}$.(*)
8. $F=\{P\in\mathbb{R}_5[X]/\tilde{P}(1)=\tilde{P}(-1)=\tilde{P}'(-1)\}$(*)
9. $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X]/\tilde{P}(3)+2\tilde{P}''(3)=\tilde{P}'(3)\}$(*)
10. $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X]/P(X+1)=P(X)\}$(*)
11. $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X]/XP(X+1)=(X+3)P(X)\}$(*)
12. $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X]/\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(0)=0\}$(*)

<u>Ex 8 Ensembles de matrices</u> Mêmes questions….

Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.
1. $F=\{\begin{pmatrix}x+y & y+z & x+z\\-y & z & -x\end{pmatrix}/(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\}$ (*)
2. $F=\{\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}/(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4\ et\ \begin{cases}a+d=b-c\\2a+3b=c+d\end{cases}\}$ (*)
3. $Soit\ A\in M_n(\mathbb{R})\ \ et\ \ F=\{M\in M_n(\mathbb{R})/AM=MA\}$ ((*) dans le cas où $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\-2 & 6\end{pmatrix}$).
4. F est l'ensemble des matrices complexes carrées d'ordre 2 de déterminant nul.
5. $Soit\ A\in M_n(K)$ et $F=\{M\in M_n(\mathbb{R})/\exists P\in GL_n(K),M=PAP^{-1}\}$ (F est l'ensemble des matrices semblables à A).
6. $F=\{\begin{pmatrix}x & 0\\0 & y\end{pmatrix}/xy=0\}\quad puis\quad F=\{\begin{pmatrix}x & 0\\0 & y\end{pmatrix}/xy\neq0\}$
7. $F=S_3(\mathbb{R})$ (*) puis $F=AS_3(\mathbb{R})$ (*) puis $F=D_n(\mathbb{R})$. (*) puis $F=TI_n(\mathbb{R})$. (*)
8. F est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n nilpotentes.

<u>II Somme, intersection, supplémentaires, somme directe or nothing</u>

Ex 9 dans K^n
1. Soit $F=\{(a+2b,a,2a+b,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$et $G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/\ x-z=0\ \ et\ \ x+y-t=0\}$
   - *a.* Montrer que F et G sont deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
   - *b.* Justifier que $F\ et\ G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
   - *c.* Ecrire $X=(1,2,3,4)$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.
2. $E=\mathbb{R}^n$ et $F=vect((1,1,..,1,1))$ et $G=\{(x_1,x_2,..,x_n)\in\mathbb{R}^n/\sum_{k=1}^{n}x_k=0\}$.
   - *a.* Justifier que F et G sont des ss-e-v de E et en déterminer une famille génératrice puis une base.
   - *b.* Montrer que $F\ et\ G$ sont supplémentaires dans E .
3. Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x+y-2z=0\}\ et\ G=\{(a,3a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$
   - *a.* Montrer que $\boldsymbol{G\ et\ F}$ sont deux plans vectoriels. On en donnera une base et on donnera une équation de $\boldsymbol{G}$.
   - *b.* Donner une famille génératrice de $F+G$, de $F\cap G$.
   - *c.* Trouver un vecteur $X\in G$ tel que $F\ et\ vect(X)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4. Soit $F=\left\{(x,y,z,t,w)\in\mathbb{R}^5/\begin{cases}3x-y+z-t+w=0\\2x-y-2z-t-w=0\end{cases}\right\}$ et $G=\{(a,a+2b,b-a,2a+b,a+b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.
   - *a.* Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}^5$. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^5$?
   - *b.* Montrer que $F=vect\big((-2,-6,0,1,1),(3,9,-1,-1,0),(1,4,-1,-1,1)\big)$
   - *c.* Pour quelles valeurs du réel x , $(2x,0,3,-3,x)\in G$?
   - *d.* Donner un système d'équations décrivant G (comme pour F).

Ex 10 dans $\mathfrak{F}(\boldsymbol{D},\mathbb{R})$

1. Soit E l'espace vectoriel des applications de [0,1] dans $\mathbb{R}$ continues sur [0,1] . Soit F l'ensemble des applications de [0,1] dans $\mathbb{R}$ constantes et $G=\left\{f\in C^0([0,1],\mathbb{R})/\int_0^1 f(t)dt=0\right\}$
   a. Justifier que F est une droite vectorielle.
   b. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de E supplémentaires dans E. Que peut -on alors dire de G ?
   c. Décomposer $(x\mapsto x^2\ln(1+x))$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .
2. Soit $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, $E=C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F=\{f\in E/f(0)=f'(0)=0\}$, G l'ensemble des applications affines et H l'ensemble des applications polynomiales de degré inférieur ou égal à n et $V=vect(ch,sh)$
   a. Montrer que F , G et H sont des ss-e-v de E tels que $F\oplus G=E$ et $F\oplus V=E$.
   b. Déterminer $f\in F\ et\ g\in G\ telles\ que\ exp=f+g$. Donner une expression intégrale à f.
   c. Déterminer une base de G et une base de H.
   d. Décrire $F\cap H\ et\ G\cap H$. Montrer que $(F\cap H)\oplus G=H$.

Ex 11 dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1. Soit $p\in\mathbb{N}\ et\ F=\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\forall n, u_{n+4}=u_n\}$ et $G=\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/u_3=u_2=u_1=u_0=0\}$.
   a. Montrer que $F\ et\ G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   b. Déterminer une base de F.
2. Soit $E=\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+3}=3u_{n+1}+2u_n\}$, $F=\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}+2u_{n+1}+u_n=0\}$ et G l'ensemble des suites géométriques de raison 2.
   a. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-e-v.
   b. Montrer que F est un plan vectoriel de E et G une droite vectorielle de E.
   c. Prouver que F et G sont supplémentaires dans E. En déduire une famille génératrice de E.
   d. Si l'on définissait une équation caractéristique de E , quelle serait-elle ? Quelles seraient ses solutions ? Est-ce cohérent avec le résultat de la question 3. et le cours sur les suites récurrentes d'ordre 2 ?

Ex 12 dans $\mathbb{R}[X]$ ou de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Soit $F=\{aX+bX^2/a,b\in\mathbb{R}\}$ et $G=\{P\in\mathbb{R}_3[X]/\tilde{P}(1)=\tilde{P}'(2)=0\}$.Montrer que $F\oplus G=\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit Q un polynôme réel fixé $non\ nul\ et\ de\ degré\ p$. Soit F l'ensemble des polynômes divisibles par Q . Montrer que F et $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ sont deux sous-e-v supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
3. $F=\{P\in\mathbb{R}[X]\ /\ \tilde{P}(1)=0\}$ et $G=\{aX/a\in\mathbb{R}\}$.
   a. Montrer que G est une droite vectorielle. .
   b. Montrer que $F\ et\ G$ sont supplémentaires dans E.
   c. Donner un sous espace vectoriel de E qui ne soit pas supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.
   d. Soit $n\in\mathbb{N}$. Donner une famille génératrice de $F\cap\mathbb{R}_n[X]$.
4. Soit $n\in\mathbb{N}\ et\ a_0,a_1,\ldots,a_n$ des réels tous distincts.
   a. Soit $i\in[\![0,n]\!]$.Déterminer l'unique polynôme $L_i\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k\in[\![0,n]\!]\backslash\{i\}, \widetilde{L_\iota}(a_k)=0$ et $\widetilde{L_\iota}(a_i)=1$.
   b. Montrer que $(L_0,\ldots,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner les composantes du polynôme constant 1 dans cette base.
   c. En déduire que $\varphi:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}^{n+1}$ définie par : $\varphi(P)=(\tilde{P}(a_0),\tilde{P}(a_1),\ldots,\tilde{P}(a_n))$ est bijective.
   d. On définit $F=\{f\in F(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ f\ polynomiale\ et\ \deg(f)\leq n\}$ et $G=\{f\in F(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ f(a_0)=f(a_1)=\ldots=f(a_n)=0\}$.Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ supplémentaires dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
5. Soit $n\in\mathbb{N}, n\geq 2\ et\ F=\{P\in\mathbb{R}[X]/P(X^2)=(X^2+1)P(X)\}$ et $G=\{P\in\mathbb{R}_n[X]/\tilde{P}(1)=\tilde{P}(0)\}$.
   a. Montrer que F est un ss—e-v de $\mathbb{R}[X]$ et en trouver une base de F.
   b. Montrer que $F\ et\ G$ sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}_n[X]$ supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.
   c. Trouver une base de G.
6. Parmi les ss-e suivants, lesquels sont des supplémentaires de l'espaces des polynômes pairs de $\mathbb{R}$[X] ?
   a. l'espace des polynômes de $\mathbb{R}$[X] impairs
   b. $\{P(X)+X^2/P\in\mathbb{R}[X]\ impair\}$
   c. $\{P\in\mathbb{R}[X]\ /P(1)=0\}$
   d. $Vect(X^{3n})_{n\in\mathbb{N}}$

Ex 13 dans $M_n(\mathbb{R})$.

1. $E=M_n(\mathbb{R}).Soit$ F l'ensemble des matrices de E de trace nulle.
   e. Démontrer que F et $vect(I_n)$ sont deux sous-e-v de $M_n(\mathbb{R})$ supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$.
   f. Trouver une base de F.
2. $A=\begin{pmatrix}-5&-3&6\\0&-2&0\\-3&-3&4\end{pmatrix}$.
   a. Montrer que le système (S_λ): $AX=\lambda X$est de Cramer sietssi $\lambda\notin\{-2,1\}$.
   b. Soit $H=Sol((S_1)\ et\ K=Sol((S_{-2})$. Montrer que $H\oplus K=M_{3,1}(\mathbb{R})$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / AM = O_3\}$ et $G = \{M \in F / AM = MA\}$.

a. Montrer F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$ et G est un ss-e-v de F.

b. Trouver une base de F et une base de G.

c. A est-elle inversible ? Les éléments de F sont-ils inversibles ?

d. Déterminer toutes les matrices M de F telles que $A + M$ est inversible.

e. Prouver que F et G sont stables par produit matriciel.

4. Soit $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / DM = MD\}$. Soit (e) l'équation $M^3 = D$ d' inconnue $M \in M_2(\mathbb{R})$.

a. Montrer que F est une ss-e-v de $M_2(\mathbb{R})$ et en trouver une base.

b. Monter que si M est solution de (e) alors $M \in F$. En déduire les solutions de (e).

III Familles libres, familles liées. Bases.

Ex 14 Liberté ou liaison d'une famille de fonctions

1. Soit , $f_0 = 2$, $f_1 : (x \mapsto \ln(3x))$, $f_2 : (x \mapsto \frac{1}{x})$, $f_3 : (x \mapsto \ln(9x))$, $f_4 : \left(x \mapsto \frac{1}{x^2+x}\right)$, $f_5 : \left(x \mapsto \frac{1}{x+1}\right)$, $f_6 : \left(x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}\right)$. Déterminer une base de vect$(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$, $f_1 = \sin$, $f_2 : (t \mapsto \sin(t + a))$ et $f_3 : (t \mapsto \cos(t + a))$. (f_1, f_2, f_3)est -elle libre ?

3. Soit $f_1 = \exp$, $f_2 : \left(t \mapsto \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) e^{-\frac{t}{2}}\right)$ et $f_3 : \left(t \mapsto \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) e^{-\frac{t}{2}}\right)$ et $G = vect(f_1, f_2, f_3)$.

a. Soit a , b , c trois réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ =0. Montrer que $a = b = c = 0$ par $deux$ $méthodes$.

  i. Prendre des valeurs de t et conclure.

  ii. Utiliser un développement limité de $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0 et conclure.

b. Quelle est $dim(G)$?

c. Soit $F = \{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f'' + f' + f = 0\}$.Montrer que $G = F \oplus vect(f_1)$.

d. Déterminer une base de vect(g_1, g_2, g_3, g_4) où

$g_1 : (t \to 3e^{-\frac{t}{2}}(sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) - 2cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right))$

$g_3 : (t \to e^{-\frac{t}{2}}(2sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + e^{3t/2})$

$g_2 : (t \to e^t - e^{-\frac{t}{2}}(sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right))$

$g_4 : (t \to e^{-\frac{t}{2}}(-sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + 3cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)) + 4e^t)$.

4. Montrer que ces familles sont libres

a. $\forall k \in \mathbb{N}$, on pose , $f_k : \left(x \to Arctan^k(x)\right)$.Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(f_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est libre .

b. $\forall k \in \mathbb{N}$, on pose $h_k : (x \to \cos(kx))$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(h_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est libre.

c. $\forall a \in I$, on pose $f_a : (x \to x^a)$. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels distincts Montrer que la famille $\left(f_{a_1}, f_{a_2}, \ldots, f_{a_n}\right)$ est libre dans $C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.

d. $\forall a \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_a : \left(x \to \sqrt{|x - a|}\right)$. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels distincts.
Montrer que la famille $\left(\varphi_{a_1}, \varphi_{a_2}, \ldots, \varphi_{a_n}\right)$ est libre dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

e. $\forall a \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_a : \left(x \to \begin{cases} 1 \ si \ x = a \\ 0 \ si \ x \neq a \end{cases}\right)$. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels distincts. Montrer que la famille $(\varphi_a)_{a \in I}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

f. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_k : (t \mapsto e^{kt})$ .Montrer que $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Ex 14 Famille de polynômes.

1. Etudier la liberté de la famille $(P_1, P_2, .., P_5)$ tel que $P_1 = 1 - 2X + X^3$, $P_2 = -2X - X^4$, $P_3 = X^2 - 2X^3 + 2X^4$, $P_4 = 3 + 2X - 3X^4$, $P_5 = 1 - X^2 - X^3 - X^4$.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2 tq$ $a \neq b$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $((X + a)^{n-k}(X + b)^k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est libre.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et pose pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $L_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X-k}{i-k}$. Montrer que la famille $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.Quelles sont les composantes du polynôme 1 puis de X dans cette base ?

4. Déterminer une $\mathbb{R}$-base du $\mathbb{R}$-e-v $\mathbb{C}_3[X]$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\deg(P) = n$. Justifier que $\left(P, P', .., P^{(n)}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Montrer que $(1. X. (X + 1). (X + 2) \ldots . (X + n - 1))_{n \in \mathbb{N}}$est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 15 Famille de suites.

1. Montrer que la famille de suites (u, v, w, z) est libre lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln^2(n + 1) , v_n = \sqrt{n}, w_n = (-1)^n, z_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

2. $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_k = (n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ (on note $v_k(n)$=n^k) . Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que , $\left(v_0, v_1, \ldots, v_m\right)$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3. Déterminer est une base du $\mathbb{C}$-e-v des suites complexes 4-périodiques.

4. Soit $u = (1,10,0,1,1,0,0,1,1,0,0, \ldots)$, $v = (0,1,0,-1,0,1,0,-1,0,1, \ldots \ldots)$, $w = (1,0,02,1,0,0,2,1,0,0,1,2,0 \ldots)$ et $t = (0,0,3,1,0,0,3,1,0,0, \ldots)$. Montrer que (u, v, w, t) est une base du $\mathbb{C}$-e-v des suites 4-périodiques.

Exercice 16 Dans un K-e-v E de dimension quelconque.

1. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $\mathscr{L} = (\vec{u}_i)_{i=1..n}$une famille libre de vecteur d'un K- espace vectoriel E .
   - **a.** Etudier la liberté de la famille $\mathscr{F}$ =$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, .., \vec{u}_{n-1} + \vec{u}_n, \vec{u}_1 + \vec{u}_n)$.
   - **b.** Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$Justifier que $vect(\vec{u}_1, .., \vec{u}_p)$ et $vect(\vec{u}_{p+1}, .., \vec{u}_n)$ sont en somme directe.
   - **c.** Soit F et G deux ss-e-v de E tels que : $F\oplus$G=E et $G = vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p)$.Soit $\vec{a} \in F$ et $G_a = vect(\vec{a} + \vec{u}_1, \vec{a}+\vec{u}_2, \ldots, \vec{a} + \vec{u}_p)$. Montrer que G_a et F sont supplémentaires dans E.
2. Justifier que G_a est de dimension finie et déterminer sa dimension.
3. Ici E est de dimension finie p, de base $\mathscr{B}$= $(\vec{e}_i)_{i=1..p}$. On pose : $\forall i \in [\![1, n-1]\!], \overrightarrow{\varepsilon_i} = \vec{e}_i - (\vec{e}_{i+1} + \vec{e}_{i+2} + .. + \vec{e}_p)$ et $\overrightarrow{\varepsilon_p} = \overrightarrow{e_p}$. Montrer que $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{\varepsilon_i})_{i=1..p}$est une base de E . Soit $\vec{x} \in E$. Exprimer les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{B}'$ en fonction les composantes de $\vec{x}$ dans B.