CORRIGE du TD 17
Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels.
Familles libres -génératrices -bases .

I Espaces vectoriels , famille génératrice

Exercice 0 « COURS »

1) Expliquer pourquoi un K-e-v contenant au moins un vecteur non nul contient une infinité de vecteurs.

Un tel espace vectoriel contient tous les vecteurs colinéaires à ce vecteur non nul ; cela constitue une infinité de vecteurs élément de cet $e.v$.

2) Quel est le seul $K-e-v$ contenant un nombre fini de vecteurs ?

$\{\vec{0}\}$ est le seul e.v contenant un nombre fini de vecteurs. Cet $e.v$ ne contient qu'un seul vecteur

3) Que démontre-t-on par double inclusion ? Et en pratique que fait-on ?

La double inclusion permet de prouver l'égalité entre deux ensembles F et G. En pratique , on considère un élément quelconque de F et on prouve que cet élément est dans G et inversement on considère un élément quelconque de G et on prouve que cet élément est dans F.

4) Soit F *et* G deux ss-e-v de E tel que F est engendré par $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$. Que suffit-il de faire pour prouver que $F \subset G$?

Il suffit de prouver que $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ sont éléments de G pour prouver que $F \subset G$.

5) Soit F *et* G deux ss-e-v de E. Laquelle des deux inclusions est toujours vraie $F \cap G \subset \{\vec{O_E}\}$ *ou* $\{\vec{O_E}\} \subset F \cap G$? Comment prouve-t-on l'autre lorsqu'elle est vraie ?Laquelle des deux inclusions est toujours vraie $F + G \subset E$ *ou* $E \subset F + G$? Comment prouve-t-on l'autre lorsqu'elle est vraie?

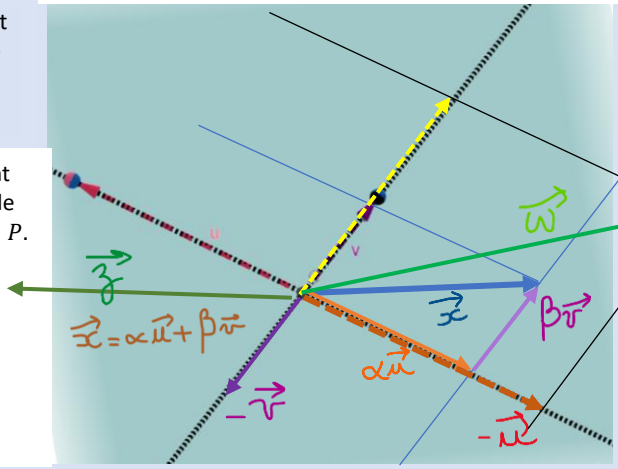
$\{\vec{O_E}\} \subset F \cap G$ et $F + G \subset E$ sont toujours vraies. Pour prouver les deux inclusion « réciproques » :
on prend un élément arbitraire de $F \cap G$ et on prouve que cet élément est nul
on prend un élément arbitraire de E et on prouve que cet élément s'écrit comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

6) A quelle condition sur les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ de E, la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ engendre-t-elle une droite vectorielle ? un plan vectoriel ? ni l'un, ni l'autre ?

Si $\vec{v}$ est non nul et $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ alors $(\vec{u}, \vec{v})$ engendre une droite vectorielle.
Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre alors $(\vec{u}, \vec{v})$ engendre un plan vectoriel.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont nuls alors $(\vec{u}, \vec{v})$ engendre $\{\vec{O_E}\}$.

7) Dans le plan géométrique P, on considère deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.Placer un vecteur $\vec{x}$ quelconque dans le plan. Décomposer $\vec{x}$ comme somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ et d'un vecteur colinéaire à $\vec{v}$. En déduire un supplémentaire de la droite $vect(\vec{u})$ dans P?

Comme tout vecteur de P s'écrit de manière unique come somme d'un élément colinéaire à $\vec{u}$ et d'un vecteur colinéaire à $\vec{v}$ i.e. comme somme d'un vecteur de $vect(\vec{u})$ et d'un vecteur de $vect(\vec{v})$. Cela signifie que $vect(\vec{u}) \oplus vect(\vec{v}) = P$. Ainsi, $vect(\vec{v})$ est un supplémentaire de $vect(\vec{u})$ dans P.

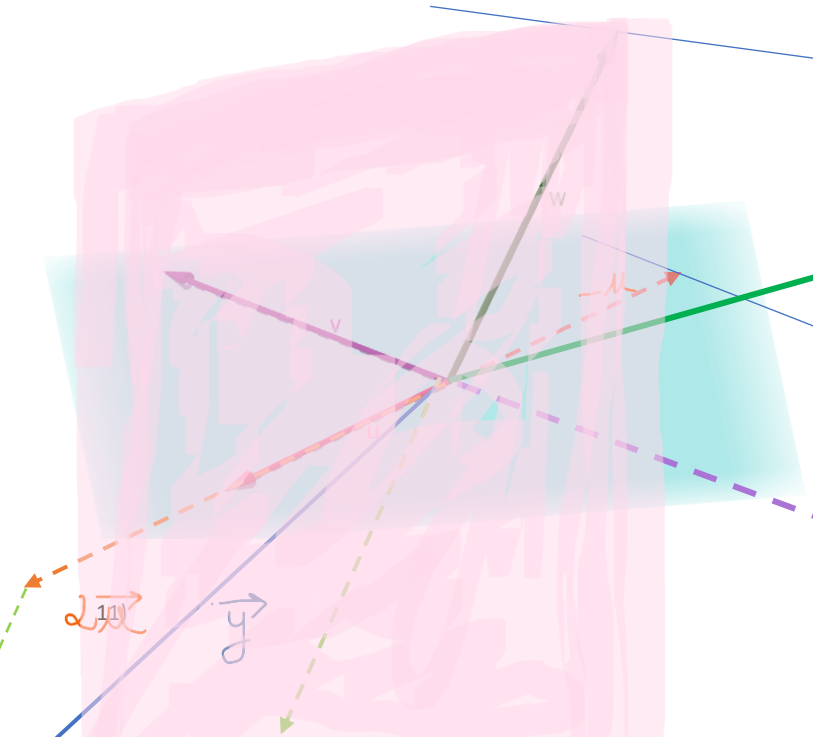


8) Quels sont les ss-e-v de P ?

Les ss-e-v de P ont pour dimension 0, 1 ou 2. De plus, si F est un ss-e-v de P de dimension $2 = dimP$, alors $F = P$. Ainsi, les ss-e-v de P sont $\{\vec{O_P}\}$, les droites vectorielles engendrées chacune par un vecteur non nul de P et P tout entier.

9) Représenter, dans P, les vecteurs $w = -u + 2v$ *et* $z = u - v$

10) Dans l'espace géométrique E, on considère deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ non coplanaires.



Placer un vecteur $\vec{x}$ quelconque dans E. Décomposer $\vec{x}$ comme somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ et d'un vecteur colinéaire à $\vec{v}$ d'un vecteur colinéaire à $\vec{w}$. En déduire un supplémentaire du plan $vect(\vec{u}, \vec{v})$ dans E?

11) Quels sont les ss-e-v de E ?

Ses ss-e-v sont de dimension 0,1,2 ou 3 et ceux de dimensions trois sont tous égaux à E. Donc les ss-e-v de E sont Ainsi, les ss-e-v de E sont $\{\vec{O_P}\}$, les droites vectorielles engendrées chacune par un vecteur non nul de E , les plans vectoriels engendrés chacun par deux vecteurs non colinéaires de E et E tout entier.

12) Représenter $x = -u - 2v + w$ *et* $y = 2u - w$ *et* $vect(2u - w, u + w)$.

$vect(2u - w, u + w) = vect(u, w)$

12) Décrire autrement $F = vect((1)_{n\in\mathbb{N}})$. Représenter F.
Expliquer pourquoi les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas colinéaires. Idem avec $(r_1{}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(r_2{}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où r_1 *et* r_2 sont des réels distincts. Décrire autrement $G = vect((r_1{}^n)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ (r_2{}^n)_{n\in\mathbb{N}})$ et $H = vect((1)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ (n)_{n\in\mathbb{N}})$

F est l'ensemble des suites constantes. F est une droite vectorielle, F est donc représentée par une droite passant par la suite nulle.

$(1)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ (n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas colinéaires car $a(1)_{n\in\mathbb{N}} + b(n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, a+bn=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0\ (n=0) \\ a+b=0\ (n=1)\end{cases} \Rightarrow a=b=0.$

$(r_1{}^n)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ (r_2{}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas colinéaires car $a(r_1{}^n)_{n\in\mathbb{N}} + b(r_2{}^n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, ar_1{}^n + br_2{}^n = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0\ (n=0) \\ ar_1+br_2=0\ (n=1)\end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} b=-a \\ a(r_1-r_2)=0 \end{cases} \underset{\substack{car \\ r_1\neq r_2}}{\Rightarrow} a=b=0.$

$G = vect((r_1{}^n)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ (r_2{}^n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{(ar_1{}^n + r_2{}^n)_{n\in\mathbb{N}}/a,b\in\mathbb{R}\} \underset{\substack{r_1\ et\ r_2 \\ racines\ de\ (e.c)}}{=} \{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2} - (r_1+r_2)\,u_{n+1} + r_1r_2u_n = 0\}$

$H = vect((1)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ (n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{(an+b)_{n\in\mathbb{N}}/a,b\in\mathbb{R}\} = \{((an+b)1^n)_{n\in\mathbb{N}}/a,b\in\mathbb{R}\} \underset{\substack{1\ racine \\ double\ de\ (e.c)}}{=} \{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2} - 2\,u_{n+1} + u_n = 0\}$

13) Décrire autrement $F = vect\big((x\mapsto e^{2x}),(x\mapsto e^{-x})\big)$. Expliquer pourquoi les fonctions $(x\mapsto e^{2x}),(x\mapsto e^{-x})$ ne sont pas colinéaires. Représenter F.

$F = \{(x\mapsto ae^{2x} + be^{-x})/a,b\in\mathbb{R}\} \underset{\substack{2\ et -1 \\ racines\ de\ (e.c)}}{=} \{f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})/f''-f'-2f=0\}$

$(x\mapsto e^{2x}),(x\mapsto e^{-x})$ ne sont pas colinéaires car $a(x\mapsto e^{2x}) + b(x\mapsto e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, ae^{2x} + be^{-x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0\ (n=0) \\ ae^2 + b\frac{1}{e} = 0\ (n=1)\end{cases} \Rightarrow a = b = 0.$ F est donc un plan vectoriel et est représenté par un plan passant par la fonction nulle.

14) Soit $P\ et\ Q$ deux polynômes. Comment savoir si $P\ et\ Q$ sont colinéaires ou non ? Même question avec deux matrices $A\ et\ B$ puis deux n-uplets $X\ et\ Y$, puis deux suites $u\ et\ v$ et enfin deux fonctions $f\ et\ g$.

- $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k\ et\ Q = \sum_{k=0}^{m} b_kX^k$.

$P\ et\ Q$ sont colinéaires sietssi $\exists\lambda\in\mathbb{R}/\forall k\in\mathbb{N}, a_k = \lambda b_k\ ou\ \forall k\in\mathbb{N}, b_k = \lambda a_k$
sietssi les coefficients de P sont proportionnels* aux coefficients de Q ou inversement

(*)avec toujours le même coeff. de proportionnalité

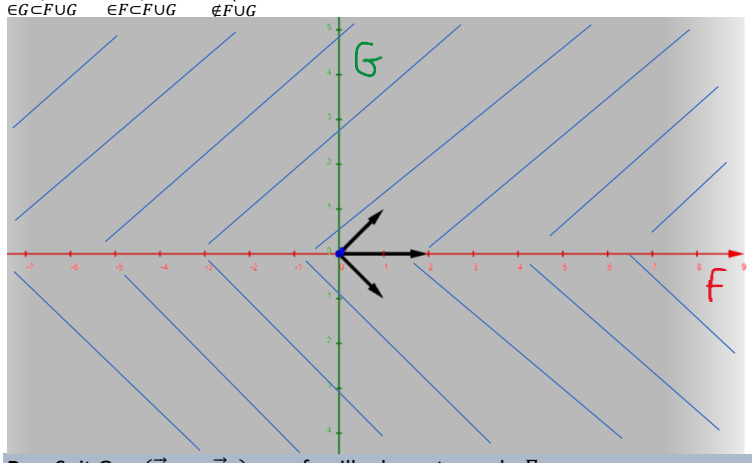
- deux matrices $A\ et\ B$ sont colinéaires sietssi les coefficients de A sont proportionnels* aux coefficients de B ou inversement.
- deux n-uplets $X\ et\ Y$ sont colinéaires sietssi les composantes de X sont proportionnels* aux composantes de Y ou inversement.
- deux suites $u\ et\ v$ sont colinéaires sietssi les termes de u sont proportionnels* aux termes de v ou inversement.
- deux fonctions $f\ et\ g$ sont colinéaires sietssi les images de f sont proportionnels* aux images de g ou inversement.

Ex 1 Espace vectoriel quelqconque

Soit $(E,+,.)$ un $K-e-v$.

A. Soit $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ deux ss-e-v d'un $\boldsymbol{K.e.v}$ $\boldsymbol{E}$ tq : $\boldsymbol{F\ et\ G}$ distincts de E et de $\{\overrightarrow{\boldsymbol{O_E}}\}$.
$\boldsymbol{E\backslash F}$ est – il un ss-e-v de $\boldsymbol{E}$? $\boldsymbol{E\backslash F \cup \{\overrightarrow{O_E}\}}$ est –il un ss-e-v de $\boldsymbol{E}$? $(\boldsymbol{F\cup G})$ est-il un ss-e-v de $\boldsymbol{E}$?

A. F étant un ss-e-v de E , F contient le vecteur nul donc $E\backslash F$ (l'ensemble des vecteurs de E qui ne sont pas dans F) ne contient pas la vecteur nul donc n'est pas un ss-e-v de E. Et même si on ajoute le vecteur nul à $E\backslash F$, l'ensemble $E\backslash F \cup \{\overrightarrow{O_E}\}$ n'est toujours spas un ss-e-v de E comme le prouve le contre-exemple suivant : prenons $E=\mathbb{R}^2, F = vect\big((1,0)\big). Alors\ \boldsymbol{E\backslash F \cup \{\overrightarrow{O_E}\}} = \{(x,y)/y\neq 0\}\cup\{(0,0)\}$ et $(1,1)\in \boldsymbol{E\backslash F}\cup\{(0,0)\}\ et$ $(1,-1)\in \boldsymbol{E\backslash F}\cup\{(0,0)\}$ mais $(2,0) = (1,1)+(1,-1)\in F donc\ (2,0)\notin \boldsymbol{E\backslash F}\cup\{(0,0)\}$. J'en déduis que $\boldsymbol{E\backslash F}\cup\{(0,0)\}$ n'est pas stable par addition donc n'est pas un ss-e-v de E.
$(F\cup G)$ n'est pas un ss-e-v de E comme le prouve le contre-exemple suivant : reprenons $E=\mathbb{R}^2, F = vect\big((1,0)\big)\ puis\ G = vect\big((0,1)\big)$. Alors $\underbrace{(0,1)}_{\in G\subset F\cup G} + \underbrace{(1,0)}_{\in F\subset F\cup G} = \underbrace{(1,1)}_{\notin F\cup G}$. Donc $F\cup G$ n'est pas stable par addition et n'est donc pas un ss-e-v de E.



B. Soit G $= (\vec{u}_1,..,\vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E.

a. Soit F un ss-e-v de E contenant $\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p$. Quelle propriété fondamentale de F permet d'affirmer que $vect(\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p)\subset G$?

b. Soit $F=\{\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+..+\alpha_p\vec{u}_p/(\alpha_1,..,\alpha_p)\in K^p\}\ et$ G $= \{\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+..+\alpha_p\vec{u}_p/(\alpha_1,..,\alpha_p)\in K^p\ et\ \alpha_1+..+\alpha_p = 0\}$. Lequel de ces deux ensembles F ou G est $vect(\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p)$? Justifier.

c. Montrer que $F\ et\ G$ sont deux ss-e-v de E et en donner des familles génératrices.

d. Donner une écriture de $\vec{u}_2$ puis de $\vec{O}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p$. Ces écritures sont-elles uniques ? A quelle condition sur G cette écriture est-elle unique ?

e. Compléter que $vect(\vec{u}_1,..,\vec{u}_p,\vec{w}) = vect(\vec{u}_1,..,\vec{u}_p)\ \ sietssi\ \ \vec{w}$ ... ...

f. Déterminer plusieurs familles génératrices de F et de G.

a. F est stable par combinaison linéaire.

b. $F = vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, .., \vec{u}_p)$ car la condition « $\alpha_1 + .. + \alpha_p = 0$ » nous infirme de G ne contient pas toutes les combinaisons linéaires de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, .., \vec{u}_p$ alors que F, qui n'impose aucune condition sur $\alpha_1, .., \alpha_p$ les contient toutes. $G \subset F$.

c. $F = vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, .., \vec{u}_p)$ est d'après le cours un ss-e-v de E et $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, .., \vec{u}_p)$ est une famille génératrice de F. Montrons que G en est un aussi :
$\forall (\alpha_1, .., \alpha_p) \in K^p, \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + .. + \alpha_p\vec{u}_p \in E$ donc $G \subset E$.
Prenons $(\alpha_1, .., \alpha_p) = (0, \dots, 0)$. Alors $\alpha_1 + .. + \alpha_p = 0$. Donc $\vec{O} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + .. + \alpha_p\vec{u}_p \in G$.
Soit $\vec{v}, \vec{w}$ deux éléments de G et a et b deux scalaires.
Posons $\vec{v} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + .. + \alpha_p\vec{u}_p$ tel que $\alpha_1 + .. + \alpha_p = 0$ et $\vec{w} = \beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + .. + \beta_p\vec{u}_p$ tel que $\beta_1 + .. + \beta_p = 0$.
Alors $a\vec{v} + b\vec{w} = a(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + .. + \alpha_p\vec{u}_p) + b(\beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + .. + \beta_p\vec{u}_p) = (a\alpha_1 + b\beta_1)\vec{u}_1 + (a\alpha_2 + b\beta_2)\vec{u}_2 + .. + (a\alpha_p + b\beta_p)\vec{u}_p$ et
$(a\alpha_1 + b\beta_1) + (a\alpha_2 + b\beta_2) + \cdots + (a\alpha_p + b\beta_p) = a(\underbrace{\alpha_1 + .. + \alpha_p}_{=0 \text{ car } \vec{v} \in G}) + b(\underbrace{\beta_1 + .. + \beta_p}_{=0 \text{ car } \vec{w} \in G}) = 0$. Donc $a\vec{v} + b\vec{w} \in G$.
J'en conclus que G est un $ss - e - v$ de E. Comme de plus $G \subset F$, G est un ss-e-v de F.Cherchons une famille génératrice de G .
$G = \{\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + .. + \alpha_p\vec{u}_p / (\alpha_1, .., \alpha_p) \in K^p \text{ et } \alpha_1 = -\alpha_2 - \dots - \alpha_{p-1}\}$
$G = \{(-\alpha_2 - \dots - \alpha_{p-1})\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + .. + \alpha_p\vec{u}_p / (\alpha_2, .., \alpha_p) \in K^{p-1}\}$
$G = \{\alpha_2(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) + .. + \alpha_p(\vec{u}_p - \vec{u}_1) / (\alpha_2, .., \alpha_p) \in K^{p-1}\} = vect(\vec{u}_2 - \vec{u}_1, \vec{u}_3 - \vec{u}_1, .., \vec{u}_p - \vec{u}_1)$.
Donc, $(\vec{u}_2 - \vec{u}_1, \vec{u}_3 - \vec{u}_1, .., \vec{u}_p - \vec{u}_1)$ est une famille génératrice de G.

d. $\vec{u}_2 = 0\vec{u}_1 + 1\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3 + .. + 0\vec{u}_p$ et $\vec{O} = 0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3 + .. + 0\vec{u}_p$. Ces écritures ne sont a priori pas uniques . Si G était libre alors ces écritures seraient obligatoirement uniques.

e. $vect(\vec{u}_1, .., \vec{u}_p, \vec{w}) = vect(\vec{u}_1, .., \vec{u}_p)$ $sietssi$ $\vec{w}$ est une combinaison liénaire de $\vec{u}_1, .., \vec{u}_p$.

f. $F = vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, .., \vec{u}_p) = vect(\vec{u}_1 + 6\vec{u}_2, \vec{u}_2, .., \vec{u}_p) = vect(\vec{u}_1 + 6\vec{u}_2, \vec{u}_2, .., -4\vec{u}_p) = vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, .., \vec{u}_p, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + .. + \vec{u}_p)$=(...)

Ex 2 vect(...)

1. Montrer que $vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right) = vect\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.
2. Soit $P(X) = 1 + 2X + X^2$, $Q(X) = 2 - X - 2X^2$ et $R(X) = -1 + 2X + kX^2$ .Déterminer les réels k tels que : $vect(P, Q) = vect(P, Q, R)$.

1. Par équation :

$$vect\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} / \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / 2y - x = z\right\}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}a - b = x\\2a = y\\3a + b = z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = \frac{y}{2} - x\\2a = y\\2y - x = z\end{cases}.$$

De même, $vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / 2y - x = z\right\}$. D'où l'égalité souhaitée.

OU Bien par double inclusion

$\boldsymbol{vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right) \subset vect\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} et \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}}$ sont éléments de $\boldsymbol{vect\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} et \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}}$ sont des c.l. de $\boldsymbol{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} et \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}$.

Or, $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{U} = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{X} - \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{Y}\right]$ et $\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}}_{V} = \frac{3}{2}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{X} - \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{Y}$. Donc, $vect(U,V) \subset vect(X,Y)$.
On a $U = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y$ et $V = \frac{3}{2}X - \frac{1}{2}Y$ donc $V - U = X$ et $V - 3U = Y$. Donc $X \in vect(U,V)$ et $Y \in vect(U,V)$ et finalement $vect(X,Y) \subset vect(U,V)$.
Ainsi, $vect(U,V) = vect(X,Y)$.

OU Bien par inclusion+dimension

Posons $F = vect(U,V)$ et $G = vect(X,Y)$.
U, V ne sont pas colinéaires donc $dimF = 2$. De même $dimG = 2$. De plus, $U = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y$ et $V = \frac{3}{2}X - \frac{1}{2}Y$ donc $U \in G$ et $V \in G$. Et par suite, $F \subset G$ puisque G est stable par combinaison linéaire. Alors F et un ss-e-v de G . Comme $dimF = dimG$, j'en conclus que $F = G$.

2. Soit $\boldsymbol{P(X) = 1 + 2X + X^2}$, $\boldsymbol{Q(X) = 2 - X - 2X^2}$ et $\boldsymbol{R(X) = -1 + 2X + kX^2}$.

$$vect(P,Q) = vect(P,Q,R) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ l'autre\\ inclusion\ est\\ toujorus\ vraie}} vect(P,Q,R) \subset vect(P,Q) \Leftrightarrow R \in vect(P,Q) \Leftrightarrow R \text{ est c.l. de } P \text{ et } Q$$

$\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / R = aP + bQ \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / -1 + 2X + kX^2 = a(1 + 2X + X^2) + b(2 - X - 2X^2)$
$\Leftrightarrow$le système (S): $\begin{cases}-1 = a + 2b\\2 = 2a - b\\k = a - 2b\end{cases}$ d'inconnue $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ est compatible.

Or, (S): $\begin{cases}a + 2b = -1\\2a - b = 2\\a - 2b = k\end{cases} \Leftrightarrow (S)$: $\begin{cases}2a = k - 1\\-b = 2 + 1 - k\\a - 2b = k\end{cases} \Leftrightarrow (S)$: $\begin{cases}a = \frac{1}{2}(k-1)\\b = k - 3\\\frac{1}{2}(k-1) - 2(k-3) = k\end{cases} \Leftrightarrow (S)$: $\begin{cases}a = \frac{1}{2}(k-1)\\b = k - 3\\k = \frac{11}{5}\end{cases}$.

Donc (S) est compatible $\Leftrightarrow k = \frac{11}{5}$. Ainsi, $vect(P,Q) = vect(P,Q,R) \Leftrightarrow k = \frac{11}{5}$.

Ex 3 Ensembles de fonctions

Les ensembles $\boldsymbol{F}$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels d'un e-v de référence (à préciser) OUI ou NON? Dans les cas (*), chercher une famille génératrice puis une base et la dimension de $\boldsymbol{F}$. On précisera quand $\boldsymbol{F}$ est un plan ou une droite vectoriel(le).

a. F est l'ensemble des applications de [0,1] dans $\mathbb{R}$ continues et d'intégrale sur [0,1] nulle. OUI F ss-e-v du $\mathbb{R}$-e-v $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$

b. F est l'ensemble des fonctions réelles et constantes. (*) OUI $F = vect((x \mapsto 1))$ ss-e-v du $\mathbb{R}$-e-v $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$

c. F est l'ensemble des solutions de : $y' = xy + 1$ .NON car la fonction nulle $(x \mapsto 0)$ *élément neutre de* $D^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas dans F.

d. F est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ positives(. NON car F n'est pas stable par multplication externe , en effet $f : (x \mapsto 1) \in F$ mais $-2f \notin F$.

e. F est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ croissantes. NON car F n'est pas stable par multplication externe , en effet $f : (x \mapsto 1) \in F$ mais $-f \notin F$.

f. F est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ impaire. OUI F ss-e-v du $\mathbb{R}$-e-v $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$

g.

h. $F = \{f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) / f'' = (1+2i)f' - 2if\ .\}$ (*) OUI $F = vect_{\mathbb{C}}((x \mapsto e^x),(x \mapsto e^{2ix}))$ ss-e-v du $\mathbb{C}$-e-v $C^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$

i. Soit L un réel fixé. *F est l'ensemble* des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de limite L en $+\infty$. OUI *si* $L = 0$
NON *si* $L \neq 0$ car F n'est pas stable par multiplication externe, en effet $f : (x \mapsto L) \in F$ mais $-2f \notin F$ (*car* $\lim\limits_{+\infty} -2f = -2L \neq L$ *puisque* $L \neq 0$).

j. $F = \{(x \mapsto (ax^2+bx+c)\cos(x)) / a,b,c \text{ réels}\}$ (*).OUI $F = vect_{\mathbb{R}}((x \mapsto x^2\cos(x)),(x \mapsto x\cos(x)),(x \mapsto \cos(x)))$ ss-e-v du $\mathbb{R}$-e-v $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

k. $F = \{\left(x \mapsto \tilde{P}(x)ch(x) + \tilde{Q}(x)sh(x)\right) / (P\ ,Q) \in \mathbb{R}_2[X]\}$ (*).OUI $F = vect_{\mathbb{R}}((x \mapsto x^2\,\mathrm{ch}(x)),(x \mapsto x\,\mathrm{ch}(x)),(x \mapsto \mathrm{ch}(x)),(x \mapsto x^2\,\mathrm{sh}(x)),(x \mapsto x\,\mathrm{sh}(x)),(x \mapsto \mathrm{sh}(x)))$ ss-e-v du $\mathbb{R}$-e-v $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

l. $F = \{f \in C^1([-1,0],\mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}, (x^3-1)f'(x) = xf(x)\}$ (*).(*).
OUI $F = vect_{\mathbb{R}}(\left(x \mapsto \mathrm{e}^{-A(x)}\right)$ss-e-v du $\mathbb{R}$-e-v $C^1([-1,0],\mathbb{R})$ où A est une primitive de a: $\left(x \mapsto \frac{x}{x^3-1}\right)$ sur $[-1,0]$.
Or,$a(x) = \frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} \underbrace{=}_{\substack{décomposition \\ en\ éléments\ simples}} \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{3}\frac{-x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$

$\int_{\cdot}^{x} \frac{1}{t^2+t+1}dt = \int_{\cdot}^{x} \frac{1}{t^2+t+1}dt = \int_{\cdot}^{x} \frac{1}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}dt \underbrace{=}_{u=\frac{2t+1}{\sqrt{3}}} \frac{4}{3}\int_{\cdot}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{[u^2+1]}\frac{\sqrt{3}}{2}du = \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + cste.$

Prenons $A(x) = \frac{1}{3}ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$. Alors, $\mathrm{e}^{-A(x)} = e^{-\frac{1}{3}ln|x-1|+\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\sqrt[6]{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{|x-1|}}e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}$.

m. Soit $F = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \exists(a,b,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = acos(x-\alpha) + bcos(x-\beta)\}$ (*)
OUI $F = vect_{\mathbb{R}}((x \mapsto \cos(x)),(x \mapsto \sin(x)))$ ss-e-v du $\mathbb{R}$-e-v $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$
En effet on montre tout d'abord que F est un ss-e-v de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$:
$F \subset C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car toute fonction de la forme $\left(x \mapsto acos(x-\alpha) + bcos(x-\beta)\right)$ est $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ puisque son expression n'est constituée que de fonctions $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$.
En prenant $a = b = 0$, on trouve que la fonction nulle est élément de F.
Soit $f_1 : \left(x \mapsto a_1cos(x-\alpha_1) + b_1cos(x-\beta_1)\right)$ *et* $f_2 : \left(x \mapsto a_2cos(x-\alpha_2) + b_2cos(x-\beta_2)\right)$ deux éléments de F et u_1 *et* u_2 deux réels.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_1f_1(x) + u_2f_2(x) = u_1a_1cos(x-\alpha_1) + u_1b_1cos(x-\beta_1) + u_2a_2cos(x-\alpha_2) + u_2b_2cos(x-\beta_2)$
$= [u_1a_1\cos(\alpha_1) + u_1b_1\cos(\beta_1) + u_2a_2\cos(\alpha_2) + u_2b_2\cos(\beta_2)]\cos(x) + [u_1a_1\sin(\alpha_1) + u_1b_1\sin(\beta_1) + u_2a_2\sin(\alpha_2) + u_2b_2\sin(\beta_2)]\sin(x)$
$= Acos(x) + Bsin(x) = C\cos(x-\varphi) + 0\cos(x-0)$ où $C = \sqrt{A^2+B^2}$ *et* $\begin{cases}\cos(\varphi) = \frac{A}{C} \\ \sin(\varphi) = \frac{B}{C}\end{cases}$. Donc $u_1f_1 + u_2f_2 \in F$.
Ainsi F est un ss-e-v de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
De plus d'après ce qui précède tout élément de F s'écrit sous la forme $\left(x \mapsto Acos(x) + Bsin(x)\right)$. Donc $F \subset vect(cos,sin)$. Et,
$cos : \left(x \mapsto 1cos(x-0) + 0cos(x-0)\right)$ et $sin : \left(x \mapsto 1cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + 0cos(x-0)\right)$ sont élément de F. Comme F est stabe par combinaison linéaire, $vect(cos,sin) \subset F$. Ainsi, $vect(cos,sin) = F$.

n. Soit φ une application de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *F est l'ensemble* des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ négligeables devant φ au voisinage de 0. OUI F ss-e-v du $\mathbb{R}$-e-v $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$;

o. $F = \{f \in C^0([-1,1],\mathbb{R}) / f_{|[-1,0]}$ *et* $f_{|[0,1]}$ sont affines $\}$ (*).OUI F ss-e-v du $\mathbb{R}$-e-v $C^0([-1,1],\mathbb{R})$.
$F = \{f \in F([-1,1],\mathbb{R}) / \exists(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in [-1,0], f(x) = ax+b$ *et* $\forall x \in [0,1], f(x) = cx+d$ *et* f *continue*$\}$
$F = \{f \in F([-1,1],\mathbb{R}) / \exists(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in [-1,0], f(x) = ax+b$ *et* $\forall x \in [0,1], f(x) = cx+d$ *et* f *continue en* $0\}$
$F = \{f \in F([-1,1],\mathbb{R}) / \exists(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in [-1,0], f(x) = ax+b$ *et* $\forall x \in [0,1], f(x) = cx+d$ *et* $b = d\}$
$F = \{f \in F([-1,1],\mathbb{R}) / \exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in [-1,0], f(x) = ax+b$ *et* $\forall x \in [0,1], f(x) = cx+b\}$
$F = \{f : \left(x \mapsto \begin{cases} ax+b\ si\ x \in [-1,0] \\ cx+b\ si\ x \in [0,1]\end{cases}\right) / a,b,c\ réels\} = \{a\left(x \mapsto \begin{cases} x\ si\ x \in [-1,0] \\ 0\ si\ x \in [0,1]\end{cases}\right) + b(x \mapsto 1) + c\left(x \mapsto \begin{cases} 0\ si\ x \in [-1,0] \\ x\ si\ x \in [0,1]\end{cases}\right) / a,b,c\ réels\}$.
$F = vect(u,v,w)$ où $u : \left(x \mapsto \begin{cases} x\ si\ x \in [-1,0] \\ 0\ si\ x \in [0,1]\end{cases}\right), v : (x \mapsto 1), w : \left(x \mapsto \begin{cases} 0\ si\ x \in [-1,0] \\ x\ si\ x \in [0,1]\end{cases}\right)$

Ex 4 Ensembles de n-uplets

Les ensembles $\boldsymbol{F}$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels d'un e-v de référence à préciser ? Dans les cas (*), chercher une famille génératrice puis une base et la dimension de $\boldsymbol{F}$. On précisera quand $\boldsymbol{F}$ est un plan ou une droite vectoriel(le).

a. $F = \{x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *et* $xz = y\}$
NON F n'est pas un s-e-v de $\mathbb{R}^3$car F n'est pas stable par multiplication externe : $(1,1,1) \in F$ *mais* $2(1,1,1) = (2,2,2) \notin F$

b. $F = \{(x,y,z,t,w) \in \mathbb{R}^5 / \begin{cases} 2x+y+3z+t-2w = 0 \\ 3x-y+z+2t+w = 0 \\ 5x-2y-z+t+3w = 0\end{cases}\}$.(*)

OUI F est un ss-e-v de $\mathbb{R}^5$ et $F = vect\left(\left(1,\frac{19}{3},-4,\frac{11}{3},0\right),\left(0,\frac{5}{3},0,\frac{1}{3},1\right)\right)$.

Car $\begin{cases}2x+y+3z+t-2w=0\\3x-y+z+2t+w=0\\5x-2y-z+t+3w=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y+3z+t-2w=0\\-x-3y-5z+5w=0\\3x-3y-4z+5w=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y+3z+t-2w=0\\-x-3y-5z+5w=0\\4x+z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\frac{1}{3}w+\frac{11}{3}x\\y=\frac{1}{3}(19x+5w)\\z=-4x\end{cases}$

c. Soit $n \geq 3$ *et* $F = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^n kx_k = \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$ (*)

OUI F est un ss-e-v de $\mathbb{R}^5$ et $F = vect\left(\left(\left((k-2),(1-k),0,\dots,\underbrace{1}_{k\text{ème composantes}},0,\dots,0\right)\right)_{k=3..n}\right)$.

Car $\sum_{k=1}^n kx_k = \sum_{k=1}^n x_k = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sum_{k=1}^n kx_k = 0\\ \sum_{k=1}^n x_k = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sum_{k=1}^n kx_k = 0\\ \sum_{k=2}^n (k-1)x_k = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = -2x_2 - \sum_{k=3}^n kx_k\\ x_2 = \sum_{k=3}^n (1-k)x_k\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}x_1 = -2\sum_{k=3}^n (1-k)x_k - \sum_{k=3}^n kx_k = \sum_{k=3}^n (k-2)x_k\\ x_2 = \sum_{k=3}^n (1-k)x_k\end{cases}$.

Donc $F = \{(\sum_{k=3}^n (k-2)x_k, \sum_{k=3}^n (1-k)x_k, x_3, x_4, \dots, x_n)/(x_3, x_4, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-2}\}$

$$F = \left\{\sum_{k=3}^n x_k\left((k-2),(1-k),0,\dots,\underbrace{1}_{k\text{ème composantes}},0,\dots,0\right)/(x_3,x_4,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-2}\right\}$$

d. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/(x-y)^2 = (x+y)^2\}$.

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/xy = 0\} = \{(0,y,z),(y,0,z)/y,z\ réels\}$.

NON F n'est pas un ss-e-v de $\mathbb{R}^3$ car F n'est pas stable par addition : $(0,1,1) \in F\ et\ (1,0,1) \in F\ mais\ (0,1,1) + (1,0,1) = (1,1,2) \notin F$.

Ex 5 Ensembles de vecteurs de l'espace géométrique E

Les ensembles $\boldsymbol{F}$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels d'un e-v de référence à préciser ? Dans les cas (*), chercher une famille génératrice puis une base et la dimension de $\boldsymbol{F}$. On précisera quand $\boldsymbol{F}$ est un plan ou une droite vectoriel(le).

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}) \in E^2$.

a. $F = \{\vec{u} \in E/\exists(\mu,\gamma) \in \mathbb{R}^2; \vec{u} = \mu\vec{\imath} + \gamma\vec{\jmath}\}$ (*)

b. $F = \{a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}\ /(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 et\ a+b+c=0\}$(*)

c. $Soit\ a\ un\ réel\ fixé. F = \{\vec{u} \in E/\ \underbrace{\vec{u}.\vec{\imath}}_{produit\ scalaire} = a\}$.

Ex 6 Ensembles de suites

Les ensembles $\boldsymbol{F}$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels d'un e-v de référence à préciser ? Dans les cas (*), chercher une famille génératrice puis une base et la dimension de $\boldsymbol{F}$. On précisera quand $\boldsymbol{F}$ est un plan ou une droite vectoriel(le).

a. F est l'ensemble des suites complexes vérifiant : $\forall n, u_{n+3} = u_n$.(*)

b. $Soit\ a\ un\ réel\ fixé. F$ est l'ensemble des suites réelles vérifiant : $\forall n, u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = a$.(*)

c. F est l'ensemble des suites vérifiant : $\forall n, u_{n+1} = {u_n}^2$.

d. Soit r un complexe non nul fixé. F est l'ensemble des suites arithmétiques de raison r .

e. F est l'ensemble des suites complexes et bornées.

f. Soit u une suite réelle fixée. F est l'ensemble des suites équivalentes à u.

Ex 7 Ensembles de polynômes

Les ensembles F suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels d'un e-v de référence à préciser ? Dans les cas (*), chercher une famille génératrice puis une base et la dimension de F. On précisera quand F est un plan ou une droite vectoriel(le).Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Fest l'ensemble des polynômes de degré 4.

NON car F ne contient pas le polynôme nul.

b. $F = \{P \in \mathbb{R}[X]/(X^2+1)P'' - 6P = 0\}$.(*)

OUI F est un ss-e-v de $\mathbb{R}[X]$ et $F = vect\left(\underbrace{X+X^3}_{\substack{libre\ car\ X+X^3 n'est\ pas\\ le\ polynôme\ nul\\ en\ degré\ donc\ dimF=1.}}\right)$. En effet, décrivons autrement les éléments de F pour trouver une famille génératrice de F.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Si $\deg(P) \leq 1$ alors $P'' = 0\ donc\ (X^2+1)P'' = 6P \Rightarrow P = 0$.

Si $\deg(P) \geq 2$ alors $(X^2+1)P'' = 6P \Rightarrow \begin{cases}\deg[(X^2+1)P''] = \deg[6P]\\ codom[(X^2+1)P''] = codom[6P]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2+(d-2) = d\\ d(d-1)a_d = 6a_d\end{cases} \Rightarrow (d^2-d-6)a_d = 0 \Rightarrow d = 3$.

Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3$.

$(X^2+1)P'' = 6P \Leftrightarrow (X^2+1)(6dX+2c) = 6(a+bX+cX^2+dX^3) \Leftrightarrow 2c + 6dX + 2cX^2 + 6dX^3 = 6a + 6bX + 6cX^2 + 6dX^3$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2c = 6a\\ 6d = 6b\\ 2c = 6c\\ 6d = 6d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c = a = 0\\ b = d\end{cases}$. Donc, $F = \{dX + dX^3/d \in \mathbb{R}\} = vect(X+X^3)$.

a. Fest l'ensemble des polynômes constants. (*)

OUI F est un ss-e-v de $\mathbb{R}[X]$ et $F = vect\left(\underbrace{1}_{\substack{libre\ car\ 1\ n'est\ pas\\ le\ polynôme\ nul\\ en\ degré\ donc\ dimF=1.}}\right)$.

b. $F = \{P \in \mathbb{R}[X]/P(1) = P''(1) = 1\}$.

NON car F ne contient pas le polynôme nul.

c. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]/\int_0^1 \tilde{P}(t)dt = 0\}$.(*)

OU I F est un ss-e-v de $\mathbb{R}_n[X]$ et $F = vect\left(\underbrace{\left(X-\frac{1}{2}\right),\left(X^2-\frac{1}{3}\right),..,\left(X^n-\frac{1}{n+1}\right)}_{\substack{libre\ car\\ échelonnée\ en\ degré\ donc\ dimF=n.}}\right) = vect\left(\left(X^k-\frac{1}{k+1}\right)\right)_{k=1..n}$. En effet, En effet, décrivons autrement les éléments de F pour trouver une famille génératrice de F.

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$

$\int_0^1 \tilde{P}(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \sum_{k=0}^n a_k t^k\, dt = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{par\ linéarité\\ de\ l'opérateur\\ intégral}} \sum_{k=0}^n a_k(\int_0^1 t^k\, dt) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{k+1} = 0 \Leftrightarrow a_0 = -\sum_{k=1}^n a_k \frac{1}{k+1}$. Donc

$$F = \{\sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]/a_0 = -\sum_{k=1}^n a_k \frac{1}{k+1}\} = \{-\sum_{k=1}^n a_k \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^n a_k X^k /a_1,..,a_n\ réels\}$$
$$= \{\sum_{k=1}^n a_k\left(X^k - \frac{1}{k+1}\right)/a_1,..,a_n\ réels\} = vect\left(\left(X^k-\frac{1}{k+1}\right)\right)_{k=1..n}$$

a. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]/P(1) = P'(1)\}$.

OU I F est un ss-e-v de $\mathbb{R}_n[X]$ et et $F = vect\left(\underbrace{X,(X-1)^2,(X-1)^3,\dots,(X-1)^n}_{\substack{libre\ car\\ échelonnée\ en\ degré\ donc\ dimF=n.}}\right) = vect(X,(X-1)^k)_{k=2..n}$). En effet, En effet, décrivons autrement les éléments de F pour trouver une famille génératrice de F.

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k(X-1)^k \in \mathbb{R}_n[X]$. **Ici je choisis d'écrire P dans la base de Taylor en 1.**

$P(1) = P'(1) \Leftrightarrow a_0 = a_1$.

Donc $F = \{\sum_{k=0}^n a_k(X-1)^k \in \mathbb{R}_n[X]/a_0 = a_1\}$

$$F = \{a_0 + a_0(X-1)^1 + a_2(X-1)^2 + a_3(X-1)^3 + \cdots + a_n(X-1)^n/a_0,a_2,a_3,a_4,\dots,a_n\ réels\}$$
$$F = \{a_0(1+X-1)^1 + a_2(X-1)^2 + a_3(X-1)^3 + \cdots + a_n(X-1)^n/a_0,a_2,a_3,a_4,\dots,a_n\ réels\}$$

b. $E = \{P \in \mathbb{R}_5[X]/\tilde{P}(1) = \tilde{P}(3) = \tilde{P}'(3) = 0\}$(*)

OUI F est un ss-e-v de $\mathbb{R}_5[X]$ et et $F = vect\left(\underbrace{2(X-3)^2 + (X-3)^3, (X-3)^4 - 4(X-3)^2, (X-3)^5 + 8(X-3)^2}_{libre\ car\ échelonnée\ en\ degré\ donc\ base\ de\ F\ et\ dimF=3}\right)$. En effet,

Soit $P = a + b(X-3) + c(X-3)^2 + d(X-3)^3 + e(X-3)^4 + f(X-3)^5 \in \mathbb{R}_5[X]$. **Ici je choisis d'écrire P dans la base de Taylor en 3.**

$\tilde{P}(1) = \tilde{P}(3) = \tilde{P}'(3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + 4c - 8d + 16e - 32f = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4c - 8d + 16e - 32f = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2d - 4e + 8f \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$. Donc,

$E = \{a + b(X-3) + c(X-3)^2 + d(X-3)^3 + e(X-3)^4 + f(X-3)^5 \in \mathbb{R}_5[X]\ /\ \begin{cases} c = 2d - 4e + 8f \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases}\}$

$E = \{(2d - 4e + 8f)(X-3)^2 + d(X-3)^3 + e(X-3)^4 + f(X-3)^5 \in \mathbb{R}_5[X]\ /d,e,f\ réels\}$

$E = \{d[2(X-3)^2 + (X-3)^3] + e[(X-3)^4 - 4(X-3)^2] + f[(X-3)^5 + 8(X-3)^2] \in \mathbb{R}_5[X]\ /d,e,f\ réels\}$

c. $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X]/\tilde{P}(1) = \tilde{P}'(3)\ et\ \tilde{P}'(1) = \tilde{P}(3)\}$(*)

OUI F est un ss-e-v de $\mathbb{R}_n[X]$ et et $F = vect\left(\underbrace{(26 - X + X^3), \left(5 - \frac{11}{2}X + X^2\right), (X^k(X-1)^2(X-3)^2)_{k=0..(n-4)}}_{libre\ car\ échelonnée\ en\ degré\ donc\ base\ de\ F\ et\ dimF=n-1}\right)$. En effet,

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Posons $H = (X-1)^2(X-3)^2$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe deux uniques polynômes Q et R tels que : $P = HQ + R\ et\ \deg(R) < \deg(H) = 4$. Donc $R(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$.

Alors, $P(X) = \underbrace{(X-1)^2(X-3)^2\ Q(X)}_{=T(X)} + a + bX + cX^2 + dX^3$.

T admet 1 et 3 comme racines au moins double donc $\tilde{T}(1) = \tilde{T}'(1) = \tilde{T}(3) = \tilde{T}'(3) = 0$. Alors, $\begin{cases} \tilde{P}(1) = a + b + c + d \\ \tilde{P}'(1) = b + 2c + 3d \\ \tilde{P}(3) = a + 3b + 9c + 27d \\ \tilde{P}'(3) = b + 6c + 27d \end{cases}$.

Donc, $\tilde{P}(1) = \tilde{P}'(3)\ \ et\ \tilde{P}'(1) = \tilde{P}(3) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = b + 6c + 27d \\ b + 2c + 3d = a + 3b + 9c + 27d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 5c - 26d = 0 \\ a + 2b + 6c + 24d = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5c + 26d \\ 5c + 26d + 2b + 6c + 24d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5c + 26d \\ b = -\frac{11}{2}c - d \end{cases}$.

Donc, $F = \{(X-1)^2(X-3)^2\ Q(X) + 5c + 26d + (-\frac{11}{2}c - d)X + cX^2 + dX^3 / \ Q \in \mathbb{R}_{n-4}[X], c, d\ réels\}$.

$F = \{(X-1)^2(X-3)^2\ (\sum_{k=0}^{n-4} a_k X^k) + 5c + 26d + (-\frac{11}{2}c - d)X + cX^2 + dX^3 / \ a_4, a_5, .., a_n, c, d\ réels\}$

$F = \{(\sum_{k=0}^{n-4} a_k X^k (X-1)^2(X-3)^2\ ) + c\left(5 - \frac{11}{2}X + X^2\right) + d(26 - X + X^3) / \ a_4, a_5, .., a_n, c, d\ réels\}$

d. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]/\tilde{P}(3) + 2\tilde{P}''(3) = \tilde{P}'(3)\}$(*)

OUI F est un ss-e-v de $\mathbb{R}_n[X]$ et et $F = vect\left(\underbrace{X-2, X^2+6X-27, (X-3)^3, (X-3)^4, \dots, (X-3)^n}_{libre\ car\ échelonnée\ en\ degré\ donc\ base\ de\ F\ et\ dimF=n}\right)$. En effet,

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k (X-3)^k \in \mathbb{R}_n[X]$. $\tilde{P}(3) + 2\tilde{P}''(3) = \tilde{P}'(3) \Leftrightarrow a_0 + 2 \times 6 \times a_2 = a_1$.

Donc, $F = \{\sum_{k=0}^{n} a_k (X-3)^k \in \mathbb{R}_n[X] / a_0 + 2 \times 6 \times a_2 = a_1\}$

$F = \{a_0 + (a_0 + 2 \times 6 \times a_2)(X-3) + a_2(X-3)^2 + a_3(X-3)^3 .. + a_n(X-3)^n \in \mathbb{R}_n[X] / a_0, a_2, a_3, . +, a_n réels\}$

$F = \{a_0[1 + (X-3)] + a_2[(X-3)^2 + 12(X-3)] + a_3(X-3)^3 .. + a_n(X-3)^n \in \mathbb{R}_n[X] / a_0, a_2, a_3, . +, a_n réels\}$

$F = \{a_0[X-2] + a_2[X^2 + 6X - 27] + a_3(X-3)^3 .. + a_n(X-3)^n \in \mathbb{R}_n[X] / a_0, a_2, a_3, ., a_n réels\}$

a. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(X+1) = P(X)\}$

OUI F est un ss-e-v de $\mathbb{R}_n[X]$ et et $F = vect(1)$. En effet,

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P \neq 0$ *et* $n = \deg(P)$. *Alors* $a_n = codom(P) \neq 0$.

$P(X+1) = P(X) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

$\Leftrightarrow a_n(X+1)^n + a_{n-1}(X+1)^{n-1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} a_k (X+1)^k}_{T(X)} = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} a_k X^k}_{U(X)}$

$\overset{FBN}{\Leftrightarrow} a_n\left(X^n + nX^{n-1} + Q(X)\right) + a_{n-1}\left(X^{n-1} + H(X)\right) + T(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + U(X)$ où Q, H, T et U de degré inf à $n-2$

$\overset{par\ unicité\ des\ coeff.}{\Leftrightarrow} na_n + a_{n-1} = a_{n-1}$

$\Rightarrow na_n = 0$

$\overset{car\ a_n \neq 0}{\Leftrightarrow} n = 0$

$\Rightarrow P$ constant.

De plus, *si* P est constant alors $P(X+1) = P(X)$.

Donc F est l'ensemble des polynômes constants i.e. $F = vect(1)$.

Autre méthode

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. *Si* P est constant alors $P(X+1) = P(X)$.

Imaginons un instant qu'il existe un polynôme P non constant tel que $P(X+1) = P(X)$. Comme P n'est pas constant alors P admet au moins une racine complexe α d'après d'Alembert-Gauss. Alors $P(\alpha+1) = P(\alpha) = 0$. Donc, $\alpha + 1$ est racine de P. Alors $P(\alpha+2) = P(\alpha+1) = 0$. Donc, $\alpha + 2$ est racine de P. Et on montre facilement par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, \alpha + k$ est racine de P. Donc P a une infinité de racines et est donc le polynôme nul ce qui contredit le fait que P n'est pas constant. Ainsi, F est l'ensemble des polynômes constants i.e. $F = vect(1)$.

b. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} = 0\}$

OUI F est un ss-e-v de $\mathbb{R}_n[X]$ et et $F = vect\left(\underbrace{(X^k - 1)_{k=1..n}}_{libre\ car\ échelonnée\ en\ degré\ donc\ base\ de\ F\ et\ dimF=n}\right)$. En effet,

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\forall \in [\![0, n]\!], a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

$P \in F \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k = 0 \Leftrightarrow a_0 = -\sum_{k=1}^{n} a_k \Leftrightarrow P = -\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k X^k = \sum_{k=1}^{n} a_k (X^k - 1)$

Donc, $F = \{\sum_{k=1}^{n} a_k (X^k - 1) / a_1, a_2, .., a_n réels\}$.

Ex 8 Ensembles de matrices

Les ensembles F suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels d'un e-v de référence à préciser ? Dans les cas (*), chercher une famille génératrice puis une base et la dimension de F. On précisera quand F est un plan ou une droite vectoriel(le).

Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$.

a. F est l'ensemble des matrices complexes carrées d'ordre 3 dont la trace est nulle. (*) Idem avec ordre n.

b. F est l'ensemble des matrices complexes carrées d'ordre 2 de déterminant nul.

c. $Soit\ A \in M_n(\mathbb{R})\ et\ F = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ ((*) dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$).

d. $Soit\ A \in M_n(K)$ et $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / \exists P \in GL_n(K); M = PAP^{-1}\}$ (de telles matrices M sont dites semblables à A).

e. $F = \{\begin{pmatrix} x+y & y+z & x+z \\ -y & z & -x \end{pmatrix} / (x, y, z) \in \mathbb{C}^3\}$ (*)

f. $F = \{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} / xy = 0\}$

g. $F = S_3(\mathbb{R})$. (*)

h. $F = D_n(\mathbb{R})$. (*)

i. F est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n nilpotentes.

II Somme, intersectrion, supplémentaires, somme directe or nothing

Ex 9 dans K^n

1.Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0\}$ *et* $G = \{(a, 3a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

a. Montrer que ***G et F*** sont deux plans vectoriels de ……..

On donnera pour chaque ss-e-v deux familles génératrices et une base et on donnera une équation de G.

b. Donner une famille génératrice de $F + G$, de $F \cap G$.

c. Trouver un vecteur $X \in G$ tel que $F\ et\ vect(X)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2.Soit $F = \{(a + 2b, a, 2a + b, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - z = 0\ et\ x + y - t = 0\}$

a. Montrer que F et G sont deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

b. Justifier que $F\ et\ G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

c. Ecrire $X = (1,2,3,4)$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

3. $E=\mathbb{R}^n$ et $F=vect((1,1,..,1,1))$ et $G=\{(x_1,x_2,..,x_n)\in\mathbb{R}^n/\sum_{k=1}^{n}x_k=0\}$.

a. Justifier que $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ sont des ss-e-v de $\boldsymbol{E}$ et en déterminer une famille génératrice puis une base.

b. Montrer que $\boldsymbol{F}$ *et* $\boldsymbol{G}$ sont supplémentaires dans $\boldsymbol{E}$.

4. Soit $F=\left\{(x,y,z,t,w)\in\mathbb{R}^5/\begin{cases}3x-y+z-t+w=0\\2x-y-2z-t-w=0\end{cases}\right\}$ et $G=\{(a,a+2b,b-a,2a+b,a+b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

a. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}^5$.

b. Montrer que $F=vect\big((-2,-6,0,1,1),(3,9,-1,-1,0),(1,4,-1,-1,1)\big)$

c. Pour quelles valeurs du réel x , $(2x,0,3,-3,x)\in G$?

d. Donner un système d'équations décrivant G (comme pour F).

e. F et G sont-il supplémentaires dans $\mathbb{R}^5$?

a. $G=\{a(1,1,-1,2,1)+b(0,2,-1,2,1)/a,b\in\mathbb{R}^2\}=vect\big((1,1,-1,2,1),(0,2,-1,2,1)\big)$.Comme $(1,1,-1,2,1)\ et(0,2,-1,2,1)$ sont dans $\mathbb{R}^5$, G est un ss-e-v de $\mathbb{R}^5$. $(1,1,-1,2,1),(0,2,-1,2,1)$ ne sont clairement pas colinéaires donc $((1,1,-1,2,1),(0,2,-1,2,1))$ est une base de G et $dimG=2$.

$F\subset\mathbb{R}^5$. Prenons $x=y=z=t=w=0$. $Alors\ \begin{cases}3x-y+z-t+w=0\\2x-y-2z-t-w=0\end{cases}$. Donc $(0,0,0,0,0)\in F$.

Considérons $X_1=(x_1,y_1,z_1,t_1,w_1)\ et\ \ X_2=(x_2,y_2,z_2,t_2,w_2)$ deux éléments de $F\ et\ a_1\ et\ a_2$ deux réels.

$a_1X_1+a_2\,X_2=a_1(x_1,y_1,z_1,t_1,w_1)+a_2(x_2,y_2,z_2,t_2,w_2)=(a_1x_1+a_2x_2,a_1y_1+a_2y_2,a_1z_1+a_2z_2,a_1t_1+a_2t_2,a_1w_1+a_2w_2)$ et

$$\begin{cases}3(a_1x_1+a_2x_2)-(a_1y_1+a_2y_2)+a_1z_1+a_2z_2-(a_1t_1+a_2t_2)+a_1w_1+a_2w_2\\ \quad=a_1\Big(\underbrace{3x_1-y_1+z_1-t_1+w_1}_{=0}\Big)+a_2(\underbrace{3x_2-y_2+z_2-t_2+w_2}_{=0})=0\\ de\ même,\ 2(a_1x_1+a_2x_2)-(a_1y_1+a_2y_2)-2(a_1z_1+a_2z_2)-(a_1t_1+a_2t_2)-(a_1w_1+a_2w_2)=0\end{cases}$$

Donc, $a_1X_1+a_2\,X_2\in F$. Ainsi F est un ss-e-v de $\mathbb{R}^5$.

b. **OU BIEN par liberté + dimension :** Cherchons une famille génératrice de F pour obtenir une base puis la dimension de F.

$$\begin{cases}3x-y+z-t+w=0\\2x-y-2z-t-w=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y+z-t+w=0\\-x-3z-2w=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y+z-t+w=0\\x=-3z-2w\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(-3z-2w)-y+z-t+w=0\\x=-3z-2w\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-8z-5w-t\\x=-3z-2w\end{cases}$$

Donc, $F=\left\{(x,y,z,t,w)\in\mathbb{R}^5/\begin{cases}y=-8z-5w-t\\x=-3z-2w\end{cases}\right\}=\{(-3z-2w,-8z-5w-t,z,t,w)\in\mathbb{R}^5/(z,w,t)\in\mathbb{R}^3\}$

$=\{z(-3,-8,1,0,0)+w(-2,-5,0,0,1)+t(0,-1,0,1,0)/(z,w,t)\in\mathbb{R}^3\}=vect((-3,-8,1,0,0),(-2,-5,0,0,1),(0,-1,0,1,0))$.

Donc, $((-3,-8,1,0,0),(-2,-5,0,0,1),(0,-1,0,1,0))$ est une famille génératrice de F. De plus, cette famille est libre car échelonnée en 0 (par la droite) . Donc, $(\underbrace{(-3,-8,1,0,0)}_{=U},\underbrace{(-2,-5,0,0,1)}_{=V},\underbrace{(0,-1,0,1,0)}_{=W})$ est une base de F et $dimF=3$.

Les trois vecteurs $(-2,-6,0,1,1),(3,9,-1,-1,0),(1,4,-1,-1,1)$ sont éléments de F car ces 5-uplets vérifient les deux équations de F. De plus, ces trois vecteurs forment une famille libre car $a(-2,-6,0,1,1)+b(3,9,-1,-1,0)+c(1,4,-1,-1,1)=0\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+3b+c=0\\-6a+9b+4c=0\\-b-c=0\\a-b-c=0\\a+c=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}-2a+3b+c=0\\-6a+9b+4c=0\\b=-c\\-b=0\\a=-c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=0$. Comme $dimF=3,((-2,-6,0,1,1),(3,9,-1,-1,0),(1,4,-1,-1,1))$ est libre et maximale dans F donc est une base de F . Et ainsi, $F=vect\big((-2,-6,0,1,1),(3,9,-1,-1,0),(1,4,-1,-1,1)\big)$.

OU bien par double inclusion je remarque que $X=(-2,-6,0,1,1),Y=(3,9,-1,-1,0),Z=(1,4,-1,-1,1)$ vérifient $\begin{cases}Y=-U-W\\X=V+W\\Z=-U+V-W\end{cases}$.

Donc, $X,Y\ et\ Z$ sont dans *F* et par suite $vect(X,Y,Z)\subset F$. De plus, $X+Y-Z=W\ et\begin{cases}Y+X+Y-Z=-U\\X-(X+Y-Z)=V\\X+Y-Z=W\end{cases}$. Donc U,V et W sont des combinaisons linéaires de $X,Y\ et\ Z$ et par conséquent, $F\subset vect(X,Y,Z)$. Ainsi, $F=vect(X,Y,Z)$.

c. $G=\{(a,a+2b,b-a,2a+b,a+b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

$(2x,0,3,-3,x)\in G\ \Leftrightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/(2x,0,3,-3,x)=(a,a+2b,b-a,2a+b,a+b)$

$$\Leftrightarrow \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases} a=2x \\ a+2b=0 \\ b-a=3 \\ 2a+b=-3 \\ a+b=x \end{cases} \Leftrightarrow \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases} a=2x \\ 3a=-6 \\ 3b=3 \\ 2a+b=-3 \\ a+b=x \end{cases} \Leftrightarrow \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases} x=-1 \\ a=-2 \\ b=1 \\ -3=-3 \\ x=-1 \end{cases}$$

Ainsi, $(2x,0,3,-3,x)\in G \Leftrightarrow x=-1.$

d. $(x,y,z,t,w)\in G \Leftrightarrow \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2/(x,y,z,t,w)=(a,a+2b,b-a,2a+b,a+b)$

$$\Leftrightarrow \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases} a=x \\ a+2b=y \\ b-a=z \\ 2a+b=t \\ a+b=w \end{cases} \Leftrightarrow \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases} a=x \\ 3a=y-2z \\ 3b=y+z \\ 2a+b=t \\ a+b=w \end{cases} \Leftrightarrow \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases} x=\frac{1}{2}(y-2z) \\ a=\frac{1}{2}(y-2z) \\ b=\frac{1}{3}(y+z) \\ (y-2z)+\frac{1}{3}(y+z)=t \\ \frac{1}{2}(y-2z)+\frac{1}{3}(y+z)=w \end{cases}.$$

Ainsi, $G=\{(x,y,z,t,w)\in\mathbb{R}^5/\begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ (y-2z)+\frac{1}{3}(y+z)=t \\ \frac{1}{2}(y-2z)+\frac{1}{3}(y+z)=w \end{cases}\}.$

e. F et G sont des ss-e-v de $\mathbb{R}^5$. Notons $B_c=((1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Alors, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^5$

$\Leftrightarrow$la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de $\mathbb{R}^5$

$\Leftrightarrow(\underbrace{(-3,-8,1,0,0)}_{=U},\underbrace{(-2,-5,0,0,1)}_{=V},\underbrace{(0,-1,0,1,0)}_{=W},\underbrace{(1,1,-1,2,1)}_{=A},\underbrace{(0,2,-1,2,1)}_{=B})$ est une base de $\mathbb{R}^5$

$\Leftrightarrow M=mat_{B_c}(U,V,W,A,B)$ est inversible

$\Leftrightarrow rg(M)=5.$

Or, $mat_{B_c}(U,V,W,A,B)=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -5 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_4\leftarrow C_4-C_5}{\sim_c} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -5 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_5\leftarrow C_5-C_2-2C_3+C_1+C_4}{\sim_c} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc, M n'est pas inversible et ainsi, F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^5$.

Ex 10 dans F$(D,\mathbb{R})$

1.Soit E l'espace vectoriel des applications de [0,1] dans $\mathbb{R}$ continues sur [0,1] . Soit F l'ensemble des applications de [0,1] dans $\mathbb{R}$ constantes et $G=\left\{f\in C^0([0,1],\mathbb{R})/\int_0^1 f(t)dt=0\right\}$

a. Justifier que F est une droite vectorielle.
b. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de E supplémentaires dans E.
c. Décomposer $(x\mapsto x^2\ln(1+x))$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .

a. $F=\{(x\mapsto a)/a\in\mathbb{R}\}=\{a(x\mapsto 1)/a\in\mathbb{R}\}=vect(f_0)$où $f_0:(x\mapsto 1)$. Comme f_0 n'est pas la fonction nulle et appartient à E, j'en déduis que F est une droite vectorielle de E.

b. En particulier, F est un ss-e-v de E.

Montrons que G est aussi un ss-e-v de E.

- $G=\left\{f\in E/\int_0^1 f(t)dt=0\right\} donc\ \ G\subset E.$
- La fonction $w:(x\mapsto 0)$ est élément de G car $\int_0^1 w(t)dt=\int_0^1 0.dt=0.$
- Soit $f\ et\ g$ deux éléments de G et a et b deux réels. Comme f et g sont continues sur $[0,1]$, $af+bg$ l'est aussi et $\int_0^1(af+bg)(t)dt=a\underbrace{\int_0^1 f(t)dt}_{\substack{=0\\ car\ f\in G}}+b\underbrace{\int_0^1 g(t)dt}_{\substack{=0\\ car\ g\in G}}=0.$ Donc, $af+bg\in G.$

Ainsi, G est un ss-e v de E.

Montrons que $F\oplus G=E$.

Soit $\varphi\in E$. Je cherche $f\in F\ et\ g\in G$ telles que $\varphi=f+g$.

Analyse : supposons que de telles fonctions f et g existent.

Alors $\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R},\varphi(x)=f(x)+g(x) \\ \int_0^1 g(t)dt=0 \\ \exists a\in\mathbb{R}/\forall x\in\mathbb{R},f(x)=a\end{cases}$. Alors, $\int_0^1\varphi(t)dt=\int_0^1 f(t)+g(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\underbrace{\int_0^1 g(t)dt}_{=0\ car\ g\in G}=\int_0^1 adt+0=a.$

Donc $\forall x\in\mathbb{R},f(x)=\int_0^1\varphi(t)dt\ \ et\ g(x)=\varphi(x)-\int_0^1\varphi(t)dt.$

Ainsi, si f et g existent alors nécessairement $\forall x\in\mathbb{R},f(x)=\int_0^1\varphi(t)dt\ \ et\ g(x)=\varphi(x)-\int_0^1\varphi(t)dt$ donc f et g sont uniques.

Synthèse Soit f et g définies par : $\forall x\in\mathbb{R},f(x)=\int_0^1\varphi(t)dt\ \ et\ g(x)=\varphi(x)-\int_0^1\varphi(t)dt.$

Alors $\forall x\in\mathbb{R},f(x)+g(x)=\int_0^1\varphi(t)dt+\varphi(x)-\int_0^1\varphi(t)dt=\varphi(x).$

De plus, $f\ est\ constante\ i.e.f\in F.$

Enfin, posons $\lambda=\int_0^1\varphi(t)dt$. Alors, $\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\varphi(x)-\lambda\,dx=\int_0^1\varphi(x)dx-\lambda\int_0^1 1\,dx=\int_0^1\varphi(x)dx-\lambda=0.$ Donc $g\in G.$

Ainsi, f et g conviennent et d'après l'analyse, sont les seules qui conviennent.
J'en conclus que $F \oplus G = E$.

c. Prenons $\varphi(x) = x^2\ln(1+x)$.

Alors $\varphi = f + g$ où $f \in F$ et $g \in G$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 t^2\ln(1+t)\,dt$ et $g(x) = x^2\ln(1+x) - f(x)$.

Or, $\int_0^1 t^2\ln(1+t)\,dt \underbrace{=}_{\substack{CV \\ u=1+t \\ du=dt}} \int_1^2 (u-1)^2\ln(u)\,du \underbrace{=}_{IPP} \left[\frac{(u-1)^3}{3}\ln(u)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{(u-1)^3}{3}\frac{1}{u}du = \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\int_1^2 u^2 - 3u + 3 - \frac{1}{u}du$

$= \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\left[\frac{u^3}{3} - \frac{3u^2}{2} + 3u - \ln(u)\right]_1^2 = \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3} - 6 + 6 - \ln(2) - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 3\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{14+9-18}{6}\right) + \frac{2}{3}\ln(2) = \frac{2}{3}\ln(2) - \frac{5}{18}$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{3}\ln(2) - \frac{5}{18}$ et $g(x) = x^2\ln(1+x) - \frac{2}{3}\ln(2) + \frac{5}{18}$.

2.Soit $n \in \mathbb{N}$, $E = C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F = \{f \in E / f(0) = f'(0) = 0\}$, G l'ensemble des applications affines et H l'ensemble des applications polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

a. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de E supplémentaires dans E.
b. Déterminer $f \in F$ et $g \in G$ telles que $exp = f + g$. Donner une expression intégrale à f.
c. Décrire $F \cap H$ et $G \cap H$.
d. Montrer que $F \cap H \oplus G = H$.

Ex 11 dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n, u_{n+4} = u_n\}$ et $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_3 = u_2 = u_1 = u_0 = 0\}$

a. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
b. Déterminer une base de F.

1. Montrons tout d'abord que F et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
$F = vect(r,s,t,y)$ où $r = (1,0,0,\dots), s = (0,1,0,0,\dots), t = (0,0,1,0,0,\dots)$ et $y = (0,0,0,1,0,0\dots)$. Donc F est un ss-e-v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
$G \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et La suite nulle est évidemment élément de G.
Soit $(u,v) \in G^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. $\forall k \in \{0,1,2,3\}, u_k = v_k = 0$ donc $au_k + bv_k = 0$. Donc, $au + bv \in G$. Ainsi G est un ss-e-v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Montrons qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Soit u une suite réelle. Je cherche une suite $v \in F$ et une suite $w \in G$ telles que $u = v + w$.
Analyse : Supposons que v et w existent. Alors,$\forall n, u_n = v_n + w_n$ et $v_{n+4} = v_n$ et $w_3 = w_2 = w_1 = w_0 = 0$. Alors,
$u_0 = v_0, u_1 = v_1, u_2 = v_2$ et $u_3 = v_3$. Donc $v = (u_0,u_1,u_2,u_3,u_0,u_1,u_2,u_3,u_0,u_1,u_2,u_3,\dots) = u_0r + u_1s + u_2t + u_3y$.
Alors, $\forall n, w_n = u_n - v_n$.
Les seules suites v et w qui peuvent convenir sont $v = (u_0,u_1,u_2,u_3,u_0,u_1,u_2,u_3,u_0,u_1,u_2,u_3,\dots) = u_0r + u_1s + u_2t + u_3y$.
et $\forall n, w_n = u_n - v_n$.
Synthèse Soit $v = (u_0,u_1,u_2,u_3,u_0,u_1,u_2,u_3,u_0,u_1,u_2,u_3,\dots) = u_0r + u_1s + u_2t + u_3y$ et $\forall n, w_n = u_n - v_n$.
Alors, $u = v + w$ et $v \in vect(r,s,t,y) = F$ et et $w_0 = u_0 - v_0 = 0$ $w_1 = u_1 - v_1 = 0$, $w_2 = u_2 - v_2 = 0$ et $w_3 = u_3 - v_3 = 0$ i.e. $w \in G$. Donc v et w conviennent et d'après l'analyse sont les seules suites qui conviennent.
J'en conclus que toute suite réelle s'écrit de manière unique comme somme d'une suite de F et d'une suite de G . Ainsi, F et G sont supplémentaires dans E.

2. Soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$, $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0\}$ et G l'ensemble des suites géométriques de raison 2.

a. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-e-v.
b. Montrer que F est un plan vectoriel de E et G une droite vectorielle de E.
c. Prouver que F et G sont supplémentaires dans E. En déduire une base de E.
d. Si l'on définissait une équation caractéristique de E , quelle serait-elle ? Quelles seraient ses solutions ? Est-ce cohérent avec le résultat de la question 3. et le cours sur les suites récurrentes d'ordre 2 ?

a.$E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
La suite nulle telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \omega_n = 0$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \omega_{n+3} = 0 = 3\times 0 + 2\times 0 = 3\omega_{n+1} + 2\omega_n$. Donc $\omega \in E$.
Soit u et v deux éléments de E et a et b réels.
$\forall n \in \mathbb{N}, (au+bv)_{n+3} = au_{n+3} + bv_{n+3} = a(3u_{n+1} + 2u_n) + b(3v_{n+1} + 2v_n) = 3(au_{n+1} + bv_{n+1}) + 2(au_n + bv_n) = (au+bv)_{n+3} = 3(au+bv)_{n+1} + 2(au+bv)_n$. Donc $au + bv \in E$.
J'en conclus que E est un ss-e-v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et est donc un $\mathbb{R}$-e-v.
b. **F ?** Posons (e.c) : $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$.
Donc, $F = \{((an+b)(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} / a, b \text{ réels}\} = vect(\underbrace{(n(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}}_{\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}, \underbrace{((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}}_{\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}})$. Donc F est un ss-e-v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Montrons que $r = (n(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et $s = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.
$\forall n \in \mathbb{N}, r_{n+3} - 3r_{n+1} - 2r_n = (n+3)(-1)^{n+3} - 3(n+1)(-1)^{n+1} - 2n(-1)^n = [-(n+3) + 3(n+1) - 2n](-1)^n = 0$
$s_{n+3} - 3s_{n+1} - 2s_n = (-1)^{n+3} - 3(-1)^{n+1} - 2(-1)^n = [-1 + 3 - 2](-1)^n = 0$.
Donc, $r \in E$ et $s \in E$. Alors comme E est stable par combinaison linéaire , $F = vect(r,s) \subset E$.
J'en conclus que F est un ss-e-v de E.
Montrons que (r,s) est libre. Soit a et b réels tels que : $ar + bs = 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, a\,n(-1)^n + b(-1)^n = 0$.
En particulier, pour $n = 0, b = 0$ puis pour $n = 1$, $a\,(-1)^1 + \underbrace{b}_{=0}(-1)^1 = 0$ donc $a = 0$.
Ainsi, (r,s) est libre i.e. r et s ne sont pas colinéaires. J'en déduis que F est un plan vectoriel de E.
G ? $G = \{(a2^n)_{n\in\mathbb{N}} / a \text{ réel}\} = vect((2^n)_{n\in\mathbb{N}})$. Donc G est un ss-e-v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Montrons que $t = (2^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

$\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+3} - 3t_{n+1} - 2t_n = 2^{n+3} - 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n = \left[\underbrace{2^3 - 3 \times 2^1 - 2}_{=0}\right] 2^n = 0$. Donc, $t \in E$. Alors comme E est stable par combinaison linéaire , $G = vect(t) \subset E$. J'en conclus que G est un ss-e-v de E. Comme t n'est pas la suite nulle, G est une droite vectorielle dans E.

c. Montrons que toute suite de E s'écrit de manière unique comme somme d'une suite de F et d'une suite de G.

Soit u un suite de E. Je cherche $v \in F$ *et* $w \in G$ telles que $u = v + w$. **NB : v et w dépendent de u.**

Analyse : Supposons que de telles suites v et w existent. Exprimons v et w en fonction de u.

Alors $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n \\ \exists a \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, w_n = a2^n \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} + 2v_{n+1} + v_n = 0 \end{cases}$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a2^n + v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 = v_{n+2} + 2v_{n+1} + v_n = u_{n+2} - a2^{n+2} + 2(u_{n+1} - a2^{n+1}) + u_n - a2^n = u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n - a(4 + 4 + 1)2^n$. et

Donc, $a = \frac{1}{9.2^n}[u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n]$. Mais a ne doit pas dépendre de n. Montrons que $a = \left(\frac{1}{9.2^n}[u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n]\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{9.2^{n+1}}[u_{n+3} + 2u_{n+2} + u_{n+1}] - \frac{1}{9.2^n}[u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n]$$

$$= \frac{1}{9.2^{n+1}}\left[\left[\underbrace{u_{n+3}}_{=3u_{n+1}+2u_n} + 2u_{n+2} + u_{n+1}\right] - [2u_{n+2} + 4u_{n+1} + 2u_n]\right] car\ u \in E$$

$$= \frac{1}{9.2^{n+1}}[[3u_{n+1} + 2u_n + 2u_{n+2} + u_{n+1}] - [2u_{n+2} + 4u_{n+1} + 2u_n]] = 0.$$

Donc, (a_n) est constante. Ainsi, $a \overset{(*)}{=} \frac{1}{9.2^n}[u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n] = \frac{1}{9}[u_2 + 2u_1 + u_0]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{9}[u_2 + 2u_1 + u_0]2^n$. Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \frac{1}{9}[u_2 + 2u_1 + u_0]2^n$.

J'en déduis que si v et w existent , v et w sont uniques et valent : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{9}[u_2 + 2u_1 + u_0]2^n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{9}[u_2 + 2u_1 + u_0]2^n$.

Synthèse : Posons $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{9}[u_2 + 2u_1 + u_0]2^n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{9}[u_2 + 2u_1 + u_0]2^n$. Alors $w + v = u$ *et* $w \in G$.

Et, $v_{n+2} + 2v_{n+1} + v_n = u_{n+2} - \frac{1}{9}[u_2 + 2u_1 + u_0]2^{n+2} + 2\left(u_{n+1} - \frac{1}{9}[u_2 + 2u_1 + u_0]2^{n+1}\right) + u_n - \frac{1}{9}[u_2 + 2u_1 + u_0]2^n$

$= u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n - \frac{1}{9}[u_2 + 2u_1 + u_0]2^{n+2} - \frac{2}{9}[u_2 + 2u_1 + u_0]2^{n+1} - \frac{1}{9}[u_2 + 2u_1 + u_0]2^n$

$\underset{d'après\ (*)}{=} 9.2^n a - \frac{1}{9}[9(u_2 + 2u_1 + u_0)]2^n$

$\underset{d'après\ (*)}{=} 9.2^n a - \frac{9}{9}9.a.2^n = 0$. Donc $v \in F$.

Ainsi, v *et* w conviennent et sont les seules qui conviennent d'après l'analyse.

J'en conclus que F et G sont supplémentaires dans E.

d. Alors le cours (chap e-v de dimension finie, théo 22)assure que la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E. Ainsi, $((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}), (n(-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}))$ est une base de E.

e. L'équation caractéristique serait $(e.c): r^3 - 3r - 2 = 0$. Ses racines sont (-1), racine double, et 2, racine simple. Donc si , pour les suites récurrentes d'ordre 3 homogène, il existait un théorème analogue à celui des suites récurrentes d'ordre 2 , on aurait pu directement affirmer que :

$E = \{(a2^n + b(-1)^n + cn(-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} / a, b, c\ réels\} = vect((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}), (n(-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}))$

Ex 12 dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Soit Q un polynôme réel fixé *non nul et de degré* p. Soit F l'ensemble des polynômes divisibles par Q . Montrer que F et $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ sont deux sous-e-v supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

■$\mathbb{R}_{p-1}[X] = vect(1, X, X^2, \dots, X^{p-1})$ est un ss-e-v de $\mathbb{R}[X]$.

Montrons que $F = \{QU / U \in \mathbb{R}[X]\}$est un $ss - e - v$ de $\mathbb{R}[X]$.

- $F \subset \mathbb{R}[X]$.
- Si P est le polynôme nul alors $P = 0 \times U$ donc le polynôme nul est élément de F.
- Soit P_1 et P_2 deux polynômes de F. Soit a et b deux réels. Alors il existe U_1 et U_2 tels que $P_1 = QU_1$ *et* $P_2 = QU_2$. Donc, $aP_1 + bP_2 = aQU_1 + bQU_2 = QaU_1 + QbU_2 = Q(aU_1 + bU_2).Donc$ Donc, $aP_1 + bP_2 \in F$.

Ainsi F est un ss-e-v de $\mathbb{R}[X]$.

■$F \oplus \mathbb{R}_{p-1}[X] = \mathbb{R}[X]$ est une autre façon d'écrire le théorème de la division euclidienne . En effet, $\forall P \in \mathbb{R}[X], \exists!\ (U, V) \in \mathbb{R}[X]^2 / P = QU + V$ *et* $\deg(V) < \deg(Q)$ ce qui s'ecrit aussi $\forall P \in \mathbb{R}[X], \exists!\ H \in F, \exists!\ V \in \mathbb{R}_{p-1}[X] / P = H + V$.Cela signifie que $F \oplus \mathbb{R}_{p-1}[X] = \mathbb{R}[X]$.

2. $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / \tilde{P}(1) = 0\}$ et $G = \{aX / a \in \mathbb{R}\}$.
   - **a.** Montrer que G est une droite vectorielle. .
   - **b.** Montre que $F \oplus G = \mathbb{R}[X]$.
   - **c.** Donner un sous espace vectoriel de E qui ne soit pas supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.
   - **d.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une famille génératrice de $F \cap \mathbb{R}_n[X]$.

a.$G = vect(X)$. Comme X est un polynôme non nul de $\mathbb{R}$[X], G est une droite vectorielle de $\mathbb{R}[X]$.

b.**Montrons tout d'abord que F est un ss-e-v de $\mathbb{R}[X]$** .

$F \subset \mathbb{R}[X]$.

Comme $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie, je ne peux pas utiliser la caractérisation de ss-e-v supplémentaires par concaténation des bases.

Je vais donc **montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$, s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Je cherche $U \in F$ et $V \in G$ tels que $P = U + V$.

Analyse : supposons que de tels polynômes U et V existent.

Alors $\begin{cases} P = U + V \\ \tilde{U}(1) = 0 \\ il\ existe\ a\ réel\ tel\ que\ V = aX \end{cases}$. Donc, $P(X) = U(X) + aX\ et\ \ par\ suite, \tilde{P}(1) = \tilde{U}(1) + a = a.$
Donc $V(X) = \tilde{P}(1)X\ et\ U(X) = P(X) - \tilde{P}(1)X$. Donc si U et V existent, ils sont uniques et valent $V(X) = \tilde{P}(1)X\ et\ U(X) = P(X) - \tilde{P}(1)X$.
Synthèse posons $V(X) = \tilde{P}(1)X\ et\ U(X) = P(X) - \tilde{P}(1)X$.
Alors $U(X) + V(X) = P(X)\ et\ V \in G\ et\ \tilde{U}(1) = \tilde{P}(1) - \tilde{P}(1) = 0\ donc\ U \in F$. Ainsi, U et V conviennent et sont les seuls polynômes qui conviennent.
J'en conclus que $F \oplus G = \mathbb{R}[X]$.
Exemple : $X^2 = \underbrace{(X^2 - X)}_{\in F} + \underbrace{X}_{\in G}$ est la décomposition de X^2 dans la somme directe $F \oplus G$.

c. $H = vect(X - 1) \subset F$ (car $X - 1 \in F$ et F est stable par combinaison linéaire). Donc, $F \cap H = H \neq \{\vec{O}\}$.
J'en déduis que F et H ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. $F \cap \mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, \tilde{P}(1) = 0\}$
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Ecrivons P dans la base de Taylor en 1 : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\,(X-1)^k$. Alors,

$$P \in F \Leftrightarrow \tilde{P}(1) = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0 \Leftrightarrow P = \sum_{k=1}^{n} a_k\,(X-1)^k.$$

Ainsi, $F \cap \mathbb{R}_n[X] = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\,(X-1)^k \ / \ a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\} = vect(\,((X-1)^k\,)_{k=1\dots n})$. De plus, $((X-1)^k\,)_{k=1\dots n}$est échelonnée en degré sans polynôme nul donc est libre. J'en conclus que $((X-1)^k\,)_{k=1\dots n}$ est une base de $F \cap \mathbb{R}_n[X]$ qui est par conséquent de dimension n.

a.

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(X^2) = X^2 P(X)\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / \tilde{P}(-1) = \tilde{P}(2)\}$. Montrer que $F\ et\ G$ sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}_3[X]$ supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$P \in F \Leftrightarrow P(X^2) = X^2 P(X) \Leftrightarrow a + bX^2 + cX^4 + dX^6 = aX^2 + bX^3 + cX^4 + dX^5 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ b = a \\ 0 = b \\ c = c \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ b = a \\ 0 = b \\ c = c \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = d = 0.$$

Donc, $F = \{cX^2 / c\ réel\} = vect(X^2)$. Donc F est un ss-e-v de $\mathbb{R}_3[X]$. Comme X^2 n'est pas le polynôme nul, (X^2) est libre et est donc une base de F et $dim F = 1$.
$P \in G \Leftrightarrow \tilde{P}(-1) = \tilde{P}(2) \Leftrightarrow a - b + c - d = a + 2b + 4c + 8d \Leftrightarrow b = -c - 3d$
$\Leftrightarrow\ P = a - (c + 3d)X + cX^2 + dX^3 = a + c(X^2 - X) + d(X^3 - 3X)$
Donc, $G = vect(1, X^2 - X, X^3 - 3X)$. Donc G est un ss-e-v de $\mathbb{R}_3[X]$.De plus, la famille $(1, X^2 - X, X^3 - 3X)$ génératrice de G est libre car échelonnée en degré et sans polynôme nul donc $(1, X^2 - X, X^3 - 3X)$ est une base de G et $dim G = 3$.
Pour prouver que $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$, il suffit alors de prouver que la concaténation de la base de F et celle de G est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Prouvons que $B' = (X^2, 1, X^2 - X, X^3 - 3X)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Première méthode : Notons $H = vect(X^2, 1, X^2 - X, X^3 - 3X)$.
Alors, $H \underbrace{=}_{P_3 \leftarrow P_3 - P_1} vect(X^2, 1, X^2 - X - X^2, X^3 - 3X) = vect(X^2, 1, -X, X^3 - 3X)$. $(X^2, 1, -X, X^3 - 3X)$ est libre car échelonnée en degré.
Donc $dim H = 4 = dim \mathbb{R}_3[X]$. Comme H est un ss-e-v de $\mathbb{R}_3[X]$, je peux affirmer que $H = \mathbb{R}_3[X]$. Ainsi, $(X^2, 1, X^2 - X, X^3 - 3X)$ est génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$ et minimale dans $\mathbb{R}_3[X]$ (carde cardinal 4 égal à $dim \mathbb{R}_3[X]$). Ainsi, $(X^2, 1, X^2 - X, X^3 - 3X)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
J'en conclus que $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.
Deuxième méthode (matricielle) . Notons $B = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$
$B' = (X^2, 1, X^2 - X, X^3 - 3X)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X] \Leftrightarrow mat_B B'$ est inversible $\Leftrightarrow rg(mat_B B') = 4$.
Or, $P = mat_B B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{C_3 \leftarrow C_3 - C_1} \underbrace{C}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc, $rg(P) = 4$. Ainsi, $B' = (X^2, 1, X^2 - X, X^3 - 3X)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. J'en conclus que $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}\ et\ a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels tous distincts.
   a. Soit $i \in [\![0, n]\!]$.Déterminer l'unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k \in [\![0, n]\!] \backslash \{i\}, \widetilde{L_i}(a_k) = 0$ et $\widetilde{L_i}(a_i) = 1$.
   b. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   c. Déterminer les composantes du polynôme constant 1 dans cette base.
   d. En déduire que φ: $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par : $\varphi(P) = (\tilde{P}(a_0), \tilde{P}(a_1), \dots, \tilde{P}(a_n))$ est bijective.
   e. On définit $F = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \ f\ polynomiale\ et\ \deg(f) \leq n\}$ et $G = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \ f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n) = 0\}$.Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ supplémentaires dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a. Soit $i \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{cases} L_i \in \mathbb{R}_n[X] \\ L_i(a_i) = 1 \\ \forall k \in [\![0, n]\!] \backslash \{i\}, L_i(a_k) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_i \in \mathbb{R}_n[X] \\ L_i(a_i) = 1 \\ \forall k \in [\![0, n]\!] \backslash \{i\}, a_k\ est\ racine\ de\ L_i \end{cases} \overset{\substack{un\ polynôme\ non\ nul\ de\ degré\ inférieur\ à\ n \\ qui\ admet\ n\ racines\ distinctes \\ est\ scindé\ à\ racines\ simples}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_0, a_1, \dots a_{i-1}, a_{i+1}., a_n \text{ sont les seules racines de } L_i, \\ elles\ sont\ simples\ et\ il\ existe\ un\ réel\ \lambda\ tq: \\ L_i(X) = \lambda \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (X - a_k) \\ et\ L_i(a_i) = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} L_i(X) = \lambda \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (X - a_k) \\ 1 = \lambda \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (a_i - a_k) \end{cases} \Leftrightarrow L_i(X) = \frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (a_i - a_k)} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (X - a_k).$

Ainsi, $L_i(X) = \frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (a_i - a_k)} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (X - a_k)$ est le seul polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $L_i(a_i) = 1 et \forall k \in [\![0,n]\!] \backslash \{i\}, L_i(a_k) = 0$.

b. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i \Rightarrow \forall k \in [\![0,n]\!], \tilde{P}(a_k) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(a_k) = \lambda_k L_k(a_k) = \lambda_k \Rightarrow P = \sum_{i=0}^{n} \tilde{P}(a_i) L_i$. Donc si l'écriture de P comme combinaison linéaire des polynômes $L_0, L_1, \dots, L_n$ existe alors cette écriture est unique et $P = \sum_{i=0}^{n} \tilde{P}(a_i) L_i$.
Soit $T = P - \sum_{i=0}^{n} \tilde{P}(a_i) L_i$.
$\deg(T) \leq \max(\deg(\tilde{P}), \deg(L_0), \deg(L_1), \dots, \deg(L_n)) = n$.
$\forall k \in [\![0,n]\!], T(a_k) = \tilde{P}(a_k) - \sum_{i=0}^{n} \tilde{P}(a_i) \underbrace{\tilde{L}_i(a_k)}_{=0 \, si \, i \neq k} = \tilde{P}(a_k) - \tilde{P}(a_k) L_k(a_k) = 0$. Donc, $a_0, a_1, \dots a_i, a_n$ sont $n+1$ racines distinctes de T. Donc T a strictement plus de racines que son degré et est ainsi le polynôme nul. J'en conclus que $P = \sum_{i=0}^{n} \tilde{P}(a_i) L_i$.
Ainsi, $P = \sum_{i=0}^{n} \tilde{P}(a_i) L_i$ est l'unique écriture de P comme combinaison linéaire des polynômes $L_0, L_1, \dots, L_n$. J'en conclus que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c. Soit $T = (\sum_{i=0}^{n} L_i) - 1$
$\deg(T) \leq \max(\deg(L_0), \deg(L_1), \dots, \deg(L_n), \deg(1)) = n$.
$\forall k \in [\![0,n]\!], \tilde{T}(a_k) = \left[\sum_{i=0}^{n} \underbrace{\tilde{L}_i(a_k)}_{=0 \, si \, i \neq k}\right] - 1 = \widetilde{L_k}(a_k) - 1 = 0$. Donc, $a_0, a_1, \dots a_i, a_n$ sont $n+1$ racines distinctes de T. Donc T a strictement plus de racines que son degré et est ainsi le polynôme nul. J'en conclus que $\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$. Donc (1,1,…,1) sont les composantes du polynôme 1.

d. Soit $(\lambda_0, \lambda_1 \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Alors $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i \Rightarrow \deg(P) \leq n \; et \; \forall k, \tilde{P}(a_k) = \lambda_k$. Donc $\varphi(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i) = (\lambda_0, \lambda_1 \dots, \lambda_n)$; autrement dit, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$ est un antécédent de $(\lambda_0, \lambda_1 \dots, \lambda_n)$ par φ. De plus, $\varphi(P) = \varphi(Q) \Longrightarrow \left(\tilde{P}(a_0), \tilde{P}(a_1), \dots, \tilde{P}(a_n)\right) = (\tilde{Q}(a_0), \tilde{Q}(a_1), \dots, \tilde{Q}(a_n)) \Rightarrow$ $\forall k, \tilde{P}(a_k) = \tilde{Q}(a_k) \Longrightarrow P - Q$ a davantage de racines que son degré $\Rightarrow P = Q$. Donc, φ est injective.

d. $F = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \, f \; polynomiale \; et \; \deg(f) \leq n\}$ et $G = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \, f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n) = 0\}$.
$F = vect\big((x \mapsto 1), (x \mapsto x), .., (x \mapsto x^n)\big) \; est \; un \; ss - e - v \; de \; F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
$G \subset F(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si w est La fonction nulle alors $w(a_0) = w(a_1) = \dots = w(a_n) = 0$ donc $w \in G$. Soit $f \; et \; g$ deux éléments de G et u et v deux réels. Alors $(uf + vg)(a_k) = u \underbrace{f(a_k)}_{\substack{=0 \\ car \; f \in F}} + v \underbrace{g(a_k)}_{\substack{=0 \\ car \; g \in G}} = 0$. Donc $uf + vg \in G$. Ainsi, G est un ss-e-v de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

■Pour prouver que F et G sont supplémentaires dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, je vais montrer que tout élément de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une élément de F et d'un élément de G . (Comme $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est de dimension infinie, la caractérisation par concaténation de bases ne peut pas s'appliquer ici).
Soit $h \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Je cherche $f \in F$ et $g \in G$ telles que $h = f + g$.
Analyse : supposons que de telles fonctions f et g existent.
Alors $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) + g(x) \\ f = \tilde{P} \; avec \; P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ g(a_0) = g(a_1) = \dots = g(a_n) = 0 \end{cases}$. Alors $h(a_0) = f(a_0) = \tilde{P}(a_0)$, $h(a_1) = f(a_1) = \tilde{P}(a_1), \dots \; et \; h(a_n) = f(a_n) = \tilde{P}(a_n)$ donc $\varphi(P) = h$. Par conséquent, $P = \varphi^{-1}(h), f = \tilde{P} \; et \; g = h - f = h - \tilde{P}$.
Donc si $f \; et \; g$ existent, elles sont uniques et valent $f = \tilde{P} \; et \; g = h - \tilde{P}$ où $P = \varphi^{-1}(h)$.
Synthèse : Soit $P = \varphi^{-1}(h) \; et \; f = \tilde{P} \; et \; g = h - \tilde{P}$
Alors, $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $f \in F \; et \; f(a_0) = \tilde{P}(a_0) = h(a_0), f(a_1) = \tilde{P}(a_1) = h(a_1), \dots, f(a_n) = \tilde{P}(a_n) = h(a_n)$. Par conséquent, $\forall k \in [\![0,n]\!], g(a_k) =, f(a_k) - \tilde{P}(a_k) = 0$. Donc, $g \in G$. Ainsi, f et g conviennent et d'après l'énéluse sont les seules fonctions telles que $f \in F$ et $g \in G$ et $h = f + g$.
Ainsi, $F \oplus G = F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Ex 13 Dans $M_n(\mathbb{R})$

1. $E = M_n(\mathbb{R}). Soit \; F$ l'ensemble des matrices de E de trace nulle.
Démontrer que F et $vect(I_n)$ sont deux sous-e-v de $M_n(\mathbb{R})$ supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$.
2. $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que le système (S_λ): $AX = \lambda X \; n'est$ pas de Cramer sietssi $\lambda \in \{-2,1\}$.Soit $H = Sol((S_1) \; et \; K = Sol((S_{-2})$.
   b. Montrer que H et K sont deux ss-e-v de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ supplémentaires dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / AM = O_3\} \; et \; G = \{M \in F / AM = MA\}$.

1) Montrer F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$ et trouver une famille génératrice de F.
2) A est-elle inversible ? Les éléments de F sont-ils inversibles ?
3) Déterminer toutes les matrices M de F telles que $A + M$ est inversible.
4) Montrer que G est une droite vectorielle de F.
5) Prouver que F et G sont stables par produit matriciel.

1. $F = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / AM = O_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) / \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = O_3 \right\}$

2. $= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) / \begin{cases} a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \\ a_1 - a_3 = 0 \\ b_2 - b_3 = 0 \\ b_1 - b_2 = 0 \\ b_1 - b_3 = 0 \\ c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 - c_3 = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) / \begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 \\ b_1 = b_2 = b_3 \\ c_1 = c_2 = c_3 \end{cases} \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} / a_1, b_1, c_1 \text{ réels} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / a, b, c \text{ réels} \right\}$$

$= vect \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)}_{\text{F famille génératrice de F}}$. Donc comme F est une famille de vecteurs de $M_3(\mathbb{R})$, nous pouvons conclure que F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$.

$De\ plus\ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b = c = 0$. Donc F est libre. J'en conclus que F est une base de $F\ et\ dim(F) = 3$.

3. $G \subset F, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in G\ car \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in F\ et \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A = 0 = A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Considérons M et N deux matrices de G et α et β deux réels. Alors, $\alpha M + \beta N \in F$ puisque M et N sont dans G donc dans F et F est stable par combinaison linéaire. Et, $A(\alpha M + \beta N) = A(\alpha M) + A(\beta N) = \alpha(AM) + \beta(AN) \underbrace{=}_{\substack{car\ M \in G \\ et\ N \in G}} \alpha(MA) + \beta(NA)$

$= (\alpha M)A + (\beta N)A = (\alpha M + \beta N)A$. Donc $\alpha M + \beta N \in G$. Nous en concluons que G est un ss-e-v de F.

Cherchons une famille génératrice de G.

$G = \{M \in F / AM = MA\} = \{M \in F / 0 = MA\} \{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} / a, b, c\ réels\ et \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \}$

$= \{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} / a, b, c\ réels\ et \begin{cases} 0 = b - c \\ a - b = 0 \\ -a + c = 0 \\ b - c = 0 \\ a - b = 0 \\ -a + c = 0 \\ 0 = b - c \\ a - b = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases} \} = \{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} / a, b, c\ réels\ et\ a = b = c \} = \{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} / a\ réel \} =$

$vect \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ .De plus, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq (0)$, donc $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre. J'en déduis que $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de G et G est une droite vectorielle de F.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / AM = MA\}$. Soit (e) l'équation $M^3 = A$ d' inconnue $M \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que F est une ss-e-v de $M_2(\mathbb{R})$ et en trouver une famille génératrice.
2. Monter que $si\ M$ est solution de (e) alors $M \in F$.
3. En déduire les solutions de (e).

III Familles libres, familles liées. Bases.

Ex 14 Liberté ou liaison d'une famille de fonctions

1. Soit , $f_0 = 2,\ f_1 : (x \mapsto \ln(3x)), f_2 : (x \mapsto \frac{1}{x}), f_3 : (x \mapsto \ln(7x)), f_4 : \left(x \mapsto \frac{1}{x^2+x}\right), f_5 : \left(x \mapsto \frac{1}{x+1}\right), f_6 : \left(x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}\right)$. Déterminer une base de vect($f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$) .

$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ sont des fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$. Donc, $F = vect(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ est un ss-e-v de $C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.

- **Cherchons tout d'abord des relations de dépendance linéaires entre les vecteurs $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$.**

Le théorème de décomposition en éléments simples assure que f_4 est combinaison linéaire de $f_5\ et\ f_2$.

$\forall x > 0, \ln(7x) = \ln\left(\frac{7}{3}3x\right) = \ln\left(\frac{7}{3}\right) + \ln(3x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{3}\right)2 + \ln(3x)$ .. Donc, $f_3 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{3}\right) f_0 + f_1$.

Nous en déduisons que $F = vect(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) = vect(f_0, f_1, f_2, f_5, f_6)$. Autrement dit $(f_0, f_1, f_2, f_5, f_6)$ est génératrice de F.

- **Montrons que $(f_0, f_1, f_2, f_5, f_6)$ est libre.**

Soit a,b,c,d,e des réels tels que : $af_0 + bf_1 + c\,f_2 + d\,f_5 + ef_6 = 0$ i.e. $\forall x>0, a + bln(3x) + \frac{c}{x} + \frac{d}{x+1} + \frac{eln(x)}{x} = 0(**)$.

$Imaginons\ que\ b \neq 0$. Alors, $a + bln(3x) + \frac{c}{x} + \frac{d}{x+1} + \frac{eln(x)}{x} \sim_{+\infty} bln(3x)$ ce qui signifie d'après $(**)$que $0 \sim_{+\infty} bln(3x)$ ce qui est impossible puisque $b \neq 0\ donc\ \left(x \mapsto bln(3x)\right)$ n' est pas la fonction nulle. Donc nécessairement $b = 0\ et\ désormais\ (**)$ s'écrit :

$\forall x>0, a + \frac{c}{x} + \frac{d}{x+1} + \frac{eln(x)}{x} = 0(**)$.

$Imaginons\ que\ e \neq 0$. Alors, $a + \frac{c}{x} + \frac{d}{x+1} + \frac{eln(x)}{x} \sim_{+\infty} \frac{eln(x)}{x}$ ce qui signifie d'après $(**)$que $0 \sim_{+\infty} \frac{eln(x)}{x}$ce qui est impossible puisque $e \neq 0\ donc\ \left(x \mapsto \frac{eln(x)}{x}\right)\ n'est\ pas\ la\ fonction\ nulle$. Donc nécessairement $e = 0\ et\ désormais\ (**)$ s'écrit : $\forall x>0, a + \frac{c}{x} + \frac{d}{x+1} = 0(**)$.

Alors, $0 \underset{par\,(**)}{=} \lim_{x\to+\infty} a + \frac{c}{x} + \frac{d}{x+1} = a$. Désormais $(**)$ s'écrit : $\forall x>0, \frac{c}{x} + \frac{d}{x+1} = 0(**)$. En particulier, $\begin{cases} pour\ x=1, c + \frac{d}{2} = 0 \\ pour\ x=2, \frac{c}{2} + \frac{d}{3} = 0 \end{cases}$. Donc, $c = d = 0$. J'en conclus que $\left(f_0, f_1, f_2, f_5, f_6\right)$ est libre et finalement $\left(f_0, f_1, f_2, f_5, f_6\right)$ est une base de F. Ainsi, $dim F = 5$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$, $f_1 = \sin$, $f_2 : (t \mapsto \sin(t+a))\ et\ f_3 : (t \mapsto \cos(t+a))$. (f_1, f_2, f_3)est -elle libre ?

3. Soit $f_1 = \exp$, $f_2 : (t \mapsto \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{t}{2}})$ $et\ f_3 : (t \mapsto \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{t}{2}})$ et $F = vect(f_1, f_2, f_3)$.

a) Soit a , b , c trois réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ =0. Montrer que $a = b = c = 0\ par\ deux\ méthodes$.

i. Prendre des valeurs de t et conclure.

ii. Utiliser un développement limité de $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0 et conclure.

b) Quelle est $dim(F)$?

c) Soit $G = \{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f'' + f' + f = 0\}$.Montrer que $F = G \oplus vect(f_1)$.

d) Déterminer une base de vect(g_1, g_2, g_3, g_4) où

$g_1 : (t \to 3e^{-\frac{t}{2}}(sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - 2cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right))$

$g_2 : (t \to e^t - e^{-\frac{t}{2}}(sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right))$

$g_3 : (t \to e^{-\frac{t}{2}}(2sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + e^{3t/2})$

$g_4 : (t \to e^{-\frac{t}{2}}(-sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 3cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 4e^t)$.

a.i. $\forall t \in \mathbb{R}, ae^t + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{t}{2}} + c\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{t}{2}} = 0$ .En particulier,

pour $t = 0, a + c = 0$. Donc $c = -a$.

pour $t = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, a\,e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} + be^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} = 0$. Donc $b = -ae^{\frac{3\pi}{2\sqrt{3}}}$

pour $t = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}, a\,e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} - be^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} = 0$. Donc $b = ae^{-\frac{3\pi}{2\sqrt{3}}}$.

Donc $-ae^{\frac{3\pi}{2\sqrt{3}}} + ae^{-\frac{3\pi}{2\sqrt{3}}} = 0\ et\ par\ suite\ a = 0\ \ puis\ b = c = 0$.

Nous en concluons que (f_1, f_2, f_3) est libre et constitue une base de F.

a.ii. $\forall t \in \mathbb{R}, ae^t + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{t}{2}} + c\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{t}{2}} = 0$. Donc , $\forall t \in \mathbb{R}, ae^{\frac{3t}{2}} + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = 0$.

Donc $a\left(1 + \frac{3t}{2} + \frac{9t^2}{8} + o_0(t^2)\right) + b(\frac{\sqrt{3}}{2}t + o_0(t^2)) + c\left(1 - \frac{3}{8}t^2 + o_0(t^2)\right) = 0$.

Autrement dit , $(a+c) + \left(\frac{3a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)t + \left(\frac{9}{8}a - \frac{3}{8}c\right)t^2 + o_0(t^2) = 0$

Alors par unicité de la partie polynomiale du développement limité de la fonction nulle, nous pouvons affirmer que :

$\begin{cases} a + c = 0\ (L_1) \\ \frac{3a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0\ (L_2) \\ \frac{9}{8}a - \frac{3}{8}c = 0\ (L_3) \end{cases}$. Par conséquent, L_1 et L_3 donnent $a = c = 0\ et$ ensuite grâce à L_2, $b = 0$.

b.Ainsi, nous retrouvons à nouveau que B= (f_1, f_2, f_3) est libre et constitue donc une base de F. J'en déduis que dim$F$=3.

c.$G = \{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f'' + f' + f = 0\}$ =ensemble des solutions de l'EDL2h à coeff. constants $y'' + y' + y = 0$.

Donc, $G = \{\left(x \mapsto \left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)e^{-\frac{t}{2}}\right) / a, b\ réels\} = vect(f_2, f_3)$.

Comme (f_1, f_2, f_3) est libre, (f_2, f_3) est libre. Donc, (f_2, f_3) est une base de G . $Comme\ f_1 \neq 0, \neq (f_1)$ est une base de $vect(f_1)$.

Comme la base (f_1, f_2, f_3) de F est la concaténation d'une base de G et d'une base de $vect(f_1)$, nous pouvons conclure que :

$F = G \oplus vect(f_1)$.

d.G =(g_1, g_2, g_3, g_4) est une famille de vecteurs de F. Comme F est de dimension 3, G ,étant de cardinal 4, G est liée.

$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 + \lambda_4 g_4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1(3f_2 - 6f_3) + \lambda_2(f_1 - f_2) + \lambda_3(f_1 + 2f_2 + f_3) + \lambda_4(4f_1 - f_2 + 3f_3) = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4)f_1 + (3\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4)f_2 + (-6\lambda_1 + \lambda_3 + 3\lambda_4)f_3 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ -6\lambda_1 + \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_3 - 4\lambda_4 \\ \frac{1}{2}(\lambda_3 + 3\lambda_4) + \lambda_3 + 4\lambda_4 + 2\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 = \frac{1}{6}(\lambda_3 + 3\lambda_4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_3 - 4\lambda_4 \\ \lambda_3 = -\frac{9}{7}\lambda_4 \\ \lambda_1 = \frac{1}{6}(\lambda_3 + 3\lambda_4) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \frac{9}{7}\lambda_4 - 4\lambda_4 = \frac{-19}{7}\lambda_4 \\ \lambda_3 = -\frac{9}{7}\lambda_4 \\ \lambda_1 = \frac{2}{7}\lambda_4 \end{cases}$. Donc, $\forall \lambda_4 \in \mathbb{R}, \frac{2}{7}\lambda_4 g_1 - \frac{19}{7}\lambda_4 g_2 - \frac{9}{7}\lambda_4 g_3 + \lambda_4 g_4 = 0$.

En particulier, $pour\ \lambda_4 = 1, \frac{2}{7}g_1 - \frac{19}{7}g_2 - \frac{9}{7}g_3 + g_4 = 0$. En particulier, $g_4 = -\frac{2}{7}g_1 + \frac{19}{7}g_2 + \frac{9}{7}g_3$ est combinaison linéaire de g_1, g_2, g_3. Donc, $vect(g_1, g_2, g_3, g_4) = vect(g_1, g_2, g_3)$.

De plus, $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = 0 \Leftrightarrow il\ existe\ \lambda_4 réel\ tel\ que \begin{cases} \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 + \lambda_4 g_4 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow il\ existe\ \lambda_4\ réel\ tel\ que \begin{cases} \lambda_2 = \frac{9}{7}\lambda_4 - 4\lambda_4 = \frac{-19}{7}\lambda_4 \\ \lambda_3 = -\frac{9}{7}\lambda_4 \\ \lambda_1 = \frac{2}{7}\lambda_4 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

Donc, (g_1, g_2, g_3) est libre et est donc une base de $vect(g_1, g_2, g_3, g_4)$.

AUTRE METHODE:

$mat_B G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Or, $\begin{matrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{matrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim_c \begin{matrix} g_2 & g_1 & g_3 & g_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim_c \begin{matrix} g_2 & g_1 & g_3 - g_2 & g_4 - 4g_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\sim_c \begin{matrix} g_2 & g_1 & g_3 - g_2 - g_1 & g_4 - 4g_2 - g_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim_c \begin{matrix} g_2 & g_1 & g_3 - g_2 - g_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc, $rg(g_1, g_2, g_3, g_4) = 3$. Et $(g_2, g_1, g_3 - g_2 - g_1)$est une base de $vect(g_1, g_2, g_3, g_4)$.

4. Montrer que ces familles sont libres

a. Pour tout entier naturel k, on pose , $f_k: \left(x \to Arctan^k(x)\right)$.Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(f_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre .

c

Considérons le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n$. Alors l'égalité $(**) s'écrit\ \forall x \in \mathbb{R}, \widetilde{P}\left(Arctan(x)\right) = 0$ ce qui signifie que $\forall x \in \mathbb{R}, Arctan(x)$est racine de P.Or, $\{Arctan(x)/x \in \mathbb{R}\} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc P admet tous les réels strictement compris en $-\frac{\pi}{2}\ et\ \frac{\pi}{2}$ comme racines, P admet donc une infinité de racines. Par conséquent, P est le polynôme nul et par suite ses coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont tous nuls. J'en conclus que la famille $(f_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre .

Pour tout entier naturel k, on pose $h_k: (x \to \cos(kx))$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(h_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre.

$\forall a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a: (x \to x^a)$. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels distincts Montrer que la famille $\left(f_{a_1}, f_{a_2}, \ldots, f_{a_n}\right)$ est libre dans $C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.

- Deux remarques préliminaires :

$\forall a \in \mathbb{R}, x^a = e^{aln(x)}$ donc $f_a: (x \to x^a)$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et de classe $C^\infty sur\ \mathbb{R}^{+*}$.

Comme l'ordre des vecteurs d'une famille n'influe pas sur son caractère libre ou liée, on peut supposer que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$

- Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que : $\lambda_1 f_{a_1} + \lambda_2 f_{a_2} + \cdots + \lambda_n f_{a_n} = 0$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \lambda_1 x^{a_1} + \lambda_2 x^{a_2} \ldots + \lambda_n x^{a_n} = 0$ (**).

Si nous imaginons un instant que $\lambda_n \neq 0$ alors $\lambda_1 x^{a_1} + \lambda_2 x^{a_2} \ldots + \lambda_n x^{a_n} \sim_{+\infty} \lambda_n x^{a_n}$ et en utilisant (**), nous obtenons $0 \sim_{+\infty} \lambda_n x^{a_n}$ ce qui est impossible car $\lambda_n étant\ non\ nul, (x \mapsto \lambda_n x^{a_n})$n'est pas toute nulle au voisinage de $+\infty$. Nous en déduisons que l'hypothèse « $\lambda_n \neq 0$ »est fausse et ainsi $\lambda_n = 0$. Alors (**) s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \lambda_1 x^{a_1} + \lambda_2 x^{a_2} \ldots + \lambda_{n-1} x^{a_{n-1}} = 0$ .Et on recommence le procédé précédent (Si nous imaginons un instant que $\lambda_{n-1} \neq 0$ alors .....)pour prouver que $\lambda_{n-1} = 0$ puis $\lambda_{n-2} = 0$puis.....Après avoir prouvé que $\lambda_{n-1} = \lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_2 = 0$, (**) s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \lambda_1 x^{a_1} = 0$; il suffit alors de remarquer que x^{a_1} ne s'annule jamais et par conséquent, $\lambda_1 = 0$.

Ainsi, je peux conclure que la famille $\left(f_{a_1}, f_{a_2}, \ldots, f_{a_n}\right)$ est libre dans $C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.

$\forall a \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_a: \left(x \to \sqrt{|x-a|}\right)$. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels distincts. Montrer que la famille $\left(\varphi_{a_1}, \varphi_{a_2}, \ldots, \varphi_{a_n}\right)$ est libre dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- Soit $a \in \mathbb{R}$. $\varphi_a: \left(x \to \sqrt{|x-a|}\right)$est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est dérivable que sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$.

En effet , la valeur absolue et la racine carrée sont continues sur tout le domaine de définition respectif donc $\varphi_a: \left(x \to \sqrt{|x-a|}\right)$est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}$. De plus, la valeur absolue et la racine carrée ne sont pas dérivables en 0 mais sont dérivables sur leur domaine de défintion respectif privé de 0. Et $x = a \Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow |x-a| = 0$. Donc, $\varphi_a$est au moins dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$. Enfin, $\forall x \neq a, \tau(x) = \frac{\varphi_a(x) - \varphi_a(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{|x-a|}}{x-a} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x-a|}}\ si\ x > a \\ \frac{-1}{\sqrt{|x-a|}}\ si\ x < a \end{cases}$. Donc, $\lim\limits_{x\to a^+} \tau(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} \tau(x) = -\infty$. Ainsi, φ_a n'est pas dérivable en a.

- Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que : $\lambda_1 \varphi_{a_1} + \lambda_2 \varphi_{a_2} + \cdots + \lambda_n \varphi_{a_n} = 0$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \varphi_{a_1}(x) + \lambda_2 \varphi_{a_2}(x) \ldots + \lambda_n \varphi_{a_n}(x) = 0$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Alors, $\lambda_k \varphi_{a_k} = -\lambda_1 \varphi_{a_1} - \cdots - \lambda_{k-1} \varphi_{a_{k-1}} - \lambda_{k+1} \varphi_{a_{k+1}} - \cdots - \lambda_n \varphi_{a_n}$. Or, si $\lambda_k \neq 0$ alors $\lambda_k \varphi_{a_k}$ n'est pas dérivable en a_k tandis que $-\lambda_2 \varphi_{a_2} - \cdots - \lambda_{k-1} \varphi_{a_{k-1}} - \lambda_{k+1} \varphi_{a_{k+1}} - \cdots - \lambda_n \varphi_{a_n}$est dérivable en a_k (comme combinaison linéaire de fonctions dérivables en a_k) .. ce qui n'est pas possible puisque ces deux fonctions sont égales. J'en déduis que $\lambda_k = 0$. Ainsi la famille $\left(\varphi_{a_1}, \varphi_{a_2}, \ldots, \varphi_{a_n}\right)$ est libre.

$\forall a \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_a: \left(x \to \begin{cases} 1\ si\ x = a \\ 0\ si\ x \neq a \end{cases}\right)$. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels distincts. Montrer que la famille $(\varphi_a)_{a\in I}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que : $\lambda_1 \varphi_{a_1} + \lambda_2 \varphi_{a_2} + \cdots + \lambda_n \varphi_{a_n} = 0$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \varphi_{a_1}(x) + \lambda_2 \varphi_{a_2}(x) \ldots + \lambda_n \varphi_{a_n}(x) = 0 (**)$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Alors, $\lambda_k \varphi_{a_k}(a_k) \overset{d'après\ (**)}{=} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} -\lambda_j \underbrace{\varphi_{a_j}(a_k)}_{\substack{=0\ car \\ a_j \neq a_k}} = 0$. Or, $\lambda_k \varphi_{a_k}(a_k) \underbrace{=}_{car\ \varphi_{a_k}(a_k)=1} \lambda_k$. Donc, $\lambda_k = 0$.

Ainsi la famille $(\varphi_{a_1}, \varphi_{a_2}, \dots, \varphi_{a_n})$ est libre.

Ex 14 TD 17 Famille de polynômes.

1. Etudier la liberté de la famille $(P_1, P_2, .., P_5)$ tel que $P_1 = 1 - 2X + X^3$, $P_2 = -2X - X^4$, $P_3 = X^2 - 2X^3 + 2X^4$, $P_4 = 3 + 2X - 3X^4$, $P_5 = 1 - X^2 - X^3 - X^4$.

$(P_1, P_2, .., P_5)$ est une famille de polynôme de $\mathbb{R}_4[X]$. Et $card(P_1, P_2, .., P_5) = 5 = dim\mathbb{R}_4[X]$.

Donc, $(P_1, P_2, .., P_5)$est libre$\Leftrightarrow (P_1, P_2, .., P_5)$est une base de $\mathbb{R}_4[X] \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{où\ B=(1,X,X^2,X^3,X^4) \\ base\ canonique \\ de\ \mathbb{R}_4[X]}} M = mat_B(P_1, P_2, .., P_5)$est inversible$\Leftrightarrow rg(M) = 5$.

Or, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{C_5 \leftarrow C_5 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{C_5 \leftarrow C_5 + C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 + 4C_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{C_5 \leftarrow C_5 + C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\sim}_{C_4 \leftarrow C_4 - \frac{3}{4}C_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $rg(M) = 5$.

Ainsi, $(P_1, P_2, .., P_5)$ est une famille **LIBRE** de polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2 tq\ a \neq b$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille de polynômes $((X+a)^{n-k}(X+b)^k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre dans $\mathbb{C}_n[X]$.

Soit $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que : $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X+a)^{n-k}(X+b)^k = 0\ i.e.\ \lambda_0(X+a)^n + \lambda_1(X+a)^{n-1}(X+b)^1 + \cdots + \lambda_n(X+b)^n = 0\ (*)$.

Evaluons cette égalité en $-b$, nous obtenons : $\lambda_0(a-b)^n = 0$. Comme $a - b \neq 0$, nécessairement $\lambda_0 = 0$.

Alors, $(*)$ s'écrit $\lambda_1(X+a)^{n-1}(X+b)^1 + \cdots + \lambda_n(X+b)^n = 0$

i.e. $[\lambda_1(X+a)^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1}(X+a)(X+b)^{n-2} + \lambda_n(X+b)^{n-1}]\ (X+b) = 0$. Comme $X + b \neq 0\ et\ \mathbb{R}[X]$ est intègre, nécessairement $\lambda_1(X+a)^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1}(X+a)(X+b)^{n-2} + \lambda_n(X+b)^{n-1} = 0 (**)$. Evaluons cette égalité en $-b$, nous obtenons : $\lambda_1(a-b)^{n-1} = 0$.

Comme $a - b \neq 0$, nécessairement $\lambda_1 = 0$. Alors, $(**)$ s'écrit ….. Itérons ce précédé pour prouver que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$. A la dernière étape, $(*)$ s'écrit : $\lambda_n(X+b)^n = 0$. Comme $(X+b)^n \neq 0$, nécessairement $\lambda_n = 0$.

J'en conclus que $((X+a)^{n-k}(X+b)^k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre.

Exemple analogue fait dans le cours

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et pose pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $L_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{X-k}{i-k}$. Montrer que la famille $(L_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.Déterminer les composantes d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Posons pour tout $i \in [\![0,n]\!], a_i = i$. Alors $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est la famille des polynômes de Lagrange associée aux réels $a_0, \dots, a_n$.

Cette famille est

- une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$
- libre car $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0,n]\!], \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \underbrace{L_i(k)}_{=\delta_{ik}} = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0,n]\!], \lambda_k = 0$.
- de cardinal $n+1$égale à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple analogue fait dans le cours

Alors, la caractérisation « liberté-maximale » d'une base assure que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Déterminer une $\mathbb{R}$-base du $\mathbb{R}$-e-v $\mathbb{C}_3[X]$.

$$\mathbb{C}_3[X] = \{z_0 + z_1X + z_2X^2 + z_3X^3 / z_0, z_1, z_2, z_3\ complexes\}$$
$$= \{a_0 + ib_0 + (a_1 + ib_1)X + (a_2 + ib_2)X^2 + (a_3 + ib_3)X^3 / a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3\ réels\}$$
$$= vect_{\mathbb{R}}(1, i, X, iX, X^2, iX^2, X^3, iX^3)$$

NB : $\mathbb{C}_3[X]$ est avant tout un $\mathbb{C}$-e-v et $\mathbb{C}_3[X] = vect_{\mathbb{C}}(1, X, X^2, X^3)$

5. Soit $n \in \mathbb{N}\ et\ P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\deg(P) = n$. Justifier que $(P, P', .., P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\forall k \in [\![0,n]\!], P^{(k)} = \deg(P) - k = n - k. Donc\ (P, P', .., P^{(n)})$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, échelonnée en degré sans polynôme nul donc cette famille est libre. Enfin, cette famille est de cardinal $(n+1)$ égal à $\dim(\mathbb{R}_n[X])$. J'en conclus par la caractérisation « liberté-maximale » que $(P, P', .., P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 15 Famille de suites.

1. Montrer que la famille de suites (u, v, w, z)est libre où les suites u, v, w, z sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \ln^2(n+1), v_n = \sqrt{n}, w_n = (-1)^n, z_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

2. $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_k = (n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ (on note $v_k(n)=n^k$) . Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que , $(v_{,0}, v_1, \dots, v_m)$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3. Déterminer est une base du $\mathbb{C}$-e-v des suites complexes 4-périodiques.

Soit $u = (1,10,0,1,1,0,0,1,1,0,0, \dots), v = (0,1,0,-1,0,1,0,-1,0,1, \dots \dots), w = (1,0,02,1,0,0,2,1,0,0,1,2,0 \dots)\ et\ t = (0,0,3,1,0,0,3,1,0,0, \dots)$. Montrer que (u, v, w, t) est une autre base du $\mathbb{C}$-e-v des suites complexes 4-périodiques.

Exercice 16- Dans un K-e-v E de dimension quelconque.

1. Soit L $= (\vec{u}_i)_{i=1..n}$une famille libre de vecteur d'un K- espace vectoriel E .

a. Etudier la liberté de la famille F $= (\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, .., \vec{u}_{n-1} + \vec{u}_n, \vec{u}_1 + \vec{u}_n)$.

b. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]\ (ici\ n > 1)$.Justifier que $vect(\vec{u}_1, .., \vec{u}_p)\ et\ vect(\vec{u}_{p+1}, .., \vec{u}_n)$ sont en somme directe.

c. Soit F et G deux ss-e-v de E tels que : $F \oplus G = E$ et $G = vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$.

Soit $\vec{a} \in F$ *et* $G_a = vect(\vec{a} + \vec{u}_1, \vec{a}+\vec{u}_2, \dots, \vec{a} + \vec{u}_p)$.

i. Montrer que G_a et F sont supplémentaires dans E.

2. Justifier que G_a est de dimension finie et déterminer sa dimension. Ici E est de dimension finie p, de base B $= (\vec{e}_i)_{i=1..p}$. On pose : $\forall i \in [\![1, n-1]\!], \overrightarrow{\varepsilon_i} = \vec{e}_i - (\vec{e}_{i+1} + \vec{e}_{i+2} + .. + \vec{e}_p)$ et $\overrightarrow{\varepsilon_p} = \overrightarrow{e_p}$. Montrer que $B' = (\overrightarrow{\varepsilon_i})_{i=1..p}$est une base de . Soit $\vec{x} \in E$. Exprimer les composantes de $\vec{x}$ dans la base B ′ en fonction des composantes de $\vec{x}$ dans B.