Travail à faire pendant les vacances de Pâques

1. **Se reposer et profiter des premiers rayons de soleil (c'est important pour le moral)! Faites du sport.**
2. **Retravailler votre cours sur les espaces vectoriels et retravailler les exercices corrigés en classe .**
3. **S'exercer avec les exercices corrigés ci-dessous.**
4. **Chercher le DL 12. Faire absolument les deux premiers exercices !!**

Vous saurez un DC le lundi de la rentrée sur le travail fait pendant les vacances :

- **Connaitre son cours**
- **Savoir appliquer la définition d'un ss-e-v**
- **Savoir trouver une famille génératrice**
- **Savoir montrer que deux ss-e-v sont supplémentaires.**

Expliquer pourquoi les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas colinéaires. Idem avec $({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où r_1 et r_2 sont des réels <u>distincts.</u> Décrire autrement $G = vect(({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ ({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}})$ et $H = vect((1)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ (n)_{n\in\mathbb{N}})$

F est l'ensemble des suites constantes. F est une droite vectorielle, F est donc représentée par une droite passant par la suite nulle.

$(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas colinéaires car $a(1)_{n\in\mathbb{N}} + b(n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a + bn = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0\ (n = 0) \\ a + b = 0\ (n = 1) \end{cases} \Rightarrow a = b = 0.$

$({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas colinéaires car $a({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}} + b({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a{r_1}^n + b{r_2}^n = 0 \Rightarrow$
$\begin{cases} a + b = 0\ (n = 0) \\ ar_1 + br_2 = 0\ (n = 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a \\ a(r_1 - r_2) = 0 \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{car \\ r_1 \neq r_2}} a = b = 0.$

$G = vect(({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ ({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{(a{r_1}^n + {r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}} / a, b \in \mathbb{R}\} \underbrace{=}_{\substack{r_1\ et\ r_2 \\ racines\ de\ (e.c)}} \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - (r_1 + r_2)\, u_{n+1} + r_1 r_2 u_n = 0\}$

$H = vect((1)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ (n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{(an + b)_{n\in\mathbb{N}} / a, b \in \mathbb{R}\} = \{((an + b)1^n)_{n\in\mathbb{N}} / a, b \in \mathbb{R}\} \underbrace{=}_{\substack{1\ racine \\ double\ de\ (e.c)}} \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2\, u_{n+1} + u_n = 0\}$

Décrire autrement $F = vect\big((x \mapsto e^{2x}), (x \mapsto e^{-x})\big)$. Expliquer pourquoi les fonctions $(x \mapsto e^{2x}), (x \mapsto e^{-x})$ ne sont pas colinéaires. Représenter F.

$F = \{(x \mapsto ae^{2x} + be^{-x}) / a, b \in \mathbb{R}\} \underbrace{=}_{\substack{2\ et -1 \\ racines\ de\ (e.c)}} \{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f'' - f' - 2f = 0\}$

$(x \mapsto e^{2x}), (x \mapsto e^{-x})$ ne sont pas colinéaires car $a(x \mapsto e^{2x}) + b(x \mapsto e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ae^{2x} + be^{-x} = 0 \Rightarrow$
$\begin{cases} a + b = 0\ (n = 0) \\ ae^2 + b\frac{1}{e} = 0\ (n = 1) \end{cases} \Rightarrow a = b = 0.$ F est donc un plan vectoriel et est représenté par un plan passant par la fonction nulle.

Soit $P(X) = 1 + 2X + X^2$, $Q(X) = 2 - X - 2X^2$ et $R(X) = -1 + 2X + kX^2$.
Déterminer les réels k tels que : $vect(P, Q) = vect(P, Q, R)$.

$vect(P, Q) = vect(P, Q, R) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ l'autre \\ inclusion\ est \\ toujorus\ vraie}} vect(P, Q, R) \subset vect(P, Q) \Leftrightarrow R \in vect(P, Q) \Leftrightarrow R\ est\ c.l.de\ P\ et\ Q$

$\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / R = aP + bQ \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / -1 + 2X + kX^2 = a(1 + 2X + X^2) + b(2 - X - 2X^2)$

$\Leftrightarrow$le système (S): $\begin{cases} -1 = a + 2b \\ 2 = 2a - b \\ k = a - 2b \end{cases}$ d'inconnue $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est compatible.

Or, (S): $\begin{cases} a + 2b = -1 \\ 2a - b = 2 \\ a - 2b = k \end{cases} \Leftrightarrow (S)$: $\begin{cases} 2a = k - 1 \\ -b = 2 + 1 - k \\ a - 2b = k \end{cases} \Leftrightarrow (S)$: $\begin{cases} a = \frac{1}{2}(k - 1) \\ b = k - 3 \\ \frac{1}{2}(k - 1) - 2(k - 3) = k \end{cases} \Leftrightarrow (S)$: $\begin{cases} a = \frac{1}{2}(k - 1) \\ b = k - 3 \\ k = \frac{11}{5} \end{cases}$.

Donc $(S) est\ compatible \Leftrightarrow k = \frac{11}{5}$. Ainsi, $vect(P, Q) = vect(P, Q, R) \Leftrightarrow k = \frac{11}{5}$.

$F = \{f \in C^0\ ([-1,1], \mathbb{R})\ /\ f_{/[-1,0]}\ \ et\ f_{/[0,1]}$ sont affines $\}$ est-il un ss-e-v de C^0 $([-1,1], \mathbb{R})$? Si oui en trouver une base.

1. Montrons que F ss-e-v du $\mathbb{R}$-e-v C^0 $([-1,1], \mathbb{R})$.

$F = \{f \in F\ ([-1,1], \mathbb{R})\ /\ \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in [-1,0], f(x) = ax + b\ et\ \ \forall x \in [0,1], f(x) = cx + d\ et\ f\ continue\}$
$F = \{f \in F\ ([-1,1], \mathbb{R})\ /\ \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in [-1,0], f(x) = ax + b\ et\ \ \forall x \in [0,1], f(x) = cx + d\ et\ f\ continue\ en\ 0\}$
$F = \{f \in F\ ([-1,1], \mathbb{R})\ /\ \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in [-1,0], f(x) = ax + b\ et\ \ \forall x \in [0,1], f(x) = cx + d\ et\ b = d\}$
$F = \{f \in F\ ([-1,1], \mathbb{R})\ /\ \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in [-1,0], f(x) = ax + b\ et\ \ \forall x \in [0,1], f(x) = cx + b\}$
$F = \{f: \left(x \mapsto \begin{cases} ax + b\ si\ x \in [-1,0] \\ cx + b\ si\ x \in [0,1] \end{cases}\right) / a, b, c\ réels\} = \{a\left(x \mapsto \begin{cases} x\ si\ x \in [-1,0] \\ 0\ si\ x \in [0,1] \end{cases}\right) + b(x \mapsto 1) + c\left(x \mapsto \begin{cases} 0\ si\ x \in [-1,0] \\ x\ si\ x \in [0,1] \end{cases}\right) / a, b, c\ réels\}.$

$F = vect(u, v, w)$ où $u: \left(x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \in [-1,0] \\ 0 \text{ si } x \in [0,1] \end{cases}\right), v: (x \mapsto 1), w: \left(x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [-1,0] \\ x \text{ si } x \in [0,1] \end{cases}\right)$.

Comme u, v et w sont des fonctions continues sur $[-1\,;1]$, F est un ss-e-v de $C^0([-1,1], \mathbb{R})$.

2. La famille (u, v, w) est une famille génératrice de F. Montrons que cette famille est libre.

Soit a et b et c des réels tels que $au + bv + cw = 0$.

Alors, $\forall x \in [-1; 1], au(x) + bv(x) + cw(x) = 0$ *i.e.* $\forall x \in [-1; 0], ax + b = 0$ et $\forall x \in [0; 1], b + cx = 0$.

En particulier, pour $x = 0$, cela donne $b = 0$. Puis pour $x = -1$, cela donne $-a = 0$ donc $a = 0$. Et enfin, pour $x = 1$, cela donne $c = 0$.

Donc, la famille (u, v, w) est libre et constitue ainsi une base de F.

Soit $F = \left\{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 / \begin{cases} 3x - y + z - t + w = 0 \\ 2x - y - 2z - t - w = 0 \end{cases}\right\}$ et $G = \{(a, a + 2b, b - a, 2a + b, a + b)/(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

a. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}^5$. Déterminer une base de chacun d'entre eux.

b. Montrer que $F = vect\big((-2, -6,0,1,1), (3,9, -1, -1,0), (1,4, -1, -1,1)\big)$

c. Pour quelles valeurs du réel x, $(2x, 0,3, -3, x) \in G$?

d. Donner un système d'équations décrivant G (comme pour F).

e. F et G sont-il supplémentaires dans $\mathbb{R}^5$?

a. Montrons que G est un ss-e-v de $\mathbb{R}^5$ et déterminons une base de G.

$G = \{a(1,1, -1,2,1) + b(0,2, -1,2,1)/a, b \in \mathbb{R}^2\} = vect\big((1,1, -1,2,1), (0,2, -1,2,1)\big)$. Comme $(1,1, -1,2,1)$ *et* $(0,2, -1,2,1)$ sont dans $\mathbb{R}^5$, G est un ss-e-v de $\mathbb{R}^5$. $(1,1, -1,2,1), (0,2, -1,2,1)$ ne sont clairement pas colinéaires donc $((1,1, -1,2,1), (0,2, -1,2,1))$ est une base de G et $dimG = 2$.

a. Montrons que F est un ss-e-v de $\mathbb{R}^5$ puis déterminons une base de F.

$F \subset \mathbb{R}^5$. Prenons $x = y = z = t = w = 0$. *Alors* $\begin{cases} 3x - y + z - t + w = 0 \\ 2x - y - 2z - t - w = 0 \end{cases}$. Donc $(0,0,0,0,0) \in F$.

Considérons $X_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1, w_1)$ *et* $X_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2, w_2)$ deux éléments de F *et* a_1 *et* a_2 deux réels.

$a_1X_1 + a_2 X_2 = a_1(x_1, y_1, z_1, t_1, w_1) + a_2(x_2, y_2, z_2, t_2, w_2) = (a_1x_1 + a_2x_2, a_1y_1 + a_2y_2, a_1z_1 + a_2z_2, a_1t_1 + a_2t_2, a_1w_1 + a_2w_2)$ et

$$\begin{cases} 3(a_1x_1 + a_2x_2) - (a_1y_1 + a_2y_2) + a_1z_1 + a_2z_2 - (a_1t_1 + a_2t_2) + a_1w_1 + a_2w_2 \\ \quad = a_1\left(\underbrace{3x_1 - y_1 + z_1 - t_1 + w_1}_{=0}\right) + a_2(\underbrace{3x_2 - y_2 + z_2 - t_2 + w_2}_{=0}) = 0 \\ de\ même, 2(a_1x_1 + a_2x_2) - (a_1y_1 + a_2y_2) - 2(a_1z_1 + a_2z_2) - (a_1t_1 + a_2t_2) - (a_1w_1 + a_2w_2) = 0 \end{cases}$$

Donc, $a_1X_1 + a_2 X_2 \in F$. Ainsi F est un ss-e-v de $\mathbb{R}^5$.

Cherchons une famille génératrice de F pour obtenir une base puis la dimension de F.

$$\begin{cases} 3x - y + z - t + w = 0 \\ 2x - y - 2z - t - w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z - t + w = 0 \\ -x - 3z - 2w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z - t + w = 0 \\ x = -3z - 2w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-3z - 2w) - y + z - t + w = 0 \\ x = -3z - 2w \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -8z - 5w - t \\ x = -3z - 2w \end{cases}$$

Donc, $F = \left\{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 / \begin{cases} y = -8z - 5w - t \\ x = -3z - 2w \end{cases}\right\} = \{(-3z - 2w, -8z - 5w - t, z, t, w) \in \mathbb{R}^5/(z, w, t) \in \mathbb{R}^3\}$

$= \{z(-3, -8,1,0,0) + w(-2, -5,0,0,1) + t(0, -1,0,1,0)/(z, w, t) \in \mathbb{R}^3\} = vect((-3, -8,1,0,0), (-2, -5,0,0,1), (0, -1,0,1,0))$.

Donc, $((-3, -8,1,0,0), (-2, -5,0,0,1), (0, -1,0,1,0))$ est une famille génératrice de F. De plus, cette famille est libre car échelonnée en 0 (par la droite) . Donc, $(\underbrace{(-3, -8,1,0,0)}_{=U}, \underbrace{(-2, -5,0,0,1)}_{=V}, \underbrace{(0, -1,0,1,0)}_{=W})$ est une base de F et $dimF = 3$.

b. par double inclusion je remarque que $X = (-2, -6,0,1,1), Y = (3,9, -1, -1,0), Z = (1,4, -1, -1,1)$ vérifient $\begin{cases} Y = -U - W \\ X = V + W \\ Z = -U + V - W \end{cases}$. Donc, X, Y *et* Z sont dans F et comme F est stable par combinaison linéaire, j'en déduis que $vect(X, Y, Z) \subset F$. De plus, $X + Y - Z = W$ *et* $\begin{cases} Y + X + Y - Z = -U \\ X - (X + Y - Z) = V \\ X + Y - Z = W \end{cases}$. Donc U, V et W sont des combinaisons linéaires de X, Y *et* Z et par conséquent, $F \subset vect(X, Y, Z)$. Ainsi, $F = vect(X, Y, Z)$.

c. $G = \{(a, a + 2b, b - a, 2a + b, a + b)/(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

$(2x, 0,3, -3, x) \in G \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2/(2x, 0,3, -3, x) = (a, a + 2b, b - a, 2a + b, a + b)$

$$\Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases} a=2x\\ a+2b=0\\ b-a=3\\ 2a+b=-3\\ a+b=x\end{cases} \Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases} a=2x\\ 3a=-6\\ 3b=3\\ 2a+b=-3\\ a+b=x\end{cases} \Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases} x=-1\\ a=-2\\ b=1\\ -3=-3\\ x=-1\end{cases}$$

Ainsi, $(2x,0,3,-3,x)\in G \Leftrightarrow x=-1$.

d. $(x,y,z,t,w)\in G \Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/(x,y,z,t,w)=(a,a+2b,b-a,2a+b,a+b)$

$$\Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases} a=x\\ a+2b=y\\ b-a=z\\ 2a+b=t\\ a+b=w\end{cases} \Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases} a=x\\ 3a=y-2z\\ 3b=y+z\\ 2a+b=t\\ a+b=w\end{cases} \Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases} x=\frac{1}{2}(y-2z)\\ a=\frac{1}{2}(y-2z)\\ b=\frac{1}{3}(y+z)\\ (y-2z)+\frac{1}{3}(y+z)=t\\ \frac{1}{2}(y-2z)+\frac{1}{3}(y+z)=w\end{cases}.$$

Ainsi, $G=\left\{(x,y,z,t,w)\in\mathbb{R}^5/\begin{cases} 2x-y+2z=0\\ (y-2z)+\frac{1}{3}(y+z)=t\\ \frac{1}{2}(y-2z)+\frac{1}{3}(y+z)=w\end{cases}\right\}$.

e. Cherchons si tout vecteur de $\mathbb{R}^5$ s'écrit de manière unique comme somme d'une élément de G et d'un élément de F.
Soit $X=(x,y,z,t,w)\in\mathbb{R}^5$. Je cherche $U\in F$ et $V\in G$ tels que $X=U+V$.
Analyse : supposons que de tels U et V existent. Alors ,

$U=(x',y',z',t',w')\in\mathbb{R}^5/\begin{cases} 3x'-y'+z'-t'+w'=0\\ 2x'-y'-2z'-t'-w'=0\end{cases}$ $(**)$

$V=(a,a+2b,b-a,2a+b,a+b)$ avec a et b réels

Et $(x,y,z,t,w)=(x',y',z',t',w')+(a,a+2b,b-a,2a+b,a+b)$ i.e. $\begin{cases} x=x'+a\\ y=y'+a+2b\\ z=z'+b-a\\ t=t'+2a+b\\ w=w'+a+b\end{cases}$.

Donc en utilisant $(**)$, j' obtiens: $\begin{cases} 3(x-a)-(y-a-2b)+(z+a-b)-(t-2a-b)+(w-a-b)=0\\ 2(x-a)-(y-a-2b)-2(z+a-b)-(t-2a-b)-(w-a-b)=0\end{cases}$.

$\begin{cases} b=-3x+y-z+t-w\\ 6b=-2x+y+2z+t+w\end{cases}$. Donc, $\begin{cases} b=-3x+y-z+t-w\\ 16x-5y+8z-5t+7w=0\end{cases}$.

Donc si $16x-5y+8z-5t+7w\neq 0$ alors il n'existe aucuns $U\in F$ et $V\in G$ tels que $X=U+V$. En particulier, $X=(1,0,0,0,0)$ ne s'écrit pas sous la forme $X=U+V$ telle que $U\in F$ et $V\in G$
ainsi, F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^5$.

Soit E l'espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[0,1]$. Soit F l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ constantes et $G=\left\{f\in C^0([0,1],\mathbb{R})/\int_0^1 f(t)dt=0\right\}$

a. Justifier que F est une droite vectorielle.
b. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de E supplémentaires dans E.
c. Décomposer $(x\mapsto x^2\ln(1+x))$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .

a. $F=\{(x\mapsto a)/a\in\mathbb{R}\}=\{a(x\mapsto 1)/a\in\mathbb{R}\}=vect(f_0)$où $f_0:(x\mapsto 1)$. Comme f_0 n'est pas la fonction nulle et appartient à E, j'en déduis que F est une droite vectorielle de E.
b. En particulier, F est un ss-e-v de E.

<u>Montrons que G est aussi un ss-e-v de E</u>.

- $G=\left\{f\in E/\int_0^1 f(t)dt=0\right\}$ $donc\ \ G\subset E$.
- La fonction w: $(x\mapsto 0)$ est élément de G car $\int_0^1 w(t)dt=\int_0^1 0.dt=0$.
- Soit $f\ et\ g$ deux éléments de G et a et b deux réels. Comme f et g sont continues sur $[0,1]$, $af+bg$ l'est aussi et $\int_0^1(af+bg)(t)dt=a\underbrace{\int_0^1 f(t)dt}_{\substack{=0\\ car\ f\in G}}+b\underbrace{\int_0^1 g(t)dt}_{\substack{=0\\ car\ g\in G}}=0$. Donc, $af+bg\in G$.

Ainsi, G est un ss-e v de E.

<u>Montrons que $F\oplus G=E$.</u>

Soit $\varphi\in E$. Je cherche $f\in F\ et\ g\in G$ telles que $\varphi=f+g$.
Analyse : supposons que de telles fonctions f et g existent.

Alors $\begin{cases} \forall x\in\mathbb{R},\varphi(x)=f(x)+g(x)\\ \int_0^1 g(t)dt=0\\ \exists a\in\mathbb{R}/\forall x\in\mathbb{R},f(x)=a\end{cases}$. Alors, $\int_0^1\varphi(t)dt=\int_0^1 f(t)+g(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\underbrace{\int_0^1 g(t)dt}_{=0\ car\ g\in G}=\int_0^1 adt+0=a$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 \varphi(t)dt\ \ et\ g(x) = \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(t)dt$.
Ainsi, si f et g existent alors nécessairement $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 \varphi(t)dt\ \ et\ g(x) = \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(t)dt$ donc f et g sont uniques.
Synthèse Soit f et g définies par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 \varphi(t)dt\ \ et\ g(x) = \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(t)dt$.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + g(x) = \int_0^1 \varphi(t)dt + \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(t)dt = \varphi(x)$.
De plus, $f\ est\ constante\ i.e.\ f \in F$.
Enfin, posons $\lambda = \int_0^1 \varphi(t)dt$. Alors, $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x) - \lambda\,dx = \int_0^1 \varphi(x)dx - \lambda\int_0^1 1\,dx = \int_0^1 \varphi(x)dx - \lambda = 0$. Donc $g \in G$.
Ainsi, f et g conviennent et d'après l'analyse, sont les seules qui conviennent.
J'en conclus que $F \oplus G = E$.

a. Prenons $\varphi(x) = x^2\ln(1+x)$.

Alors $\varphi = f + g$ où $f \in F\ et\ g \in G\ et$ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 t^2\ln(1+t)\,dt$ et $g(x) = x^2\ln(1+x) - f(x)$.

Or, $\int_0^1 t^2\ln(1+t)\,dt \underbrace{=}_{\substack{CV\\u=1+t\\du=dt}} \int_1^2 (u-1)^2\ln(u)\,du \underbrace{=}_{IPP} \left[\frac{(u-1)^3}{3}\ln(u)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{(u-1)^3}{3}\frac{1}{u}du = \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\int_1^2 u^2 - 3u + 3 - \frac{1}{u}du$

$= \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\left[\frac{u^3}{3} - \frac{3u^2}{2} + 3u - \ln(u)\right]_1^2 = \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3} - 6 + 6 - \ln(2) - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 3\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{14+9-18}{6}\right) + \frac{2}{3}\ln(2) = \frac{2}{3}\ln(2) - \frac{5}{18}$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{3}\ln(2) - \frac{5}{18}$ et $g(x) = x^2\ln(1+x) - \frac{2}{3}\ln(2) + \frac{5}{18}$.

Soit $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n, u_{n+4} = u_n\}$ et $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_3 = u_2 = u_1 = u_0 = 0\}$

a. Montrer que $F\ et\ G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
b. Montrer que $F\ et\ G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
c. Déterminer une base de F.

a. Montrons tout d'abord que F et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$F = vect(r,s,t,y)$ où $r = (1,0,0,\ldots\ldots), s = (0,1,0,0,\ldots\ldots), t = (0,0,1,0,0,\ldots)et\ y = (0,0,0,1,0,0\ldots)$. Donc F est un ss-e-v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et (r,s,t,y) est génératrice de F. + Tapez une équation ici.
$G \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ et$ La suite nulle est évidemment élément de G.
Soit $(u,v) \in G^2\ et\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$. $\forall k \in \{0,1,2,3\}, u_k = v_k = 0\ donc\ au_k + bv_k = 0$. Donc, $au + bv \in G$.
Ainsi G est un ss-e-v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b. Montrons qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Soit u une suite réelle. Je cherche une suite $v \in F$ et une suite $w \in G$ telles que $u = v + w$.
Analyse : Supposons que v et w existent. Alors,$\forall n, u_n = v_n + w_n\ et\ v_{n+4} = v_n$ et $w_3 = w_2 = w_1 = w_0 = 0$. Alors, $u_0 = v_0, u_1 = v_1, u_2 = v_2\ et\ u_3 = v_3$. Donc $v = (u_0,u_1,u_2,u_3,u_0,u_1,u_2,u_3,u_0,u_1,u_2,u_3,\ldots) = u_0r + u_1s + u_2t + u_3y$.
Alors, $\forall n, w_n = u_n - v_n$.
Les seules suites v et w qui peuvent convenir sont $v = (u_0,u_1,u_2,u_3,u_0,u_1,u_2,u_3,u_0,u_1,u_2,u_3,\ldots) = u_0r + u_1s + u_2t + u_3y$.
et $\forall n, w_n = u_n - v_n$.
Synthèse Soit $v = (u_0,u_1,u_2,u_3,u_0,u_1,u_2,u_3,u_0,u_1,u_2,u_3,\ldots) = u_0r + u_1s + u_2t + u_3y$ et $\forall n, w_n = u_n - v_n$.
Alors, $u = v + w$ et $v \in vect(r,s,t,y) = F$ et et $w_0 = u_0 - v_0 = 0\ \ w_1 = u_1 - v_1 = 0\ ,\ w_2 = u_2 - v_2 = 0$ et $w_3 = u_3 - v_3 = 0$ i.e. $w \in G$. Donc v et w conviennent et d'après l'analyse sont les seules suites qui conviennent.
J'en conclus que toute suite réelle s'écrit de manière unique comme somme d'une suite de F et d'une suite de G . Ainsi, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

c. (r,s,t,y) est génératrice de F. Montrons sa liberté.

Soit a,b,c et d des réels tels que $ar + bs + ct + dy = 0$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, ar_n + bs_n + ct_n + dy_n = 0(**)$.

a. En particulier $(**)$ donne, $\begin{cases} a = 0\ pour\ n = 0 \\ b = 0\ pour\ n = 1 \\ c = 0\ pour\ n = 2 \\ d = 0\ pour\ n = 3 \end{cases}$. Ainsi, (r,s,t,y) est libre et est finalement une base de F.

Soit Q un polynôme réel fixé $non\ nul\ et\ de\ degré\ p$. Soit F l'ensemble des polynômes divisibles par Q . Montrer que F et $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ sont deux sous-e-v supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

■$\mathbb{R}_{p-1}[X] = vect(1,X,X^2,\ldots,X^{p-1})$ est un ss-e-v de $\mathbb{R}[X]$ (C'est du cours !!).
Montrons que $F = \{\,QU/U \in \mathbb{R}[X]\}$est un ss-e-v de $\mathbb{R}[X]$.

- $F \subset \mathbb{R}[X]$.
- Si P est le polynôme nul alors $P = 0 \times U$ donc le polynôme nul est élément de F.
- Soit P_1 et P_2 deux polynômes de F. Soit a et b deux réels. Alors il existe U_1 et U_2 tels que $P_1 = QU_1\ et\ P_2 = QU_2$. Donc, $aP_1 + bP_2 = aQU_1 + bQU_2 = QaU_1 + QbU_2 = Q(aU_1 + bU_2).Donc$ Donc, $aP_1 + bP_2 \in F$.

Ainsi F est un ss-e-v de $\mathbb{R}[X]$.
■$F \oplus \mathbb{R}_{p-1}[X] = \mathbb{R}[X]$ est une autre façon d'écrire le théorème de la division euclidienne .

En effet, $\forall P \in \mathbb{R}[X], \exists\,! (U,V) \in \mathbb{R}[X]^2, P = QU + V$ *et* $\deg(V) < \deg(Q)$ ce qui s'écrit aussi $\forall P \in \mathbb{R}[X], \exists\,! H \in F, \exists\,! V \in \mathbb{R}_{p-1}[X], P = H + V$.Cela signifie que $F \oplus \mathbb{R}_{p-1}[X] = \mathbb{R}[X]$.

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \tilde{P}(1) = 0\}$ et $G = \{aX / a \in \mathbb{R}\}$.

- **a.** Montrer que G est une droite vectorielle et F est un ss-e-v de $\mathbb{R}[X]$.
- **b.** Montre que $F \oplus G = \mathbb{R}[X]$.
- **c.** Décomposer X^2 dans que $F \oplus G$.
- **d.** Donner un sous espace vectoriel de E qui ne soit pas supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.
- **e.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une famille base de $F \cap \mathbb{R}_n[X]$.

a. $G = vect(X)$. Comme X est un polynôme non nul de ℝ[X], G est une droite vectorielle de $\mathbb{R}[X]$.

$F \underbrace{=}_{\substack{d'après \\ la\ formule \\ de\ Taylor \\ en\ 1}} vect(((X-1)^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. Donc F est un ss-e-v de $\mathbb{R}[X]$. (on peut aussi prouver que F est un ss-e-v de ℝ[X] avec la définition d'un ss-e-v)

b. Montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Je cherche $U \in F$ et $V \in G$ tels que $P = U + V$.
Analyse : supposons que de tels polynômes U et V existent.
Alors $\begin{cases} P = U + V \\ \tilde{U}(1) = 0 \\ il\ existe\ a\ réel\ tel\ que\ V = aX \end{cases}$. Donc, $P(X) = U(X) + aX$ *et par suite*, $\tilde{P}(1) = \tilde{U}(1) + a = a$.
Donc $V(X) = \tilde{P}(1)X$ *et* $U(X) = P(X) - \tilde{P}(1)X$. Donc si U et V existent, ils sont uniques et valent $V(X) = \tilde{P}(1)X$ *et* $U(X) = P(X) - \tilde{P}(1)X$.
Synthèse posons $V(X) = \tilde{P}(1)X$ *et* $U(X) = P(X) - \tilde{P}(1)X$.
Alors $U(X) + V(X) = P(X)$ *et* $V \in G$ *et* $\tilde{U}(1) = \tilde{P}(1) - \tilde{P}(1) = 0$ *donc* $U \in F$. Ainsi, U et V conviennent et sont les seuls polynômes qui conviennent.
J'en conclus que $F \oplus G = \mathbb{R}[X]$.

c. $X^2 = \underbrace{(X^2 - X)}_{\in F} + \underbrace{X}_{\in G}$ est la décomposition de X^2 dans la somme directe $F \oplus G$.

d. $H = vect(X-1) \subset F$ (car $X - 1 \in F$ et F est stable par combinaison linéaire). Donc, $F \cap H = H \neq \{\vec{0}\}$.
J'en déduis que F et H ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. $F \cap \mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, \tilde{P}(1) = 0\}$
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Ecrivons P dans la base de Taylor en 1 : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\,(X-1)^k$. Alors,

$$P \in F \Leftrightarrow \tilde{P}(1) = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0 \Leftrightarrow P = \sum_{k=1}^{n} a_k\,(X-1)^k.$$

Ainsi, $F \cap \mathbb{R}_n[X] = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\,(X-1)^k \;/\; a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\} = vect(\,((X-1)^k\,)_{k=1\dots n})$. De plus, $((X-1)^k\,)_{k=1\dots n}$ est échelonnée en degré sans polynôme nul donc est libre. J'en conclus que $((X-1)^k\,)_{k=1\dots n}$ est une base de $F \cap \mathbb{R}_n[X]$ qui est par conséquent de dimension n.

$\forall a \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_a : \left(x \to \sqrt{|x-a|}\right)$. Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels distincts. Montrer que la famille $\left(\varphi_{a_1}, \varphi_{a_2}, \dots, \varphi_{a_n}\right)$ est libre dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. $\varphi_a : \left(x \to \sqrt{|x-a|}\right)$est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est dérivable que sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$.
En effet , la valeur absolue et la racine carrée sont continues sur tout le domaine de définition respectif donc $\varphi_a : \left(x \to \sqrt{|x-a|}\right)$est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}$. De plus, la valeur absolue et la racine carrée ne sont pas dérivables en 0 mais sont dérivables sur leur domaine de défintion respectif privé de 0. Et $x = a \Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow |x-a| = 0$. Donc, $\varphi_a$est au moins dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$. Enfin, $\forall x \neq a, \tau(x) = \frac{\varphi_a(x) - \varphi_a(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{|x-a|}}{x-a} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x-a|}}\ si\ x > a \\ \frac{-1}{\sqrt{|x-a|}}\ si\ x < a \end{cases}$.
Donc, $\lim\limits_{x\to a^+} \tau(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} \tau(x) = -\infty$. Ainsi, φ_a n'est pas dérivable en a.

- Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que : $\lambda_1\varphi_{a_1} + \lambda_2\varphi_{a_2} + \dots + \lambda_n\varphi_{a_n} = 0$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1\varphi_{a_1}(x) + \lambda_2\varphi_{a_2}(x) \dots + \lambda_n\varphi_{a_n}(x) = 0$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Alors, $\lambda_k\varphi_{a_k} = -\lambda_1\varphi_{a_1} - \dots - \lambda_{k-1}\varphi_{a_{k-1}} - \lambda_{k+1}\varphi_{a_{k+1}} - \dots - \lambda_n\varphi_{a_n}$. Or, si $\lambda_k \neq 0$ alors $\lambda_k\varphi_{a_k}$ n'est pas dérivable en a_k tandis que $-\lambda_2\varphi_{a_2} - \dots - \lambda_{k-1}\varphi_{a_{k-1}} - \lambda_{k+1}\varphi_{a_{k+1}} - \dots - \lambda_n\varphi_{a_n}$est dérivable en a_k (comme combinaison linéaire de fonctions dérivables en a_k) .. ce qui n'est pas possible puisque ces deux fonctions sont égales. J'en déduis que $\lambda_k = 0$. Ainsi la famille $\left(\varphi_{a_1}, \varphi_{a_2}, \dots, \varphi_{a_n}\right)$ est libre.