CORRIGE du QCM
MATRICES et DETERMINANTS

1) L'inverse de $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est

- $\dfrac{1}{cb-ad}\begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}$.
- $\dfrac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.
- $\dfrac{1}{cb-ad}\begin{pmatrix} -d & c \\ b & -a \end{pmatrix}$.
- $\dfrac{1}{cb-ad}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Cours

2) Soit A une matrice carree d'ordre $p \geq 2$ telle que $A^2 - 4A - 5I = 0$.

- A est inversible et $A^{-1} = A - 4I$.
- A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{5}(A-4)$.
- $A^n = \dfrac{(5^n - (-1)^n)}{6}A + \dfrac{(5^n + 5(-1)^n))}{6}I$.
- $A^n = 4^{n-1}A + 5^{n-1}I$.

1et 2. $A^{-1} = \frac{1}{5}(A - 4I)$

3 et 4. Je sais que A^nest de la forme $a_nA + b_nI$. La forme donnée au 3. fonctionne pour $n = -1, n = 0, n = 1, n = 2\dots$ Donc elle doit être correcte ! C'est un QCM donc je tente de gagner du temps en ne faisant pas tous les calculs….mais je suis capable de les faire…

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP$ est diagonale
- $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et PAP^{-1} est diagonale
- $A^n = \begin{pmatrix} 3 \times 2^n - 2 & -3 \times 2^{n+1} + 6 \\ 2^n - 1 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}$
- $A^n = \begin{pmatrix} 3 \times 2^n - 2 & 2^{n+1} - 2 \\ -3 \times 2^n + 3 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}$

1 et 2. Je calcule P^{-1} puis $P^{-1}AP$ et PAP^{-1}.

$PAP^{-1} = diag(2,1)$

3 et 4. Donc,

$A^n = P^{-1}diag(2^n, 1)P$. Donc les formes proposées aux 3 et 4 sont possibles. La troisième est vraie pour n=0,1,2...

4)

Soit A une matrice carre d'ordre n à coefficients complexes telle qu'il existe un entier naturel p non nul tel que $A^p + A^{p-1} + \dots + A + I = O$

- A est inversible d'inverse A^p.
- A n'est pas inversible.
- A est nilpotente.
- A est inversible d'inverse $-I - A - A^2 - \dots - A^{p-1}$.

$I = A(-I - A - A^2 \dots - A^{p-1})$

5) $A = \begin{pmatrix} 2i+1 & i+1 & -i-1 \\ 0 & i & 0 \\ 2i+2 & 2i+2 & -i-2 \end{pmatrix}$.

- il exsite un entier naturel p tel que : $A^p + A^{p-1} + \dots + I = 0$.
- Il n'existe pas d' entier naturel p tel que : $A^p + A^{p-1} + \dots + I = 0$.
- A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2i+1 & 1-i & i-1 \\ 0 & i & 0 \\ -2i+2 & -2i+2 & i+2 \end{pmatrix}$.
- A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2i+1 & 1-i & i-1 \\ 0 & -i & 0 \\ -2i+2 & -2i+2 & i-2 \end{pmatrix}$.

1et 2. $A = iB + C$ avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. On vérifie que $B - C = I$, $BC = CB = 0$ et $B^2 = B$ et $C^2 = -C$.

Donc $A^2 = (iB)^2 + C^2 = -B - C$ et

$A^3 = (iB)^3 + C^3 = -iB + C$. Donc,

$A^3 + A^2 + A + I = 0$. Et $p = 3$ convient.

3 et 4.Et $A^{-1} = -I - A - A^2 = C - B - iB - C + B + C$
$= C - iB$

6) Soit N une matrice nilpotent d'indice p entier naturel non nul et λ un scalaire non nul

- $N-\lambda I$ est inversible et son inverse est $-\lambda^{-1}I-\lambda^{-2}N-\ldots\lambda^{-p}N^{p-1}$.
- $I+N$ est inversible et son inverse est $I-N+N^2+\ldots+(-N)^{p-1}$.
- $N-\lambda I$ est nilpotente.
- λN est nilpotente.
- λN est niloptente d'indice p.

2. $I=I^p-(-N)^p=(I-(-N))\sum_{k=0}^{p-1}(-N)^k$
Donc, $N+I$ inversible et son inverse est $\sum_{k=0}^{p-1}(-N)^k$.

1. $-\lambda^p I=N^p-(\lambda I))^p=(N-\lambda I)\sum_{k=0}^{p-1}\lambda^{p-1-k}N^k$
Donc, $N-\lambda I$ inversible et son inverse est $-\frac{1}{\lambda^p}\sum_{k=0}^{p-1}\lambda^{p-1-k}N^k=-\sum_{k=0}^{p-1}\lambda^{-1-k}N^k$
3.inversible $\Longrightarrow$non nilotente ; car,
nilpotente $\Longrightarrow$non inversible
$4\ et\ 5.\ (\lambda N)^p=\lambda^p N^p=0$

7) Soit $B=\begin{pmatrix}-1&-1&-3\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

- B n'est pas inversible.
- B inversible et $B^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&6\\1&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.
- B est inversible et $B^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1&-6\\1&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.
- B est inversible et $B^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&6\\-1&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.
- la comatrice de B est $\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&-1&0\\6&-3&-1\end{pmatrix}$.
- la comatrice de B est $\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&2&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$.

Je calcule la comatrice et le déterminant et j'en déduis $B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}com(B)^T$

8) Soit $(S)\begin{cases}3x+y&=8\\-2x+y-2z&=-1\\x-2y+3z&=-3\end{cases}$

- $(S)\Leftrightarrow AX=B$ où $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-2&1&-2\\1&-2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8&-1&-3\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}$
- $(S)\Leftrightarrow AX=B$ où $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-2&1&-2\\1&-2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\-1\\-3\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$
- $(S)\Leftrightarrow AX=B$ où $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\1&1&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8&-1&-3\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}$
- $(S)\Leftrightarrow AX=B$ où $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\1&1&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\-1\\-3\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

9) $(S)\begin{cases}3x+y&=8\\-2x+y-2z&=-1\\x-2y+3z&=-3\end{cases}$:

- a une infinite de solutions.
- admet une unique solution $(2,2,-\frac{1}{2})$.
- n'admet aucune solution.
- admet une unique solution $(1,5,2)$.

La matrice $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-2&1&-2\\1&-2&3\end{pmatrix}$ est inversible car $\det(A)\neq 0$. Donc (S) admet une unique solution. Et j'ai vérifié : (1,2,5) est solution.

10) A la matrice des coefficients du systeme (S) $\begin{cases} 3x+y & =8 \\ -2x+y-2z & =-1 \\ x-2y+3z & =-3 \end{cases}$

- n'est pas inversible.
- est inversible et A^{-1} a des coefficients entiers.
- n'admet pas 0 comme valeur propre.
- est inversible et son inverse est gal A.
- a un determinant nul car la somme des coefficients de sa deuxime colonne est nulle
- a un determinant qui vaut 1.
- a un determinant qui vaut 25.

$det(A) = 1$ et A est à coeff entiers donc $com(A)$ l'est aussi (puisque ses coeff sont des produits, sommes et différences des coeff de A) . Donc A^{-1}existe et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} com(A)^T$donc A^{-1}est à coeff entiers.

11) Soit A une matrice carree d'ordre $n \geq 2$ a coefficients dans K et λ un scalaire.

- λ est valeur propre de $A \Leftrightarrow det(A-\lambda I) = 0$
- λ est valeur propre de $A \Leftrightarrow AX = 0$ admet une unique solution
- un vecteur propre de A est une colonne X telle que $AX = 0$.
- un vecteur propre de A de valeur propre λ est une colonne X telle que $AX = \lambda X$

12) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- A n'est pas inversible.
- les valeurs propres de A sont 0 et 4.
- les valeurs propres de A sont 1 et 4.
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A de valeur propre 4.
- Aest inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(5I - A)$
- $A^n = I + \frac{1}{3}(4^n - 1)J$ avec $n \in \mathbb{N}$.
- $rg(J) = 3$
- $Im(J)$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$
- $Ker(J)$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix}$

2. $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ *ou* $\lambda = 4$
1. *donc* $\det(A) \neq 0$ et A inversible.
5. $A = I + J$ donc $A^2 = I + 5J \underbrace{=}_{J=A-I} 5A - 4I$. Alors $I = -\frac{1}{4}(A - 5I)A$.

.Avec FBN, on sait que $A^n = a_n I + b_n J$ et $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ et $b_0 = 0, b_1 = 1,\ b_2 = 5$. Donc,
la réponse 6 semble correcte (sans faire les caculs jusqu'au bout) .

7. $rg(J) = 1$car $J \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
8. $Im(J) = \{J\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} /x,y,z\ réels\}$ $= \{\begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} /x,y,z\ réels\} = \{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} /a\ réel\}$
9. $Ker(J) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} /x,y,z\ réels\ et\ J\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ $= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} /x,y,z\ réels\ et\ x+y+z = 0\}$ $= \{\begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} /y,z\ réels\ \}$

13) Soit (S_a) $\begin{cases} x+ay+z & =1 \\ ax+y+(a-1)z & =a \\ x+y+z & =a+1 \end{cases}$ et A la matrice des coefficients de(S_a).

- $rg(S_a) = 3$
- (S_a) est de Cramer $\Leftrightarrow a \neq 1$
- (S_a) est toujours compatible.
- Si $a \neq 1$ alors l'unique solution de (S_a) est $\frac{1}{1-a}\left(1-2a-a^2+a^3,\quad a,\quad a(1-a^2)\right)$.
- $\mathrm{tr}(A) = 4$
- $tr(A^T A) = 15 - 2a + 3a^2$

$\det(A) = 1 - a$. Donc,
(S) a une unique solution sietssi $a = 1$. sietssi $rg(S)$=3.
Pour $a = 1$, on vérifie que le triplet proposé à la question 4 est solution.

14) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

Van der Monde

- $=(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$.
- $=(d-c)(d-b)(c-b)(b-a)(c-a)(d-a)$.
- $=(a-b)(a-c)(a-d)(b-a)(b-c)(b-d)(c-a)(c-b)(c-d)(d-a)(d-b)(d-c)$
- vaut 0 sietssi $a \in \{b,c,d\}$.
- $\neq 0$ sietssi a,b,c,d tous distincts.

15) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$avec $n \geqslant 2$.

- $A^T A$ est symetrique
- A est antisymetrique sietssi tous les coefficients de la diagonale de A sont nuls.
- $A = 0$ sietssi $AA^T = 0$.
- la decomposition de A comme somme une matrice symetrique et une matrice antisymetrique est $A = \frac{1}{2}(AA^T + A^T A)$
- $tr(AA^T)$ est la somme des carres des coefficients de la diagonale de A
- $det(AA^T) = (det(A))^2$.
- $det(A + A^T) = 2det(A)$.
- $tr(AA^T) = (tr(A))^2$.
- $tr(A + A^T) = 2tr(A)$.
- $Ker(A) \subset Ker(A^T A)$.

1.$(AA^T) = (A^T)^T A^T = AA^T$.
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ n'est aps anti-sym.
3 *et* 5. $tr(AA^T)$ =somme des carrés de tous les coeff de A.
Donc $AA^T = 0 \Longrightarrow tr(AA^T) = 0 \Longrightarrow$
les coeff de A tous nuls $\Longrightarrow A = 0$.
4.$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.
6 *et* 7. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
mais $det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$
8. $\det(A) = \det(A^T)$ donc $det(AA^T) = \det(A)^2$
9. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ et $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$ donc
$\mathrm{tr}(A + A^T) = \mathrm{tr}(A) + tr(A^T) = 2tr(A)$.
10. $AX = 0 \Longrightarrow A^T AX = 0$.

16) Soit $n \geqslant 2$ et A la matrice carree d'ordre n $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & & & 0 & 0 & n \\ 0 & \cdots & & & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & & & & n-2 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 3 & & & & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix}$

- $rg(A) = n$.
- $det(A) = n!(-1)^n$.
- $det(A) = n!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
- A^{-1} est la matrice carree d'ordre n $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & & & 0 & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & \cdots & & & 0 & \frac{1}{n-1} & 0 \\ & & & & \frac{1}{n-2} & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & & & & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix}$ =B

1.Il suffit d'échanger ligne 1 et ligne n puis ligne 2 et ligne n-1 ….et A est équivalente ligne à $diag(1,2,\dots,n)$.
Donc $rg(A) = n$ et A inversible.
4.Mais $AB \neq 1$car son coeff ligne 1 colonne 1 est n.
2 et3. En développant le déterminant D_n de A par rapport à la première ligne , on obtient
$D_n = (-1)^{n+1} n D_{n-1}$. Alors
$$D_n = (-1)^{n+1} n (-1)^n (n-1)(-1)^{n-1}(n-2)\dots(-1)^3 2 D_1$$
$$(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}(-1)^{n-3}\dots(-1)^1 n!$$
$$= n!\,(-1)^{\sum_{k=1}^{n-1} k}$$

17) Soit $n \geqslant 2$ et A la matrice carree d'ordre n $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ & & & & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & & & & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & & & & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Le systeme $AX=0$ admet une unique solution.
- La matrice A^{-1} est triangulaire inferieure.
- $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ & & & & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & & & & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & & & & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$

$\det(A) = 1$ donc A inversib le et par conséquent, le système $AX = 0$ a une unique solution.
A est triangulaire sup donc A^{-1}l'est aussi.
$AB \neq I$ car son coeff ligne 1 colonne 3 vaut -1.

FIN