QCM Dérivation-Intégration après DS 5

Nom : .... Prénom : ....

Entourer les réponses correctes :

Q1 : Quelles sont les phrases écrites en bon langage mathématique ?

1. $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x)$ est continue pour tout x de $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, f$ est continue en x.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)$ est dérivable.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
6. $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- f est dérivable en tout réel x.

ce sont des réels et non des fonctions

Q2 : Soit x un réel et $I(x) = \int_{-1}^{1} e^{-x\frac{t^2}{2}}dt$. $I(x)$ existe car

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, e^{-x\frac{t^2}{2}}$ est continue.
2. $e^{-x\frac{t^2}{2}}$ est continue pour tout $t \in [-1,1]$.
3. $e^{-x\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
4. $\left(x \mapsto e^{-x\frac{t^2}{2}}\right)$ est continue sur $[-1,1]$.
5. $\left(x \mapsto e^{-x\frac{t^2}{2}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\left(t \mapsto e^{-x\frac{t^2}{2}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\left(t \mapsto e^{-x\frac{t^2}{2}}\right)$ est continue sur $[-1,1]$.
8. I est une primitive de $\left(t \mapsto e^{-x\frac{t^2}{2}}\right)$. Non ce n'est pas du tout la forme des primitives donnée par le TFI

l'intégrande a pour variable la variable d'intégration. Pour que l'intégrale existe, il suffit que cette intégrande soit continue sur le segment d'intégration ou plus !

Q3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$

1. donc toute primitive de f sur I est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. car f n'est constituée que de fonctions définies sur $\mathbb{R}$
- dès que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
5. si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.   qui est a ?
- dès que pour tout réel a, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.

"dérivable" implique "continue" ... réciproque fausse

Q4 f est dérivable en a et $f'(a) = L$

1. seulement si $\lim_{x\to a} f'(x) = L$.   la dérivée peut exister en a sans être continue en a.
2. dès que $\lim_{x\to a} f'(x) = L$.   c'est faux si f n'est pas continue en a...
3. dès que $\lim_{x\to a} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - L = 0$
4. si f est continue en a "dérivable" implique "continue" et réciproque fausse
- si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ et $\lim_{x\to a} f'(x) = L$.   critère de dérivabilité
- sietssi $f(x) = f(a) + L(x-a) + o_a(x-a)$.   équivalence entre dérivabilité et DL d'ordre 1

Q5 Pour tout réel x, on pose $G(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$. G est dérivable sur $\mathbb{R}$ Une intégrale est un réel alors que G est une fonction

1. car G est l'intégrale d'une fonction continue.
2. donc e^{-t^2} est continue sur $\mathbb{R}$.
3. puisque e^{-t^2} est continue sur $\mathbb{R}$.
4. puisque $(t \mapsto e^{-t^2})$ est continue sur $[0,x]$.
- puisque $(x \mapsto e^{-x^2})$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- puisque $(t \mapsto e^{-t^2})$ est continue sur $\mathbb{R}$
7. et $\forall t \in \mathbb{R}, G'(t) = e^{-t^2} - 1$.   G est une primitive de l'intégrande
- et $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = e^{-x^2}$.

Dans le TFI, l'intervalle ne dépend pas de la variable de la primitive

Q6 Soit u une suite et f une fonction telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) - f(1) \leq u_n \leq f(n) - f(0)$.

- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ alors la suite u est majorée.
2. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ alors la suite u est convergente.
3. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ alors   la limite de la suite u existe-t-elle ?
$$L - f(1) \leq \lim_{n\to+\infty} u_n \leq L - f(0).$$
- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
5. Si $\lim_{x\to+\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$ alors la fonction f est majorée.
6. Si $\lim_{x\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.   on a des informations sur la suites (f(n)) mais pas sur la fonction f.

Q7 On pose $F(x) = \left(G(x)\right)^3 + H\left(\frac{x^2}{2}\right) + Arccos(x)$ où G et H sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Alors,

1. F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $[-1,1]$.
3. F est dérivable sur $]-1,+\infty[$.
- F est dérivable sur $]-1,1[$.
5. $\forall x \in [-1\,;1], F'(x) = \left(G'(x)\right)^3 + xH'\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
6. $\forall x \in]-1\,;+\infty[, F'(x) = 3G'(x)G(x)^2 + xH'\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.
7. $\forall x \in]-1\,;1[, F(x) = 3G'(x)G(x)^2 + xH'\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
8. $\forall x \in]-1\,;1[, F'(x) = 3G'(x)G(x)^2 + xH'\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

la dérivée de Arccos est définie sur]-1;1[et vaut -(1-x²)^1/2.

FIN