QCM
MATRICES et DETERMINANTS

1) L'inverse de $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est

- $\dfrac{1}{cb-ad}\begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}$.
- $\dfrac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.
- $\dfrac{1}{cb-ad}\begin{pmatrix} -d & c \\ b & -a \end{pmatrix}$.
- $\dfrac{1}{cb-ad}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2) Soit A une matrice carree d'ordre $p \geq 2$ telle que $A^2 - 4A - 5I = 0$.

- A est inversible et $A^{-1} = A - 4I$.
- A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{5}(A-4)$.
- $A^n = \dfrac{(5^n - (-1)^n)}{6}A + \dfrac{(5^n + 5(-1)^n))}{6}I$.
- $A^n = 4^{n-1}A + 5^{n-1}I$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP$ est diagonale
- $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et PAP^{-1} est diagonale
- $A^n = \begin{pmatrix} 3\times 2^n - 2 & -3\times 2^{n+1} + 6 \\ 2^n - 1 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}$
- $A^n = \begin{pmatrix} 3\times 2^n - 2 & 2^{n+1} - 2 \\ -3\times 2^n + 3 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}$

4)

Soit A une matrice carre d'ordre n à coefficients complexes telle qu'il existe un entier naturel p non nul tel que $A^p + A^{p-1} + ... + A + I = O$

- A est inversible d'inverse A^p.
- A n'est pas inversible.
- A est nilpotente.
- A est inversible d'inverse $-I - A - A^2 - ... - A^{p-1}$.

5) $A = \begin{pmatrix} 2i+1 & i+1 & -i-1 \\ 0 & i & 0 \\ 2i+2 & 2i+2 & -i-2 \end{pmatrix}$.

- il exsite un entier naturel p tel que : $A^p + A^{p-1} + ... + I = 0$.
- Il n'existe pas d' entier naturel p tel que : $A^p + A^{p-1} + ... + I = 0$.
- A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2i+1 & 1-i & i-1 \\ 0 & i & 0 \\ -2i+2 & -2i+2 & i+2 \end{pmatrix}$.
- A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2i+1 & 1-i & i-1 \\ 0 & -i & 0 \\ -2i+2 & -2i+2 & i-2 \end{pmatrix}$.

6) Soit N une matrice nilpotent d'indice p entier naturel non nul et λ un scalaire non nul

- $N-\lambda I$ est inversible et son inverse est $-\lambda^{-1}I-\lambda^{-2}N-...\lambda^{-p}N^{p-1}$.
- $I+N$ est inversible et son inverse est $I-N+N^2+...+(-N)^{p-1}$.
- $N-\lambda I$ est nilpotente.
- λN est nilpotente.
- λN est niloptente d'indice p.

7) Soit $B=\begin{pmatrix}-1&-1&-3\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

- B n'est pas inversible.
- B inversible et $B^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&6\\1&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.
- B est inversible et $B^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1&-6\\1&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.
- B est inversible et $B^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&6\\-1&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.
- la comatrice de B est $\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&-1&0\\6&-3&-1\end{pmatrix}$.
- la comatrice de B est $\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&2&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$.

8) Soit $(S)\begin{cases}3x+y&=8\\-2x+y-2z&=-1\\x-2y+3z&=-3\end{cases}$

- $(S)\Leftrightarrow AX=B$ où $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-2&1&-2\\1&-2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8&-1&-3\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}$
- $(S)\Leftrightarrow AX=B$ où $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-2&1&-2\\1&-2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\-1\\-3\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$
- $(S)\Leftrightarrow AX=B$ où $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\1&1&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8&-1&-3\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}$
- $(S)\Leftrightarrow AX=B$ où $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\1&1&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\-1\\-3\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

9) $(S)\begin{cases}3x+y&=8\\-2x+y-2z&=-1\\x-2y+3z&=-3\end{cases}$:

- a une infinite de solutions.
- admet une unique solution $(2,2,-\frac{1}{2})$.
- n'admet aucune solution.
- admet une unique solution $(1,5,2)$.

10) A la matrice des coefficients du systeme (S) $\begin{cases} 3x+y & =8 \\ -2x+y-2z & =-1 \\ x-2y+3z & =-3 \end{cases}$

- n'est pas inversible.
- est inversible et A^{-1} a des coefficients entiers.
- n'admet pas 0 comme valeur propre.
- est inversible et son inverse est gal A.
- a un determinant nul car la somme des coefficients de sa deuxime colonne est nulle
- a un determinant qui vaut 1.
- a un determinant qui vaut 25.

11) Soit A une matrice carree d'ordre $n \geq 2$ a coefficients dans K et λ un scalaire.

- λ est valeur propre de $A \Leftrightarrow det(A-\lambda I)=0$
- λ est valeur propre de $A \Leftrightarrow AX=0$ admet une unique solution
- un vecteur propre de A est une colonne X telle que $AX=0$.
- un vecteur propre de A de valeur propre λ est une colonne X telle que $AX = \lambda X$

12) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- A n'est pas inversible.
- les valeurs propres de A sont 0 et 4.
- les valeurs propres de A sont 1 et 4.
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A de valeur propre 4.
- Aest inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(5I-A)$
- $A^n = I + \frac{1}{3}(4^n-1)J$ avec $n \in \mathbb{N}$.
- $rg(J)=3$
- $Im(J)$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$
- $Ker(J)$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix}$

13) Soit (S_a) $\begin{cases} x+ay+z & =1 \\ ax+y+(a-1)z & =a \\ x+y+z & =a+1 \end{cases}$

- $rg(S_a)=3$
- (S_a) est de Cramer $\Leftrightarrow a \neq 1$
- (S_a) est toujours compatible.
- Si $a \neq 1$ alors l'unique solution de (S_a) est $\frac{1}{1-a}\left(1-2a-a^2+a^3,\ \ a,\ \ a(1-a^2)\right)$.
- $\mathrm{tr}(A)=4$
- $tr(A^TA) = 15-2a+3a^2$

14) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

- $=(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$.
- $=(d-c)(d-b)(c-b)(b-a)(c-a)(d-a)$.
- $=(a-b)(a-c)(a-d)(b-a)(b-c)(b-d)(c-a)(c-b)(c-d)(d-a)(d-b)(d-c)$
- vaut 0 sietssi $a \in \{b, c, d\}$.
- $\neq 0$ sietssi a,b,c,d tous distincts.

15) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$avec $n \geqslant 2$.

- $A^T A$ est symetrique
- A est antisymetrique sietssi tous les coefficients de la diagonale de A sont nuls.
- $A = 0$ sietssi $AA^T = 0$.
- la decomposition de A comme somme une matrice symetrique et une matrice antisymetrique est $A = \frac{1}{2}(AA^T + A^T A)$
- $tr(AA^T)$ est la somme des carres des coefficients de la diagonale de A.
- $det(AA^T) = (det(A))^2$.
- $det(A + A^T) = 2det(A)$.
- $tr(AA^T) = (tr(A))^2$.
- $tr(A + A^T) = 2tr(A)$.
- $Ker(A) \subset Ker(A^T A)$.

16) Soit $n \geqslant 2$ et A la matrice carree d'ordre n $\begin{bmatrix} 0 & & \cdots & & 0 & 0 & n \\ 0 & & \cdots & & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & & & & n-2 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 3 & & & & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix}$

- $rg(A) = n$.
- $det(A) = n!(-1)^n$.
- $det(A) = n!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
- A^{-1} est la matrice carree d'ordre n $\begin{bmatrix} 0 & & \cdots & & 0 & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & & \cdots & & 0 & \frac{1}{n-1} & 0 \\ & & & & \frac{1}{n-2} & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & & & & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix}$

17) Soit $n \geqslant 2$ et A la matrice carree d'ordre n $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ & & & & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & & & & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & & & & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Le systeme $AX=0$ admet une unique solution.
- La matrice A^{-1} est triangulaire inferieure.
- $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ & & & & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & & & & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & & & & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$

FIN