QCM Polynômes

Exercice 1

On vérifie que :

A - La décomposition de $P(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X) = X^2 (X-3)^2$$

B - La décomposition de $Q(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$Q(X) = \left(X^2 - 3X - 3i\right)\left(X^2 - 3X + 3i\right)$$

C - La décomposition de $Q(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$Q(X) = \left(X^2 - \left(2\sqrt{3}+3\right)X - 3\sqrt{3} + 6\right)\left(X^2 + \left(2\sqrt{3}-3\right)X + 3\sqrt{3} + 6\right)$$

D - La décomposition de $Q(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$Q(X) = \left(X^2 - \left(2\sqrt{3}+3\right)X + 3\sqrt{3} + 6\right)\left(X^2 + \left(2\sqrt{3}-3\right)X - 3\sqrt{3} + 6\right)$$

A. $VRAI$ on factorise de manière évidente par X^2 puis on reconnait une identité remarquable.
B. $FAUX$ car la factorisation en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ est la forme scindée (produit de polynômes de degré 1).
C. $FAUX$ il suffit d'évaluer en 1.
D. $VRAI$ il suffit de développer.

Exercice 2

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n ayant n racines réelles distinctes.

Question 1

On établit que :

A - Toutes les racines de P' sont réelles et distinctes,

B - Toutes les racines de P' sont réelles mais pas forcément distinctes,

C - Toutes les racines de P' sont distinctes, mais certaines peuvent être complexes conjuguées,

D - Les racines de P' ne sont ni forcément distinctes, ni forcément réelles.

Il suffit d'appliquer Rolle à $\tilde{P}$ entre deux de ses racines réelles consécutives.

Question 2 On considère le même polynôme P que précédemment.

Le polynôme $P^2 + 1$:

A - n'admet que des racines réelles et distinctes

B - n'admet que des racines complexes non réelles et distinctes

C - n'admet que des racines distinctes, certaines étant réelles et d'autres complexes conjuguées,

$Q = P^2 + 1$ n'a pas de racines réelles car pour tout réel x, $P^2(x) + 1 > 0$. De plus, $Q' = 2PP'$ donc si $Q'(z) = 0$ alors $P(z) = 0$ ou $P'(z) = 0$ donc z est réel et par conséquent, n'est pas racine de Q. Ainsi, Q n'a pas de racines multiples.

Exercice 3

Question 1 RAPPEL Si $PGCD(p,q) = 1(i.e. p\ et\ q\ premiers\ entre\ eux)$ et p divise aq alors p divise a.
Soit $n \in \mathbb{N}^*\ et\ P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$.

- **A.** Pour tout polynôme P ainsi défini, P n'admet jamais de racine dans $\mathbb{Q}$.
- **B.** Pour tout polynôme P ainsi défini, P admet toujours au moins une racine dans $\mathbb{Q}$.
- **C.** Si le rationnel $\frac{p}{q}$, tel que $p \in \mathbb{Z}\ et\ q \in \mathbb{Z}^*$ et $PGCD(p,q) = 1$,est racine de Q alors p divise a_0 et q divisie a_n.
- **D.** Si le rationnel $\frac{p}{q}$,tel que $p \in \mathbb{Z}\ et\ q \in \mathbb{Z}^*$ et $PGCD(p,q) = 1$, est racine de Q alors p divise a_n et q divisie a_0.

$A. FAUX$ contre-exemple : $X - 1$
B. $FAUX$ contre-exemple $X^2 + 1$
C $VRAI$ $a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_3\left(\frac{p}{q}\right)^3 + \cdots + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n = 0$ Donc $a_0q^n + a_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + \cdots + a_np^n = 0$.
Alors, $\begin{cases} a_0q^n = -a_1pq^{n-1} - a_2p^2q^{n-2} - \cdots - a_np^n = p[-a_1q^{n-1} - a_2pq^{n-2} - \cdots - a_np^{n-1}] \\ a_np^n = -a_0q^n - a_1pq^{n-1} - \cdots - a_{n-1}p^{n-1}q = q[-a_0q^{n-1} - a_1pq^{n-2} - \cdots - a_{n-1}p^{n-1}] \end{cases}$.
Donc, p divise a_0q^n et comme p et q sont premiers entre eux, p et q^n le sont aussi donc nécessairement p divise a_0.
De même, q divise a_np^ndonc q divise a_n.
D $FAUX$ contre-exemple $2X - 3$ admet $\frac{3}{2}$ comme racine mais 3 ne divise pas 2 (et 2 ne divise pas 3)

Question 2

- **A.** Les racines rationnelles possibles de P sont parmi les réels $\frac{p_i}{q_j}$ où p_i est un entier relatif diviseur de $a_0\ et\ q_j$ est un entier relatif diviseur de a_n.
- **B.** Les racines rationnelles possibles de P sont parmi les réels $\frac{p_i}{q_j}$ où p_i est un entier naturel diviseur de $a_0\ et\ q_j$ est un entier relatif diviseur de a_n.
- **C.** Il n'existe pas de critère de localisations d'éventuelles racines de P .
- **D.** L'étude des variations de la fonction polynomiale associée à P permet de déterminer le nombre de racines de P.

A VRAI et B VRAI On applique le résultat de la question précédente
C et D FAUX L'étude de la fonction polynomiale associée à P ne permet que de trouver le nombre de racines réelles mais constitue une méthode pour localiser les racines réelles.

Question 3

Soit $Q(X) = 6X^3 - 2X^2 + 3X + 4$. La proposition suivante est vérifiée :

- **A.** Le nombre de rationnels pouvant éventuellement être racine de Q est 8 .
- **B.** Le nombre de rationnels non entiers pouvant éventuellement être racine de Q est 5 .
- **C.** Le nombre de rationnels pouvant éventuellement être racine de Q est 14 .
- **D.** Le nombre de rationnels non entiers pouvant éventuellement être racine de Q est 10 .

A, B, C $FAUX$ et D $VRAI$ Si p/q est racine rationnelle de P alors les valeurs possibles de q sont les diviseurs de 6 : $1, -1, 6, -6, 2, -2, 3, -3$ et les valeurs possibles de p sont les diviseurs de 4 : $1, -1, 2, -2, 4, -4$.
Donc les racines rationnelles p/q **non entières** possibles sont :$1, -1, 2, -2, 4, -4, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$.
Donc les racines rationnelles p/q **non entières** possibles sont : $\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$.

Question 4

On pose $S(X) = X^3 - 3X + 1$

- **A.** S admet une seule racine rationnelle
- **B.** S n'admet aucune racine rationnelle
- **C.** S admet deux racines rationnelles
- **D.** S admet trois racines rationnelles.

A,C D $FAUX$ et B $VRAI$: on applique 2 : S est à coeff entiers et les diviseurs de $a_n = a_0 = 1$ sont 1 et -1. Donc les seules racines rationnelles possibles sont 1 et -1. Mais 1 et -1 ne sont pas racines de S (il suffit de calculer $S(1)$ et $S(-1)$) .

Question 5

On pose $S(X) = X^3 - 3X + 1$

- **A.** S admet seulement une racine réelle
- **B.** S admet trois racines réelles
- **C.** S admet seulement deux racines réelles
- **D.** S n'admet aucune racine réelle.

A,C D $FAUX$ et B $VRAI$: il suffit d'étudier la fonction polynomiale associée.

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $E_n = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall k \in [\![0\,;n]\!]\ P^k(1) = 1\}$

A - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, P \in E_n \Leftrightarrow E_{n-1}$

B - $P \in E_n$ si et seulement si le reste R de la division euclidienne de P par $(X-1)^{n+1}$ appartient à E_n

C - $P_0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(X-1)^k}{k!}$ est l'unique élément de E_n

D - $F_n = \{P - P_0 \mid P \in E_n\}$ est un espace vectoriel

A $FAUX$ car $1 \in E_0$ mais $1 \notin E_1$

B. $Vrai$ Soit P un polynôme, Q et R les quotient et reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^{n+1}$. Alors $deg(R) \leq n$ et $P = (X-1)^{n+1}Q(X) + R = T + R$ avec $T = (X-1)^{n+1}Q(X)$. Alors T admet 1 comme racine de multiplicité au moins $n+1$ donc vérifie $\forall k \in [\![0,n]\!], T^{(k)}(1) = 0$.

Alors deg(R) $\leq$ n et $\forall k \in [\![0,n]\!], R^{(k)}(1) = P^{(k)}(1)$; donc, la formule de Taylor assure que : $R(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k$.

Donc $P \in E_n \Leftrightarrow \forall k \in [\![0,n]\!], P^{(k)}(1) = 1 \Leftrightarrow \forall k \in [\![0,n]\!], R^{(k)}(1) = 1 \Leftrightarrow\ R(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(X-1)^k$.

C. $FAUX$ $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(X-1)^k + (X-1)^{n+1}$ est dans E_n.

D . $VRAI$ $F_n = \{(X-1)^{n+1}Q(X)/Q \in \mathbb{R}[X]\} = vect((X-1)^k)_{k\geq n+1}$ car d'après B, $E_n = \{P_0(X) + (X-1)^{n+1}Q(X)/Q \in \mathbb{R}[X]\}$.

Exercice 6

Question 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $w_n = e^{i\frac{\pi}{n}}$

A - $\{w_n^k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$ est l'ensemble des racines du polynôme $X^{2n} - 1$

B - $w_n \in \mathbb{U}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

C - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ pair, $P = \prod_{k=1}^{n} \left(X - w_n^k\right)$ appartient à $\mathbb{R}[X]$

D - Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que w_n^k soit racine de $X^n + 1$

A.$FAUX$ Les racines de $X^{2n} - 1$ sont les racines $2n^{\text{ième}}$ de l'unité à savoir les complexes $e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{ik\pi}{n}} = w_n^k\ tq\ k \in [\![0{,}2n-1]\!]$. A ne contient que la moitié de ces racines.

$B.FAUX$ $\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n = e^{i\pi} = -1$ Donc w_n n'est pas une racine nième de l'unité

C. $FAUX$ Pour $n = 2$, $P = (X - i)(X + 1)$ n'est pas à coefficients réels.

D.$VRAI$ $k = n$ convient car $\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n + 1 = -1 + 1 = 0$

Question 2

Pour tout $n \geqslant 1$:

A - $\sum_{k=1}^{n} w_n^k = 0$

B - $\sum_{k=1}^{n} w_n^k = \frac{1 - w_n^n}{1 - w_n}$

C - $\left(1 - w_n^k\right)\left(1 - \overline{w}_n^k\right) = 2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

D - $\prod_{k=1}^{n} w_n^k = (-1)^n$

A. $Faux$. Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{n} {w_k}^n = w_1 = e^{i\pi} = -1 \neq 0$.

B. $Faux$. Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{n} {w_k}^n = w_1 = e^{i\pi} = -1 \neq 1 = \frac{1-w_1}{1-w_1}$

C. $Vrai$. $\left(1 - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\left(1 - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right) = 1 - 2Re\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) + \left|e^{\frac{ik\pi}{n}}\right| = 2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

D. $Faux$. pour $n = 2$, $\prod_{k=1}^{n} {w_k}^n = e^{\frac{i\pi}{2}} e^{i\pi} = -i \neq -1$.

Question 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

A - $\dfrac{2w_n}{1-w_n} = \dfrac{2\overline{w}_n}{1-\overline{w}_n}$ si et seulement si $n = 1$

B - $\dfrac{2w_n}{1-w_n} + \dfrac{2\overline{w}_n}{1-\overline{w}_n} = 2$

C - $\dfrac{2w_n}{1-w_n} \times \dfrac{2\overline{w}_n}{1-\overline{w}_n} = 4$

D - $\dfrac{2w_n}{1-w_n} = \dfrac{ie^{i\frac{\pi}{2n}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

D. $VRAI$ $\frac{2w_n}{1-w_n} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{n}}}{-2i sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\pi}{2n}}} = \frac{ie^{i\frac{\pi}{2n}}}{sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = -1 + i\frac{cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

A. $VRAI$ $\frac{2w_n}{1-w_n}$ $réel \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{2n} \equiv \frac{\pi}{2} + k\pi \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ n\geq 1 \\ donc\ \frac{\pi}{2n}\in]0,\frac{\pi}{2}]}} \frac{\pi}{2n} \equiv \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow n = 1.$

B. $FAUX$ la somme vaut $2Re\left(\frac{2w_n}{1-w_n}\right) = -2.$

C. FAUX le produit vaut $\left|\frac{2w_n}{1-w_n}\right|^2 = 1 + \left(\frac{cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right)^2 = \left(\frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right)^2.$

Exercice 7

Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

A - $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3}$

B - $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3$

C - $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi}{3} - 3$

D - $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \pi^2 - 3$

La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{x^2(x+1)^2}$ est $\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1}$. Alors $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + 2\underbrace{\sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}}_{télescopage} =$ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} + 2\left(-1 + \frac{1}{n+1}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 + 2\left(-1 + \frac{1}{n+1}\right) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+1} - 3$. Donc, B est correct .