Programme de colle 24

Révision : résolution des équations différentielles d'ordre 2 et suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (**) +

Chapitre 17 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels . Familles finies de vecteurs.

I Généralités.

1. Définition et règles de calcul

P1 $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \vec{x}+\vec{y} \in E \quad et \quad \forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K,\ \alpha.\vec{x} \in E$ **(E est stable par addition interne et multiplication externe).**

P2. (+) est ASSOCIATIVE et COMMUTATIVE i.e. $\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \in E^3,\ (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} = \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ et $\vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$

P3. (+) a un élément NEUTRE noté $\overrightarrow{O_E}$ ou $\vec{O}$ qui vérifie : $\forall \vec{x} \in E,\ \vec{x}+\vec{O} = \vec{x}$.

P4. Tout élément $\vec{x}$ de E a un unique SYMETRIQUE pour $(+)$. $\forall \vec{x} \in E, \exists! \vec{y} \in E / \vec{x}+\vec{y} = \vec{O}$. Alors, $\vec{y}$ *est noté* $-\vec{x}$ et appelé l'opposé de $\vec{x}$. $(\vec{z}+(-\vec{x})$ *est désormais noté* $\vec{z}-\vec{x})$

P5. $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \forall(\alpha,\beta) \in K^2, \alpha.(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha.\vec{x}+\alpha.\vec{y} \ \ et \ \ (\alpha+\beta).\vec{x} = \alpha.\vec{x}+\beta.\vec{x}$ ($(.)$ est distributive sur $(+)$)

P6. $\forall \vec{x} \in E, \forall(\alpha,\beta) \in K^2, \alpha.(\beta.\vec{x}) = \alpha\beta.\vec{x} = \beta.(\alpha.\vec{x})$ (associativité mixte)

P7. $\forall \vec{x} \in E, 1.\vec{x} = \vec{x}$

C1 $\forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K.\ (\alpha.\vec{x} = \vec{O}$ **si et ssi** $\alpha = 0 \ ou\ \vec{x} = \overrightarrow{O_E}$)

C2 $\forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K, -\vec{x} = (-1).\vec{x} \quad et \quad -(\alpha.\vec{x}) = (-\alpha).\vec{x} = \alpha.(-\vec{x})$

C3 $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \forall(\alpha,\beta) \in K^2\ (\alpha-\beta).\vec{x} = \alpha\vec{x}-\beta\vec{x}\ et\ \alpha.(\vec{x}-\vec{y}) = \alpha\vec{x}-\alpha\vec{y}$

Généralisation des propriétés $P2$ à 7 : Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ des vecteurs d'un $K-e-v\ E$ et $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ des éléments de K .

$\sum_{k=1}^{p} \vec{u}_k = \sum_{k=1}^{r} \vec{u}_k + \sum_{k=r+1}^{p} \vec{u}_k$ où $r \in [\![1, p-1]\!]$.

$\sum_{k=1}^{p} \vec{u}_k = \sum_{i=0}^{p-1} \vec{u}_{p-i}$

$\sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} \vec{u}_{kj}) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{p} \vec{u}_{kj})$

$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \vec{x} = (\sum_{k=1}^{p} \alpha_k)\vec{x}$

$\alpha \sum_{k=1}^{p} \vec{u}_k = \sum_{k=1}^{p} \alpha \vec{u}_k$

Si $\vec{x}, \vec{y}\ et\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ sont des vecteurs de E alors

tout vecteur de la forme $\alpha.\vec{x}+\beta.\vec{y}\ \ tq\ \alpha, \beta \in K$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}\ et\ \vec{y}$ et est élément de E.

tout vecteur de la forme $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \vec{u}_k\ tq\ \alpha_1, .., \alpha_p \in K$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ et est élément de E.

Tout espace vectoriel est stable par combinaison linéaire.

2. Espaces vectoriels de référence.

Munis de leur addition et de leur multiplication externe usuelles ,

P (l'ensemble des vecteurs du plan), E (l'ensemble des vecteurs de l'espace géométrique)sont des $\mathbb{R}-\mathrm{e}-\mathrm{v}$

$K, K^n, M_{n,p}(K), K^{\mathbb{N}}, F(\Omega, K)$, $K[X]$ sont des K-e-v.

3. Espace produit- Espace de fonctions.

Structure de K-e-v. de $\mathfrak{F}(T, E)$ où E est un K-e-v et T un ensemble. Structure de K-e-v. de $E \times F$ où $E\ et\ F$ sont deux K-e-v.

II Sous-espaces vectoriels.

1. Définition

Deux définitions équivalentes d'un sous-e-v.

Soit $(E,+,.)$ un K-e-v. F est un sous-espace-vectoriel de E lorsque

- $F \subset E$
- $\overrightarrow{O_E} \in F$ OU $F \neq \emptyset$
- $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in F^2, \forall \alpha \in K, \alpha\vec{x} \in F\ et\ \vec{x}+\vec{y} \in F$ OU $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in F^2, \forall(\alpha,\beta) \in K^2, \alpha\vec{x}+\beta\vec{y} \in F$.

Tout ss-e-v d'un K-e-v est un K-e-v et est stable par somme, multiplication par un scalaire, par combinaison linéaire.

2. Sous-espaces vectoriels de référence.

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, C^k(I, K)$ est un ss-e-v de $F(I, K)$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}, K_m[X]$ est un ss-e-v de $K[X]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, D_n(K),\ TS_n(K), TI_n(K), AS_n(K), S_n(K)$ est un ss-e-v de $M_n(K)$.

3. Sous-e-v engendré par une famille de vecteurs.

Soit E un K-e-v et $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}$ des vecteurs de E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}$ est un ss-e-v de E noté $vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ et appelé ss-e-v engendré par la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$

$(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$est une famille génératrice de $vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$.

Droite vectorielle et plan vectoriel. Une droite vectorielle de E est un ss-e-v engendré par un vecteur non nul de E.

Un plan vectoriel de E est un ss-e-v de E engendré par deux vecteurs non colinéaires de E.

$vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est inclus dans tout ss-e-v de E contenant $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}$ et est donc le plus petit ss-e-v (au sens de l'inclusion) contenant la famille $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}$.

Soit X un sous-ensemble de E et $vect(X)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d' éléments de X . Alors, $vect(X)$ est un ss-e-v de E et est contenu dans tout s—e-v de E contenant X. $vect(X)$ est appelé l'espace vectoriel engendré par X.

4. Intersection et somme de ss-e-v

- Soit $(F_i)_{i \in I}$une famille de ss-e-v de E. Alors $\bigcap_{i \in I} F_i = \{\vec{x} \in E / \forall i \in I, \vec{x} \in F_i\}$ est un sous-e-v de E.
- Soit F et G deux ss-e-v de E. Alors $F+G = \{\vec{x}+\vec{y} / \vec{x} \in F, \vec{y} \in G\} = \{\vec{u} \in E / \exists \vec{x} \in F, \vec{y} \in G, \vec{u} = \vec{x}+\vec{y}\}$ est ss-e-v- de E appelé ss-e-v somme de F et G .
- Si $F = vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ et $G = vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_q})$ alors $F+G = vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_q})$.

5. Somme directe et sous-espaces supplémentaires.

Soit F et G deux ss-e-v de E.

- F et G sont en somme directe lorsque tout élément de $F+G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.
- F et G sont supplémentaires dans E lorsque tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. On note alors $E = F \oplus G$. (définition)
- F et G sont en somme directe sietssi $F \cap G = \{\overrightarrow{O_E}\}$. (caractérisation ou définition équivalente)
- F et G sont supplémentaires dans E sietssi $F \cap G = \{\overrightarrow{O_E}\}$ et $F + G = E$. (caractérisation ou définition équivalente)

III Famille finie libre ou/et génératrice. Base.

1. Famille libre

Définition

Soit E un K-e-v et $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de E.

- $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille libre lorsque la seule manière d'écrire $\overrightarrow{O_E}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}$ st la manière triviale $\overrightarrow{O_E} = 0.\overrightarrow{u_1} + 0.\overrightarrow{u_2} + \cdots + 0.\overrightarrow{u_p}$; autrement dit lorsque l'équation $\overrightarrow{O_E} = \lambda_1.\overrightarrow{u_1} + \lambda_2.\overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_p.\overrightarrow{u_p}$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in K^p$ admet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = (0,0, \dots, 0)$ comme unique solution.
- $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille liée lorsque $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ n'est pas libre ; autrement dit lorsqu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \neq (0,0, \dots, 0)$ tel que $\overrightarrow{O_E} = \lambda_1.\overrightarrow{u_1} + \lambda_2.\overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_p.\overrightarrow{u_p}$.

Caractérisation

- $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille libre sietssi aucun vecteur de cette famille n'est combinaison linéaire des autres.
- $((\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille liée sietssi l'un vecteur de cette famille est combinaison linéaire des autres.

Opérations

- La liberté d'une famille ne dépend pas de l'ordre des vecteurs dans cette famille.
- Si l'on ajoute à une famille libre $\mathcal{L}$ un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$ alors la famille obtenue est encore libre.
- Toute famille extraite d'une famille libre est encore libre (i.e. si on ôte des vecteurs à une famille libre, la famille conserve la liberté).
- Les opérations élémentaires sur les vecteurs d'une famille libre $\mathcal{L}$ conserve la liberté de $\mathcal{L}$.

Exemples à connaitre et reconnaitre

- Toute famille de polynômes non nuls et tous de degrés distincts est libre.
- Toute famille de n-uplets non nuls et échelonnés en zéros (par la droite ou la gauche) ou de matrices-colonnes non nulles et échelonnées en zéros (par le haut ou le bas) est libre.

Propriété

- Si $\mathcal{L}$ est une famille libre alors tout vecteur de $vect(\mathcal{L})$ s écrit de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{L}$

2. Familles génératrices.

Définition et caractérisation

$(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de F est génératrice de F lorsque $vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}) = F$.

Si F est un ss-e-v de E alors $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est génératrice de F sietssi $\forall k \in [\![1, n]\!], \overrightarrow{u_k} \in F$ et tout vecteur de F est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}$.

Opérations

- Le caractère générateur d'une famille ne dépend pas de l'ordre des vecteurs dans cette famille.
- Si l'on ôte à une famille génératrice $\mathcal{G}$ de F un vecteur qui est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{G}$ alors la famille obtenue est encore génératrice de F. Et plus précisément,

  $vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_{p+1}}) = vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}) \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{p+1}}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}$.
- Si $\mathcal{G}'$ est une famille de vecteurs de F qui contient une famille génératrice de F alors $\mathcal{G}'$ est aussi génératrice de F.
- Les opérations élémentaires sur les vecteurs d'une famille génératrice $\mathcal{G}$ conserve le caractère générateur de $\mathcal{G}$.
- Si $F = vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ et $G = vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_q})$ alors $F + G = vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_q})$.

3. Bases.

Définition .

Une base d'un K-e-v E (resp. d'un ss-e-v F de E) est une famille génératrice de E (resp. d'un ss-e-v F de E) et libre.

Caractérisation . Définition des composantes.

$\mathcal{B}$ est une base du K-e-v E sietssi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une base du K-e-v E alors $\forall \vec{x} \in E, \exists! (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n / \vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{e_n}$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ sont les composantes de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$.

4. Dimension.

Dans un K-e-v E, toutes les bases de E, s'il en existe, ont le même nombre d'éléments (même cardinal).

Ce nombre d'éléments commun à toutes les bases de E est la dimension de E noté $\dim(E)$.

Bases et dimension des K-e-v de référence .

Une droite vectorielle est un e-v de dimension 1. Un plan vectoriel est un e-v de dimension 2.

Si P *est le* $\mathbb{R}-e-v$ des vecteurs du plan, alors une base de P est formée de 2 vecteurs de P non colinéaires et $dim_{\mathbb{R}}\, P = 2$.

Si E est le $\mathbb{R}-e-v$ des vecteurs de l'espace géométrique alors une base de E est formée de trois vecteurs de E non coplanaires et $dim_{\mathbb{R}}\, E = 3$.

$dim_K\, K = 1$. Base de K : (1).

$dim_K\, K^n = n$. Base canonique de K^n: $((1,0,..,0), (0,1,0,..,0), \dots, (0,0, \dots, 0,1)$.

$dim_K M_{n,p}(K) = np$. Base canonique de $M_{n,p}(K)$: $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.

$dim_K\, K_n[X] = n+1$. Base canonique de $K_n[X]$: $(1, X, X^2, .., X^n)$. Base de Taylor en α de $K_n[X]$: $(1, X-\alpha, (X-\alpha)^2, .., (X-\alpha)^n)$.

CHAPITRE 18 : Espaces vectoriels de dimension finie.

I Dimension finie .

Définition d'un K-e-v de dimension finie (resp. infinie).

Un K-e-v E est de dimension finie lorsque E admet une famille génératrice finie.

Comparaison du cardinal d'une famille libre et cardinal d'une famille génératrice

Dans un K-e-v E de dimension finie, le cardinal de n'importe quelle famille libre de vecteurs de E est inférieur ou égal au cardinal de toute famille génératrice de E.

Condition suffisante pour être un K-e-v de dimension infinie .

Si E contient une famille $(\overrightarrow{e_k})_{k\in\mathbb{N}}$telle que $\forall n \in \mathbb{N}, (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est libre alors E est de dimension infinie.

Existence d'une base et définition de la dimension.

Tout K-e-v E de dimension finie et non réduit à $\{\overrightarrow{O_E}\}$ a une base de cardinal fini et toutes les bases de E ont le même cardinal.

Ce cardinal commun à toutes les bases de E est la dimension de E. Par convention, $dim\{\overrightarrow{O_E}\} = 0$.

Bases et dimension des K-e-v de référence .

Une droite vectorielle est un e-v de dimension 1. Un plan vectoriel est un e-v de dimension 2.
Si $P\ est\ le\ \mathbb{R} - e - v$ des vecteurs du plan, alors une base de P est constituée de 2 vecteurs de P non colinéaires et $dim_{\mathbb{R}}\ P = 2$
Si E est le $\mathbb{R} - e - v$ des vecteurs de l'espace géométrique alors une base de E est formée de trois vecteurs de E non coplanaires et $dim_{\mathbb{R}}\ E = 3$.
$dim_K\ K = 1$. Base de K : (1).
$dim_K\ K^n = n$. Base canonique de K^n: $((1,0,..,0), (0,1,0,..,0), \dots, (0,0,\dots,0,1)$
$dim_K M_{n,p}(K)\ = np$. Base canonique de $M_{n,p}(K)$: $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$
$dim_K\ K_n[X] = n + 1$. Base canonique de $K_n[X]$: $(1, X, X^2, .., X^n)$. Base de Taylor en α de $K_n[X]$: $(1, X - \alpha, (X - \alpha)^2, .., (X - \alpha)^n)$.
$dim_K\ K[X] = +\infty$.
$dim_K\ \mathscr{F}(I, K) = +\infty$, $dim_K\ C^k(I, K) = +\infty$, $dim_K\ \ D^k(I, K) = +\infty$, $dim_K\ \ C^\infty(I, K) = +\infty$.
$dim_K\ K^{\mathbb{N}} = +\infty$.

II Famille de vecteurs dans un K-e-v de dimension finie

Comparaison de la dimension avec le cardinal d'une famille libre et avec le cardinal d'une famille génératrice

Dans un K-e-v E de dimension finie, si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E , $\mathcal{B}$ est une base de E et $\mathcal{L}$ une famille libre de vecteurs de E alors, $card(\mathcal{L}) \leq card(\mathcal{B}) \leq card(\mathcal{G})$.

Caractérisation d'une base : famille libre et maximale ou famille génératrice et minimale .

Soit E K-e-v de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E
($\mathcal{F}$ est une base de E)sietssi ($\mathcal{F}$ est libre et card($\mathcal{F}$) =dim(E)) sietssi ($\mathcal{F}$ est génératrice de E et card($\mathcal{F}$)=dim(E)).

(**) Cela pourra faire l'objet d'un exercice de colle.

Questions de cours :

QDC 1 Soit E un $K - e - v$ et $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de E. Montrer que l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ est un ss-e-v de E.

QDC 2 Soit E un $K - e - v$ .Démontrer que l'intersection de ss-e-v de E est un ss-e-v de E. Prouver que le réunion de deux ss-e-v de E n'est pas forcément un ss-e-v de E.

QDC 3 Démontrer la caractérisation de deux espaces en somme directe et celle de deux ss-e-v supplémentaires.

QDC 4 $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille liée sietssi l'un vecteur de cette famille est combinaison linéaire des autres.

QDC 5 Dans un K-e-v E de dimension finie, le cardinal de n'importe quelle famille libre de vecteurs de E est inférieur ou égal au cardinal de toute famille génératrice de E.