# Espaces vectoriels de dimension finie.

**Dans tout le chapitre, $(E,+,.)$ est un $K$-e-v.**

## I. K-e-v de dimension finie, dimension et existence d'une base

1**Def :** Un $K$-e-v $E$ est **de dimension finie** lorsque $E$ admet au moins une famille génératrice finie.
Sinon $E$ est de dimension infinie.

2**Prop. :** Dans e v $E$ de dimension finie, toute famille libre de vecteurs de $E$ a un nombre d'éléments inférieur ou égal au nombre d'éléments de toute famille génératrice de $E$.

3**Conséquence :** Si $E$ est un K-e-v contenant une famille $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}, (f_0,f_1,f_2,\dots,f_n)$ est libre alors $E$ est de dimension infinie.

4**Exemples de référence :** $\forall n\in\mathbb{N},\ (1,X,\dots,X^n)$ est une famille libre de vecteurs de **$K[X]$ qui est donc de dimension infinie**.
$\forall n\in\mathbb{N}, \left((x\to e^{kx})\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille libre de vecteurs de **$\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ou $C^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ou $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui sont donc de dimension infinie**.
$\forall n\in\mathbb{N}, ((k^n)_{n\in\mathbb{N}})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille libre et infinie de vecteurs de **$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui est donc de dimension infinie**. ( démo plus tard avec les déterminants)

**5 Théo : Dimension d'un e-v- de dimension finie**

1. Tout e-v de dimension finie non réduit à $\{\overrightarrow{O_E}\}$ a une base finie.
2. Toutes les bases dans un ev de dimension finie ont le même nombre d'éléments. Ce nombre d'éléments commun à toutes les bases est appelé la dimension de $E$ et noté $dim(E)$ .
$$dim(E) = nbre\ de\ vecteurs\ dans\ une\ base\ quelconque\ de\ E\ = \underbrace{card(une\ base\ de\ E)}_{(***)} = \underbrace{card(toute\ base\ de\ E)}_{(***)}.$$
3. Par convention, $dim\{\overrightarrow{O_E}\} = 0$.

(***) $card(\mathscr{F})$, le cardinal d'une famille $\mathscr{F}$, est le nombre d'éléments de cette famille $\mathscr{F}$.

**6 Exemples de référence :**

| Dimension | BASE de référence ( base canonique) |
|---|---|
| **Une droite vectorielle est un e-v de dimension 1.** | • |
| **Si $P$ est le $\mathbb{R}-e-v$ des vecteurs du plan, alors $dim_{\mathbb{R}} P = 2$** | |
| **Un plan vectoriel est un e-v de dimension 2.** | |
| **Si $E$ est le $\mathbb{R}-e-v$ des vecteurs de l'espace géométriques alors $dim_{\mathbb{R}} E = 3$.** | |
| **$dim_K K = 1$ et $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$.** | • |
| **$dim_K K^n = n$.** | • |
| **$dim_K M_{n,p}(K) = np$.** | • |
| **$dim_K K_n[X] = n+1$.** | • |
| **$dim_K K[X] = +\infty$.** | • |
| **$dim_K \mathscr{F}(I,K) = +\infty,\ dim_K C^k(I,K) = +\infty, dim_K\ D^k(I,K) = +\infty, dim_K\ C^\infty(I,K) = +\infty$.** | |
| **$dim_K K^{\mathbb{N}} = +\infty$.** | • |
| Soit $a$ fonction continue sur $I$ . La dimension de l'ensemble des solutions de l'équa. diff. $y' + a(x)y = 0$ est 1 . | |
| Soit $a$ et $b$ réels fixés. La dimension de l'ensemble des solutions de l'équa. diff. $y'' + ay' + by = 0$ est 2. | |
| Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Le $K$-e-v de suites $p$ −périodiques de dimension $p$. | |
| Le $K$-e-v des suites arithmétiques est de dimension 2. | |
| Soit $r\in\mathbb{R}^{+*}$. Le $K$-e-v des suites géométriques de raison $r$ est de dimension 1. | |
| Soit $a$ et $b$ réels fixés. Le $K$-e-v des suites vérifiant: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ est de dimension 2. | |

# II. Familles de vecteurs dans un ev de dimension finie.

## 1. Caractérisation d'une base.

$card(famille\ libre\ de\ E) \leq \underbrace{card(base\ de\ E)}_{dim(E)} \leq card(famille\ génératrice\ de\ E\ ).$

**7 Théo** Soit $E$ un K-e-v de dimension finie $n = dim(E)$.
1. Une famille libre de vecteurs de $E$ a au plus $n$ éléments.
2. Une famille génératrice de $E$ a au moins $n$ éléments.

$base = libre\ et\ maximale = génératrice\ et\ minimale$

**7bis Caractérisation d'une BASE d'un e-v- de dimension finie.**
Soit $E$ un K-e-v de dimension finie $n = dim(E)$. Soit $\mathfrak{F}$ une famille de vectreurs de E.
$\mathfrak{F}$ est une base de E **sietssi** $\mathfrak{F}$ est libre et $card(\mathfrak{F}) = dim(E)$ (on dit alors que $\mathfrak{F}$ est libre et maximale) .
$\mathfrak{F}$ est une base de E **sietssi** $\mathfrak{F}$ est génératrice de $E$ et $card(\mathfrak{F}) = dim(E)$ (on dit alors que $\mathfrak{F}$ est génératrice et minimale).

**8 Exercies** : Soit $n$ un entier naturel. Soit $a_0, .., a_n$ des réels tous distincts et pour tout $\in \{0, \dots, n\}$ , $L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{X-a_i}{a_k-a_i}$ (polynômes de Lagrange).
Justifier que $\mathscr{B}= (L_0, \dots, L_n)$ est une base de de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminons les composantes d'un polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathscr{B}$ .
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]\ tel\ que\ \deg(P) = n$. Montrer que $(P, P', P'', \dots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

**9 Théorème de complétion et d'extraction :** Soit $E$ un $K$-e-v de dimension finie $n$.
1)Toute famille libre de vecteurs de $E$ de cardinal $p$ peut être complétée par $n-p$ vecteurs de $E$ bien choisis pour obtenir une base de $E$. Ces $n-p$ vecteurs de $E$ peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une base connue de $E$.
2) De toute famille génératrice de $E$ , on peut extraire $n$ vecteurs qui forment une base de $E$.

**10 Méthode:**
- Pour compléter une famille libre afin d'obtenir une base de $E$, il suffit de bien choisir les nouveaux vecteurs parmi ceux d'une base connue de $E$, en ajoutant un par un chaque vecteur veillant à ce qu'il ne soit pas combinaison linéaire des vecteurs de la famille déjà formée. On aura une technique matricielle très efficace pour compléter.
- Pour obtenir une base de $E$ à partir d'une famille génératrice de $E$ , il suffit d'ôter un par un les vecteurs combinaisons linéaires des autres, il faut pour cela parfois étudier les relations de dépendances linéaires entre les vecteurs de la famille et d'ôter ceux combinaison linéaire des autres.

**11 Exercice:** Montrer que la famille $\mathscr{F}= \left( \underbrace{1 + X + X^2}_{P}, \underbrace{2X - X^2}_{Q}, \underbrace{3 + X}_{R}, \underbrace{1 - 2X^2}_{S} \right)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ et en extraire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ .

## 2. Matrices d'une famille de vecteurs dans une base donnée.

**12 Def.:** Soit $\mathscr{B}= (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n})$ une base d'un $K$-e-v $E$ de dimension finie $n$ .
•Soit $\vec{v}$ un vecteur de $E$ . Soit $(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)$ les composantes de $\vec{v}$ dans $\mathscr{B}= (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n})$ .Alors **la matrice du vecteur $\vec{v}$ dans la base B** est la matrice colonne notée $\boldsymbol{mat_B\,\vec{v}}$ et définie par :

$$mat_B\,\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

•Soit $\mathscr{V}= (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_p})$ une famille de vecteurs de $E$ . $\forall j \in \{1, ..p\}$, notons $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj})$ les composantes de $\vec{v_j}$ dans B ie. $\vec{v_j} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\vec{e_i}$ . Alors **la matrice de la famille $\mathscr{V}$ dans la base $\mathscr{B}$** , notée $\boldsymbol{mat_{\mathscr{B}}\mathscr{V}}$, est la matrice de type $(n, p)$ définie par :

$$mat_{\mathscr{B}}\mathscr{V}= \begin{array}{cc} \begin{matrix} \vec{v_1} & \vec{v_2} & \cdots & \vec{v_p} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vdots \\ \vec{e_n} \end{matrix} \end{array}$$

**13 Prop .** Soit $\mathscr{B}$ une base de $E$ . 1) $\Delta$: $\begin{pmatrix} E \to M_{n,1}(K) \\ \vec{x} \to mat_B\vec{x} \end{pmatrix}$ est une bijection.
2)Soit $\vec{x}\ et\ \vec{y}$ deux vecteurs de $E$ , $\alpha, \beta$ deux scalaires. Alors $mat_{\mathscr{B}}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha mat_{\mathscr{B}}\vec{x} + \beta mat_{\mathscr{B}}\vec{y}$ .
3) Soit $\mathscr{V}= (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_p})$ une famille de vecteurs de $E$ .
$\vec{x}$ est combinaison linéaire de $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_p}$ si et ssi $mat_{\mathscr{B}}\vec{x}$ est combinaison linéaire des matrices $mat_{\mathscr{B}}\vec{v_k}$ . Et dans ce cas, les coefficients des combinaisons linéaires sont les mêmes.

**14 Théo : Formule de changement de base pour les vecteurs**
Soit $B_1$ et $B_2$ deux bases de $E$. Soit $\vec{v}$ un vecteur de $E$ . Notons $P = mat_{B_1}B_2$ , $X_1 = mat_{B_1}(\vec{v}\,)$ et $X_2 = mat_{B_2}(\vec{v}\,)$ .
Alors , $mat_{B_1}(\vec{v}\,) = mat_{B_1}B_2 \times mat_{B_2}(\vec{v}\,)$ i.e . $X_1 = PX_2$ .

15 **Exercice :** Soit $B=(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$une base d'un $K$-e-v $E$ . Soit $\vec{u}=2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+4\vec{k}, \vec{v}=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}, \vec{w}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ $\vec{E}$ . La famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$est –elle une base de $E$? Si oui, quelles sont les composantes de $\vec{n}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$ dans cette nouvelle base ?

16 **Théorème** Soit $\mathscr{B}$ une base de $E$ et $\mathscr{V}$ une famille de vecteurs de $E$.
$\mathscr{V}$ est une base de $E$ **sietssi** $mat_{\mathscr{B}}\mathscr{V}$ est inversible . Et le cas échéant, $(mat_{\mathscr{B}}\mathscr{V})^{-1}= mat_{\mathscr{V}}\mathscr{B}$.

17 **Exercices : 1.**Montrer que la famille $\left(\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2i & -1+i\end{pmatrix}}_{=A},\underbrace{\begin{pmatrix}i & -2i\\ 2 & 1\end{pmatrix}}_{=B}\right)$est libre et la compléter pour constituer une base de $M_2(\mathbb{C})$.

2.Cherchons pour quelles valeurs du réel $a$, la famille $\mathscr{F}=\left(\underbrace{(a,1,2,3)}_{X_1},\underbrace{(0,a,4,3)}_{X_2},\underbrace{(0,1,a,3)}_{X_3},\underbrace{(0,1,2,3a)}_{X_4}\right)$ est -elle libre ?

18 **Méthode (Cf exercices ci-dessus)** : Grâce à ce théorème 16, on peut donc
- Démontrer qu'une famille est une base.
- Compléter facilement une famille libre par des vecteurs d'une base pour obtenir une nouvelle ba

19 **Déf. :** Si $B_1$ et $B_2$ sont deux bases de $E$ alors $mat_{B_1}B_2$est appelée la **matrice de passage de la base $B_1$ à la base $B_2$**.

20 **Théorème** Toute matrice de passage est inversible et $(mat_{B_1}B_2)^{-1}=mat_{B_2}B_1$.
Réciproquement, toute matrice $P=(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$inversible est la matrice de passage entre deux bases de $E$ : si $B_1=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $E$ connue et $B_2=(v_1,\dots,v_n)$ tel que $\forall k\in[\![1,n]\!], v_k=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}e_i$ alors $P=mat_{B_1}B_2$ et $B_2$ base de $E$.

## III. Ss-e-v dans un e-v de dimension finie .

20 **Théo :** Soit $E$ un K-e-v de dimension finie. Tout ss-e-v $F$ de $E$ est de dimension finie et $\dim(F)\leq\dim(E)$. De plus, $\dim(F)=\dim(E)\Leftrightarrow F=E$ .

21 **Applications** : Les ss-e-v de l'ensemble $P$ des vecteurs du plan sont des ss-e-v de dimension 0, 1 ou 2 ; ce sont donc : $\{\vec{O}\}$, les droites vectorielles engendrées par un vecteur non nul du plan et le plan tout entier.
Les ss-e-v de l'ensemble $E$ des vecteurs de l'espace géométrique sont des ss-ev de dimension 0, 1 ,2 ou 3; ce sont donc : $\{\vec{O}\}$, les droites vectorielles engendrées par un vecteur non nul de $E$ , les plans vectoriels engendrés par deux vecteurs de $E$ non colinéaires et $E$ tout entier.

22 **Théorème :** Soit $F$ et $G$ deux ss-e-v d'un K-e-v $E$.
Soit $B_1=(\vec{f_1},\dots,\vec{f_p})$ une base du ss-e-v $F$ de $E$ et $B_2=(\vec{g_1},\dots,\vec{g_q})$ une base du ss-e-v $G$ de $E$ alors
- $F$ et $G$ sont en somme directe si et ssi $(\vec{f_1},\dots,\vec{f_p},\vec{g_1},\dots,\vec{g_q})$ est libre.
- $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$ si et ssi $(\vec{f_1},\dots,\vec{f_p},\vec{g_1},\dots,\vec{g_q})$ est une base de $E$.
- Si $E=F\oplus G$ avec $F$ et $G$ de dimension finie, alors $E$ est de dimension finie et $dimE=dimF+dimG$ .

24 **conséquence :** Si$E=F\oplus G$ et $E$ est de dimension infinie, alors $F$ ou/et $G$ est de dimension infinie.

23 **Rque et Def** : Si $F$ et $G$ sont deux sous-e-v de $E$ supplémentaires dans $E$, un $K-e-v$ de dimension finie alors
- $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$
- toute base obtenue par concaténation d'une base de $F$ et d'une base de $G$ est **une base de $E$ dite adaptée à la décomposition $E=F\oplus G$.**

25 **Théorème :** Soit $E$ un K-e-v de dimension finie. Tout ss-e-v de $E$ de dimension finie admet un supplémentaire dans $E$ .

26 **Méthode :** Soit $F$ ss-e-v de $E$ et $p=dimF\leq dimE=n$. Pour construire un supplémentaire dans $E$ du ss-e-v $F$, il suffit de:
1) compléter une base de $F$ , qui est une famille libre de vecteurs de $E$ , par $(n-p)$ vecteurs bien choisis parmi les vecteurs d'une base de $E$ afin d'obtenir une base de $E$ . Ces $n-p$ vecteurs forment alors une famille libre.
2) définir , $G$ le ss-e-v de $E$ engendré par ces $n-p$ vecteurs . Ces $n-p$ vecteurs forment alors une base de $G$
3) conclure , en utilisant le théo60 , que $G$ est un supplémentaire de $F$ dans $E$ .

27 **Exercice** : Soit $F=\{A=(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,3]\!]^2}\in M_3(\mathbb{R})/\forall i\in[\![1,3]\!],\sum_{j=1}^{3}a_{ij}=0\}$. Montrer que $F$ est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$ et déterminer un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$ supplémentaire de $F$ dans $M_3(\mathbb{R})$.

28 **Formule de Grassmann**: Soit $E$ un $K$-e-v de dimension finie.
Si $F$ et $G$ sont deux sous-e-v quelconques de $E$ alors $dim(F+G)=dimF+dimG-dim(F\cap G)$ .

29 **Prop.:** Soit $E$ un K-e-v de dimension finie et $F$ et $G$ deux sous-e-v de $E$.
$F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$ si et ssi $F\cap G=\{\vec{0}\}$ et $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$ .
si et ssi $F+G=E$ et $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$ .

## IV. Rang d'une famille de vecteurs.

**30 Définition :** Soit $\mathscr{V}=\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots\overrightarrow{v_p}\right)$ une famille de vecteurs d'un $K$ −e.v $E$ .($E$ n'est pas forcément de dimension finie)
Le **rang de** $\mathscr{V}$, noté $\boldsymbol{rg(\mathscr{V})}$, est la dimension du sous −espace vectoriel engendré par $\mathscr{V}$.
Autrement dit , $rg(\mathscr{V}) = dim_K(vect(\mathscr{V}))$

**31 Exercice :** Déterminons $rg((f_k)_{k=0..6})$où $f_0 = 1, f_1 : (x \to cosx), f_2 : (x \to sinx), f_3 : (x \to cos^2x), f_4 : (x \to sin^2x)$,
$f_5 : (x \to \cos(2x))$ , $f_6 : (x \to sin2x)$.

**32 Prop. :** Soit $\mathscr{V}=(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots\overrightarrow{v_p})$ une famille de vecteurs d'un e.v $E$ .
1) $rg(\mathscr{V}) \leq p = card(\mathscr{V})$ .
2) Si $E$ est de dimension finie $n$ alors $rg(\mathscr{V}) \leq \min(dimE\,, card(\mathscr{V}))$.

**33 Prop. :** Soit $\mathscr{V}$ une famille de vecteurs d'un e.v $E$ .
1) $\mathscr{V}$ est libre si et ssi $rg(\mathscr{V}) = card(\mathscr{V})$
<u>Si, de plus, $E$ est de dimension finie</u> , alors
2) $\mathscr{V}$ est génératrice de $E$ si et ssi $rg(\mathscr{V}) = dimE$
3) $\mathscr{V}$ est base de $E$ si et ssi $rg(\mathscr{V}) = card\ \mathscr{V} = dimE$

**34 Théorème :** Si $E$ est un $K$-e-v de dimension finie alors pour toute base $\mathscr{B}$ de $E$ et toute famille $\mathscr{V}$ de vecteurs de $E$ ,

$$rg(\mathscr{V}) = rg(mat_{\mathscr{B}}\mathscr{V})$$

**35 Méthode :** pour connaitre le rang de $\mathscr{V}$, il suffit d'extraire de $\mathscr{V}$ une base de $vect(\mathscr{V})$ : on étudie les relations de dépendance linéaires entre les vecteurs de $\mathscr{V}$, on élimine ceux qui sont combinaison linéaire d' autres linéairement indépendants . Alors le rang de $\mathscr{V}$ est le nombre de vecteurs restants.

**Exercice36**

1) Déterminer le rang de $\mathfrak{F}=\big((1,1,2,3),(1,-3,2,0),(4,0,8,9),(1,0,3,-1),(2,-6,4,9)\big)$ et donner une base de vect($\mathfrak{F}$)
2) Déterminer le rang de $\mathfrak{F} = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$ où $f_0 = \mathrm{ch}$ , $f_1 = \mathrm{sh}$, $f_2 = \exp$, $f_3 : \big(x \mapsto ch(2x)\big), f_4 : (x \mapsto sh^2(x))$ et extraire de $\mathfrak{F}$ une base de vect($\mathfrak{F}$) .