

TD 18

Familles libres -génératrices -bases-dimension.

Exercice 1 Dans des ensembles de fonctions

- Déterminer le rang de $(ch, sh, f, (x \mapsto 1), g, (x \mapsto ch(2x)), ch^2, sh^2)$
- Soit $f_1 = \exp$, $f_2 : (t \mapsto \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) e^{-\frac{t}{2}})$ et $f_3 : (t \mapsto \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) e^{-\frac{t}{2}})$. Et $F = \text{vect}(f_1, f_2, f_3)$
 - Déterminer la dimension de F .
 - Déterminer le rang de la famille $\mathcal{G} = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ où

$$g_1: (t \rightarrow 3e^{-\frac{t}{2}}(\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - 2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)))$$

$$g_2: (t \rightarrow e^t - e^{-\frac{t}{2}}(\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)))$$

$$g_3: (t \rightarrow e^{-\frac{t}{2}}(2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)) + e^{3t/2})$$

$$g_4: (t \rightarrow e^{-\frac{t}{2}}(-\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + 3\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)) + 4e^t)$$

Exercice 2 Dans des ensembles des polynômes ou fonctions polynomiales.

- Quel est le rang de (P_1, P_2, \dots, P_5) tel que $P_1 = 1 - 2X + X^3$, $P_2 = -2X - X^4$, $P_3 = X^2 - 2X^3 + 2X^4$, $P_4 = 3 + 2X - 3X^4$, $P_5 = 1 - X^2 - X^3 - X^4$? Déterminer une base de $\text{vect}(P_1, P_2, \dots, P_5)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(x \mapsto (x+1)^{n-k} x^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base du \mathbb{R} -e-v des fonctions polynomiales de degré inférieur à n .
- Soit $n \in \mathbb{N}/n \geq 3$. Déterminer la dimension du \mathbb{C} -e-v $F = \{P \in \mathbb{C}_n[X]/(X+i)^2 \text{ divise } P\}$.
 - Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{C}_n[X]$.
 - Montrer que $H = \{P \in \mathbb{C}_n[X]/\tilde{P}(i) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}_n[X]$. Trouver un supplémentaire de H dans $\mathbb{C}_n[X]$.
 - Montrer que $H + F = \mathbb{C}_n[X]$.
 - H et F sont-ils en somme directe?
 - Donner une base de $F \cap H, F + H, F \cap K, F + K$.
- Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/P(X^2) = X^2P(X)\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/\tilde{P}(-1) = \tilde{P}(2)\}$.
 - Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}_3[X]$ et préciser leur dimension.
 - Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.
- Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $P_0 = 1$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_k = \frac{1}{k!} X(X-k)^{k-1}$.
 - Montrer que $(P_k)_{k=0 \dots n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - Montrer que $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, j \rrbracket, P_j^{(k)}(X) = P_{j-k}(X-k)$.
 - En déduire que $P_j^{(k)}(k) = 0$ pour tous j et k distincts dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.
 - Déterminer les composantes d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 3 Dans un ensemble de suites.

- Calculer le $\text{rg}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z})$ où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln^2(n+1)$, $v_n = \sqrt{n}$, $w_n = (-1)^n$, $z_n = (1 - \frac{1}{n+1})^n$.
- Quelle est la dimension du \mathbb{C} -e-v des suites complexes 4-périodiques?
- Objectif : montrer que la famille $((k^n)_{n \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Fixons $m \in \mathbb{N}$.

On pose $\forall i \in \llbracket 0, m \rrbracket, L_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{X-k}{i-k}$.

- Montrer que la famille $B = (L_0, L_1, \dots, L_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.
- Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_m[X], (P(0), P(1), \dots, P(m))$ sont les composantes de P dans cette base B .
- Soit $B_c = (1, X, X^2, \dots, X^m)$ la base canonique de $\mathbb{R}_m[X]$. Déterminer la matrice de passage de B à B_c .
- En déduire que la famille $((k^n)_{n \in \mathbb{N}})_{k \in \llbracket 0, \dots, m \rrbracket}$ est libre.
- Qu'en déduit-on sur le \mathbb{R} -e-v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Exercice 4 Dans un K-e-v E de dimension quelconque.

- Ici E est de dimension finie p , de base $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i=1 \dots p}$. On pose : $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \vec{e}_i = \vec{e}_i - (\vec{e}_{i+1} + \vec{e}_{i+2} + \dots + \vec{e}_p)$ et $\vec{e}_p = \vec{e}_p$. Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{e}_i)_{i=1 \dots p}$ est une base de E . Soit $\vec{x} \in E$. Exprimer les composantes de \vec{x} dans la base \mathcal{B}' en fonction des composantes de \vec{x} dans B .
- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\mathcal{L} = (\vec{u}_i)_{i=1 \dots n}$ une famille libre de vecteurs d'un K -espace vectoriel E .
 - Etudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_2 - \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_{n-1} - \vec{u}_n, \vec{u}_n)$.
 - Etudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_{n-1} + \vec{u}_n, \vec{u}_1 + \vec{u}_n)$.
 - Soit $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Justifier que $\text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ et $\text{vect}(\vec{u}_{p+1}, \dots, \vec{u}_n)$ sont en somme directe.
 - Soit $G = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ et F un ss-e-v de E tels que : $F \oplus G = E$.
 - Justifier qu'il existe un vecteur non nul \vec{a} dans F .
 - $G_a = \text{vect}(\vec{a} + \vec{u}_1, \vec{a} + \vec{u}_2, \dots, \vec{a} + \vec{u}_p)$. Montrer que G_a et F sont supplémentaires dans E .

3. Soit E un K -espace vectoriel admettant une base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On pose:
$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} \\ \vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{w} = -2\vec{i} + \vec{k} \\ \vec{t} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \end{cases}$$
 et $F = \{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} / (a, b, c) \in K^3 \text{ et } a + b + c = \frac{a}{2}\}$ et $G = \text{vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

- Vérifier que F est un ss-e-v de E et $F \oplus G = E$.
- La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de E ?
- Extraire de cette famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$ une base de E . Et exprimer \vec{t} comme c. l. de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
- Déterminer un système d'équations de G dans B

e. Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trois vecteurs de E tels que $\text{mat}_B(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1+x & x & x \\ y & 1+y & y \\ z & z & 1+z \end{pmatrix}$ où $(x, y, z) \in K^3$.

- Exprimer $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
- $H = \{(x, y, z) \in K^3 / (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ est une famille libre}\}$ est-il un ss-e-v de K^3 ?

Exercice 5 dans \mathbb{R}^n .

- Déterminer une \mathbb{R} -base du \mathbb{R} -e-v \mathbb{C}^n .
- Etudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = ((1, 2, 3, 4, 1), (2, 3, 1, 2, 1), (0, -1 - 5, -6, -1), (3, 3, -6, -6, 0))$ et déterminer un supplémentaire de $\text{vect } \mathcal{F}$ dans \mathbb{R}^5 .
- Etudier la liberté de la famille $((a, 1, 0, a), (0, a, 2a + 2, 0), (1, 0, a, 0), (2a, 0, 1, a))$ où a paramètre réel.
- Montrer que $((1, 0, 1), (-1, -1, 1), (-2, 1, -2))$ est une base de \mathbb{R}^3 . Ecrire $X = (x, y, z)$ dans cette nouvelle base
- $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 2y = 0 \text{ et } y - 2z = 0\}$ et $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + z = y + t\}$
 - Donner une base de $V \cap W$ et de $V + W$.
 - Donner un supplémentaire H de $V \cap W$ dans W .
 - Montrer que V et H sont supplémentaires dans \mathbb{R}^4 .
- $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \text{vect}((1, 1, \dots, 1, 1))$ et $G = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$.
 - Justifier que F et G sont des ss-e-v de E de dimension finie et déterminer leur dimension.
 - Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
- $F = \{(x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} / \sum_{i=1}^n x_i = 0 = \sum_{i=n+1}^{2n} x_i\}$. Montrer que F est un ss-e-v de \mathbb{R}^{2n} . Déterminer la dimension de F et un supplémentaire de F dans \mathbb{R}^{2n}

Exercice 6 dans $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Déterminer la dimension de $AS_n(\mathbb{R})$.
- Soit $A = \text{diag}(2, 2, 1)$. Trouver la dimension de $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$. Déterminer un supplémentaire de E dans $M_3(\mathbb{R})$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$. Trouver la dimension de $E = \{AM / M \in M_2(\mathbb{R})\}$. Déterminer un supplémentaire de E dans $M_{3,2}(\mathbb{R})$.
- Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre et la compléter pour obtenir une base de $M_{3,2}(\mathbb{R})$.
- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est-elle une base de $M_2(\mathbb{R})$? Si oui, donner les composantes de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 7 Soit E un Ke v de dimension finie $n \geq 2$.

- Soit $(m, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $p \leq m$. Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$ une famille de vecteurs de E .
Montrer que $rg(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \geq rg(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) + p - m$.
- Soit F et G deux ss-e-v de E de dimension $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On cherche à prouver que F et G ont un supplémentaire H dans E commun.
 - Trouver H dans le cas où $F = G$.
 - On suppose que $F \neq G$.
 - Montrer que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$.
 - Construire un vecteur $\vec{u}_1 \notin F \cup G$. On pose $F_1 = F + \text{vect}(\vec{u}_1)$ et $G_1 = G + \text{vect}(\vec{u}_1)$.
 - Trouver H dans le cas où $F \neq G$ et $p + 1 = n$.
 - Si $p + 1 < n$, montrer que $F_1 \neq G_1$ et poursuivre le raisonnement pour trouver H .

