

DL 12

Exercice 0

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$ et $G = \{(x, x, x) / x \text{ réels}\}$.

1. Montrer que F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et G une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1

$F = \left\{ f \in C^0([0, \pi], \mathbb{R}) / f(0) = f(\pi) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x) \end{pmatrix} / a, b \text{ réels} \right\}$.

1. Montrer que F et G sont des ss-e-v de $C^0([0, \pi], \mathbb{R})$ et G est un plan vectoriel.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $C^0([0, \pi], \mathbb{R})$.

A savoir-faire
absolument

Exercice 2

Pour tout scalaire a , on note $H_a = \{ P \in \mathbb{R}[X] / P(X+1) - P(X) = a \}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que H_a soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer une base de H_0 .
3. Trouver un polynôme Q_a de degré 1 élément de H_a .
4. Montrer que $P \in H_a \Leftrightarrow P - Q_a \in H_0$.
5. En déduire H_a .

Exercice 3

On appelle matrice magique toute matrice carrée telle que la somme des coefficients de chaque ligne soit la même quelle que soit la ligne et la somme des coefficients de chaque colonne soit la même quelle que soit la colonne.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des matrices carrées d'ordre n , réelles et magiques.

1. Montrer que si $A \in E$ alors la somme des coefficients de n'importe quelle ligne de A est égale à la somme des coefficients de n'importe quelle colonne de A .
2. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $A \in E \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / AU = \lambda U$ et $U^T A = \lambda U^T$.
3. Montrer que si A et B sont carrées d'ordre n et magiques alors AB est magique.
4. Montrer que si A est magique et inversible alors son inverse est magique.
5. Montrer que E est un ss-e-v de $M_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de E au regard des résultats des questions 3 et 4 ?

Désormais $n = 3$.

6. Déterminer une famille génératrice de E . Quelle est la dimension de E ?
7. Soit $D = \text{diag}(1, 2, 3)$ et F l'ensemble des matrices réelles qui commutent avec D .
 - a. Montrer que F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$, en donner une famille génératrice et sa dimension.
 - b. E et F sont-ils en somme directe ? Donner une famille génératrice de $E \cap F$.
8. Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \\ a & b & c \end{pmatrix} / a, b, c, d \text{ réels} \right\}$. Montrer que $E \oplus G = M_3(\mathbb{R})$.