Corrigé du DL 12

Exercice 0

Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x-y+z=0\}\ et\ G=\{(x,x,x)/x\ réels\}$.

1. Montrer que F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et G une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

1. $G=\{(x,x,x)/x\ réels\}=vect((1,1,1))$. Comme $(1,1,1)$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$, G est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x-y+z=0\}=\{(y-z,y,z)/(y,z)\in\mathbb{R}^2\}=\{y(1,1,0)+z(-1,0,1)/(y,z)\in\mathbb{R}^2\}=vect((1,1,0),(-1,0,1))$. Comme $(1,1,0)$ et $(-1,0,1))$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non colinéaires, F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $U=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Cherchons $V\in F\ et\ W\in G$ tels que $U=V+W$. Cherchons tous les a,b,c réels tels que : $(x,y,z)=a(1,1,0)+b(-1,0,1)+c(1,1,1)$.

$$(x,y,z)=a(1,1,0)+b(-1,0,1)+c(1,1,1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=a-b+c\\ y=a+c\\ z=b+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=a-b+c\\ y=a+c\\ z=b+c\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y-c-(z-c)+c\\ a=y-c\\ b=z-c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=x-y-z\\ a=y-(x-y-z)\\ b=z-(x-y-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=x-y-z\\ a=2y-x+z\\ b=2z-x+y\end{cases}.$$

Il existe donc une seule manière d'écrire U comme somme d'une élément de F et d'un élément de G et cette écriture est : $U=(x,y,z)=\underbrace{(2y-x+z)(1,1,0)+(2z-x+y)(-1,0,1)}_{\in F}+\underbrace{(x-y-z)(1,1,1)}_{\in G}$.

J'en conclus que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1

$F=\left\{f\in C^0([0,\pi],\mathbb{R})/f(0)=f(\pi)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}\ et\ G=\{\begin{pmatrix}[0,\pi]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto acos(x)+bsin(x)\end{pmatrix}/a,b\ réels\}$.

1. Montrer que F et G sont des ss-e-v de $C^0([0,\pi],\mathbb{R})$ et G est un plan vectoriel.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $C^0([0,\pi],\mathbb{R})$.

1. $G=vect(cos,\sin)$. Comme cos et sin sont dans $C^0([0,\pi],\mathbb{R})$, G est un ss-e-v de $C^0([0,\pi],\mathbb{R})$. De plus, si a et b sont deux réels tels que $acos+bsin=0\ \ i.e.\forall x, acos(x)+bsin(x)=0$ alors $a=0$ (obtenu en prenant $x=0$) et $b=0$ (avec $x=\frac{\pi}{2}$). Donc (cos,sin) est une famille libre. J'en déduis que G est un plan vectoriel.

$F\subset C^0([0,\pi],\mathbb{R})$. La fonction nulle est élément de F puisqu'elle est continue et s'annule partout donc en 0, $\pi\ et\ \frac{\pi}{2}$. De plus, prenons deux éléments f et g de F et $a\ et\ b$ deux réels. Alors f et g étant continue sur $[0,\pi]$, $af+bg$ l'est aussi. Et

$$(af+bg)(0)=af(0)+bg(0)\underbrace{=}_{car\ f\ et\ g\ sot\ dans\ F}af(\pi)+bg(\pi)=(af+bg)(\pi)$$

$\underbrace{=}_{car\ f\ et\ g\ sot\ dans\ F}af\left(\frac{\pi}{2}\right)+bg\left(\frac{\pi}{2}\right)=(af+bg)\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Donc $af+bg\in F$. F est donc stable par combinaison linéaire.

J'en conclus que F est un ss-e-v de $C^0([0,\pi],\mathbb{R})$.

2. Soit $\varphi\in C^0([0,\pi],\mathbb{R})$.

Analyse : supposons qu'il existe $f\in F$ et $g\in G$ telles que $\varphi=f+g$. Alors,

$\begin{cases}\forall x\in[0,\pi],\varphi(x)=f(x)+g(x)\\ f(0)=f(\pi)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\forall x\in[0,\pi],g(x)=acos(x)+bsin(x)\end{cases}$. Alors $\forall x\in[0,\pi],\varphi(x)=f(x)+acos(x)+bsin(x)$. En particulier, $\begin{cases}\varphi(0)=f(0)+a\\ \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+b=f(0)+b\\ \varphi(\pi)=f(\pi)-a=f(0)-a\end{cases}$. Donc, $\begin{cases}2a=\varphi(0)-\varphi(\pi)\\ 2f(0)=\varphi(0)+\varphi(\pi)\\ b=\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)\end{cases}$. Donc $\begin{cases}a=\frac{[\varphi(0)-\varphi(\pi)]}{2}\\ b=\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{[\varphi(0)+\varphi(\pi)]}{2}\end{cases}$

Ainsi, $\forall x\in[0,\pi],g(x)=\left[\frac{[\varphi(0)-\varphi(\pi)]}{2}\right]\cos(x)+\left[\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{[\varphi(0)+\varphi(\pi)]}{2}\right]sin(x)$ et

$f(x)=\varphi(x)-g(x)=\varphi(x)-\left\{\left[\frac{[\varphi(0)-\varphi(\pi)]}{2}\right]\cos(x)+\left[\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{[\varphi(0)+\varphi(\pi)]}{2}\right]sin(x)\right\}$.

Donc si de telles fonctions f et g existent, elles sont uniques et sont définies par :

$\forall x \in [0,\pi], g(x) = \left[\frac{[\varphi(0)-\varphi(\pi)]}{2}\right]\cos(x) + \left[\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{[\varphi(0)+\varphi(\pi)]}{2}\right] sin(x)$ et $f(x) = \varphi(x) - \left\{\left[\frac{[\varphi(0)-\varphi(\pi)]}{2}\right]\cos(x) + \left[\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{[\varphi(0)+\varphi(\pi)]}{2}\right] sin(x)\right\}$.

Synthèse . Posons $\forall x \in [0,\pi], g(x) = \left[\frac{[\varphi(0)-\varphi(\pi)]}{2}\right]\cos(x) + \left[\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{[\varphi(0)+\varphi(\pi)]}{2}\right] sin(x)$ et $f(x) = \varphi(x) - \left\{\left[\frac{[\varphi(0)-\varphi(\pi)]}{2}\right]\cos(x) + \left[\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{[\varphi(0)+\varphi(\pi)]}{2}\right] sin(x)\right\}$.

Alors $\forall x \in [0,\pi],\ f(x) + g(x) = \varphi(x)$ et $g \in G$. De plus $g\ et\ \varphi$ sont dans $C^0([0,\pi],\mathbb{R})$ donc f l'est aussi et $f(0) = \varphi(0) - \left[\frac{[\varphi(0)-\varphi(\pi)]}{2}\right] = \frac{[\varphi(0)+\varphi(\pi)]}{2}$, $f(\pi) = \varphi(\pi) + \left[\frac{[\varphi(0)-\varphi(\pi)]}{2}\right] = \frac{[\varphi(0)+\varphi(\pi)]}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left[\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{[\varphi(0)+\varphi(\pi)]}{2}\right] = \frac{[\varphi(0)+\varphi(\pi)]}{2}$. Donc $f(0) = f(\pi) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Donc $f \in F$. Donc f et g ainsi définies sont les deux uniques fonctions qui vérifient : $f \in F$ et $g \in G$ et $\varphi = f + g$. Ainsi, je peux conclure que F et G sont supplémentaires dans $C^0([0,\pi],\mathbb{R})$.

Exercice 2

Pour tout scalaire a, on note $H_a = \{ P \in \mathbb{R}[X] / P(X+1) - P(X) = a\}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que H_a soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer une base de H_0.
3. Trouver un polynôme Q_a de degré 1 élément de H_a.
4. Montrer que $P \in H_a \Leftrightarrow P - Q_a \in H_0$.
5. En déduire H_a.

1. Si H_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ alors H_a contient le polynôme nul noté W et par conséquent, $W(X+1) - W(X) = a$ i.e. $0 = a$.
   Donc pour que H_a soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, il est nécessaire que $a = 0$. Réciproquement, prenons $a = 0\ et\ H_0 = \{ P \in \mathbb{R}[X] / P(X+1) - P(X) = 0\}$. Montrons que H_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

H_0 est bien un sous ensemble de $\mathbb{R}[X]$ qui contient le polynôme nul car $W(X+1) - W(X) = 0$. De plus, si P et Q sont deux polynômes de H_0 et a et b sont deux réels, alors

$(aP + bQ)(X+1) - (aP+bQ)(X) = a\left[\underbrace{P(X+1) - P(X)}_{=0\ car\ P \in H_0}\right] + b\left[\underbrace{Q(X+1) - Q(X)}_{=0\ car\ Q \in H_0}\right] = 0$ donc $aP + bQ \in H_0$. H_0 est donc stable par combinaison linéaire et ainsi que H_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

J'en conclus que H_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ sietssi $a = 0$.

2. Cherchons une famille génératrice de H_0. Pour cela, cherchons une autre manière de décrire les polynômes de H_0.

Soit P un polynôme de H_0. Imaginons un instant que P ne soit pas constant. Montrer que P a une infinité de racines. Le théorème de d'Alembert-Gauss assure que P a au moins une racine complexe ω. Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[\omega + k$ est racine de $P]_{H(k)}$. <u>Initialisation</u> : ω est racine de P donc $H(0)$ est vraie.

<u>Propagation</u> : Soit $k \in \mathbb{N}$. $Je\ suppose\ que\ \omega + k$ est racine de P. Je sais que $\forall z \in \mathbb{C}, \tilde{P}(z+1) = \tilde{P}(z)$. Donc en particulier, pour $z = \omega + k, \tilde{P}(\omega + k + 1) = \tilde{P}(\omega + k) \underbrace{=}_{\substack{car\ \omega+k \\ racine \\ de\ P}} 0$. J'en déduis que $\omega + k + 1$ est racine de P.

<u>Conclusion :</u> le théorème de récurrence assure alors que pour tout $k \in \mathbb{N},\ \omega + k$ est racine de P.

P a une infinité de racines donc P est le polynôme constant égal à 0 ce qui contredit le caractère non constant de P. Ainsi, il n'existe pas de polynômes non constants dans H_0. De plus, il est évident que H_0 contient tous les polynômes constants. Donc, H_0 contient tous et que les polynômes constants. Autrement dit , $H_0 = \mathbb{R}_0[X]$. Une base de H_0 est la famille constituée du polynôme constant égal à 1.

3. Prenons $Q_a = aX. Alors\ Q_a(X+1) - Q_a(X) = a(X+1) - aX = a$. Donc $aX \in H_a$.
4. $P \in H_a \Leftrightarrow P(X+1) - P(X) = a \Leftrightarrow P(X+1) - P(X) = Q_a(X+1) - Q_a(X) \Leftrightarrow (P - Q_a)(\mathrm{X}+1) - (P - Q_a)(\mathrm{X}) = 0 \Leftrightarrow P - Q_a \in H_0$.
5. Alors, $P \in H_a \Leftrightarrow \exists U \in H_0 / P - Q_a = \mathrm{U} \Leftrightarrow \exists U \in H_0 / P = U + Q_a \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ H_0\ ne\ contient \\ que\ des\ polynômes \\ constants}} \exists b \in \mathbb{R}\ H_0 / P = b + aX$.

   Ainsi, $H_a = \{ aX + b / b \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3

A. On appelle matrice magique toute matrice carrée telle que la somme des coefficients de chaque ligne soit la même quelle que soit la ligne et la somme des coefficients de chaque colonne soit la même quelle que soit la colonne. Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, réelles et magiques où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $A \in E$ alors la somme des coefficients de n'importe quelle ligne de A est égale à la somme des coefficients de n'importe quelle colonne de A.

Soit $A \in E$. On note l la somme des coefficients de chaque ligne de A et c la somme des coefficients de chaque colonne de A. On note s la somme de tous les coefficients de A.
Montrons que $l = c$.
D'une part, $s = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} l = nl$
D'autre part, $s = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} c = nc$. Il s'en suit que $nl = nc$ et donc $l = c$ (puisque n est non nul).

2. Soit $U = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $A \in E \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}/\ AU = \lambda U$ et $U^T A = \lambda U^T$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
$\exists\lambda \in \mathbb{R}/\ AU = \lambda U$ et $U^T A = \lambda U^T \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}/\ \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \lambda$ et $\forall j \in [\![1,n]\!], \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \lambda$
$\Leftrightarrow$la somme des coefficients de chaque ligne ou de chaque colonne de A est la même quelle que soit la ligne ou la colonne
$\overset{d'après\ 1.}{\Leftrightarrow} \quad A \in E$

3. Montrer que si $A\ et\ B$ sont carrées d'ordre n et magiques alors AB est magique.

Soit $A, B \in M_n(K)$ magiques. Alors AB est carrée d'ordre n . De plus,
$\exists\lambda \in \mathbb{R}/\ AU = \lambda U$ et $U^T A = \lambda U^T$ et $\exists\beta \in \mathbb{R}/\ BU = \beta U$ et $U^T B = \beta U^T$
Donc $ABU = A(BU) = A(\beta U) = \beta(AU) = \beta\lambda U$ et $U^T AB = (U^T A)B = (\lambda U^T)B = \lambda(U^T B) = \lambda(\beta U^T) = \beta\lambda U^T$.
J'en déduis que AB est magique aussi

4. Montrer que si A est magique et inversible alors son inverse est magique.

Soit $A \in E$, inversible . Alors $\exists\lambda \in \mathbb{R}/\ AU = \lambda U$ et $U^T A = \lambda U^T$. Donc, $U = (A^{-1}A)U = A^{-1}(AU) = A^{-1}(\lambda U) = \lambda A^{-1}U$ et de même, $U^T = U^T A A^{-1} = \lambda U^T A^{-1}$. De plus, le système $AX = 0_{n,1}$ admet $X = 0_{n,1}$ comme unique solution puisque A est inversible . Donc, $AU \neq 0_{n,1}$ et ainsi $\lambda \neq 0$. Par conséquent, $A^{-1}U = \frac{1}{\lambda}U$ et $U^T A^{-1} = \frac{1}{\lambda}U^T$. J'en conclus que A^{-1} est magique aussi.

5. Montrer que E est un ss-e-v de $M_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de E au regard des résultats démontrés aux questions 3 et 4 ?

- $E \subset M_n(\mathbb{R})$.
- $O_n U = O_{n,1}$ et $U^T O_n = O_{1,n}$. Donc $O_n \in E$.
- Soit $A, B \in E\ et\ a, b \in \mathbb{R}$. Alors, $\exists\alpha \in \mathbb{R}/\ AU = \alpha U$ et $U^T A = \alpha U^T$ et $\exists\beta \in \mathbb{R}/\ BU = \beta U$ et $U^T B = \beta U^T$.

Alors, $(aA + bB)U = aAU + bBU = a\alpha U + b\beta U = (a\alpha + b\beta)U$
et $U^T(aA + bB) = aU^T A + bU^T B = a\alpha U^T + b\beta U^T = (a\alpha + b\beta)U^T$
J'en déduis que $aA + bB \in E$. J'en conclus que E est un ss-e-v de $M_n(\mathbb{R})$.
D'après 3 et 4, E est stable par produit et par passage à l'inverse.

B. Désormais $n = 3$.

6. Déterminer une famille génératrice de E. Quelle est la dimension de E ?

D'après la partie A, $E = \left\{\begin{pmatrix} a & b & \lambda - a - b \\ c & d & \lambda - c - d \\ \lambda - a - c & \lambda - b - d & a + b + c + d - \lambda \end{pmatrix} / (a, b, c, d, \lambda) \in \mathbb{R}^5\right\}$. Donc,

$$E = \left\{ a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A_2} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_3} + d\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A_4} + \lambda\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A_5} / (a, b, c, d, \lambda) \in \mathbb{R}^5 \right\}.$$

Donc $E = vect(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$. La famille $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ est génératrice de E.

Montrons la liberté à la famille $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$.

Soit $(a, b, c, d, \lambda) \in \mathbb{R}^5$ / $aA_1 + bA_2 + cA_3 + dA_4 + \lambda A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $\begin{pmatrix} a & b & \lambda - a - b \\ c & d & \lambda - c - d \\ \lambda - a - c & \lambda - b - d & -\lambda + a + b + c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $a=b=c=d=0$ et $\lambda-a-b=0$. Donc $a=b=c=d=\lambda=0$. Ainsi, (A_1,A_2,A_3,A_4,A_5) est libre et finalement est une base de E. J'en conclus que $\dim(E)=5$.

7. Soit $D=diag(1,2,3)$ et F l'ensemble des matrices réelles qui commutent avec D.
   a. Montrer que F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$, en donner une famille génératrice et sa dimension.

$F=\{M\in M_3(\mathbb{R})/DM=MD\}\subset M_3(\mathbb{R})$.
$DO_3=O_3=O_3D$. Donc, $O_3\in F$
Soit $(P,Q)\in F^2$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Alors $D(aP+bQ)=D(aP)+D(bQ)=aDP+bDQ=aPD+bQD=(aP+bQ)D$. Donc, $aP+bQ\in F$.
Ainsi F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$.

$$F=\{\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})/\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\}$$

$$F=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})/\begin{pmatrix}a&b&c\\2d&2e&2f\\3g&3h&3k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&2b&3c\\d&2e&3f\\g&2h&3k\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})/\begin{cases}b=2b\\c=3c\\2d=d\\2f=3f\\3g=g\\3h=2h\end{cases}\right\}$$

$$F=\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&e&0\\0&0&k\end{pmatrix}/a,e,k\text{ réels}\}=\{a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}/a,e,k\text{ réels}\}$$

Donc, $\mathcal{F}=\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F. De plus cette famille est libre puisque

$$a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a&0&0\\0&e&0\\0&0&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=e=k=0.$$

Donc $\mathcal{F}$ est une base de F et $dimF=3$.

   b. E et F sont-ils en somme directe ? Donner une famille génératrice de $E\cap F$.

$$E\cap F=\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&e&0\\0&0&k\end{pmatrix}/a,e,k\text{ réels et }\underbrace{a=e=k}_{\substack{\text{la somme des}\\\text{coeff de chaque ligne et colonne}\\\text{est la même quelle que}\\\text{soit la ligne ou colonne}}}\}=\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}/a\text{ réel}\}=vect(I_3).$$

Donc $E\cap F\neq\{O_3\}$ et E et F ne sont pas en somme directe. De plus (I_3) est une famille génértrice de $E\cap F$.

8. Soit $G=\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&d\\a&b&c\end{pmatrix}/a,b,c,d\text{ réels}\}$. Montrer que $E\oplus G=M_3(\mathbb{R})$.

$$G=\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&d\\a&b&c\end{pmatrix}/a,b,c,d\text{ réels}\}=vect(\mathcal{G}),\text{ où }\mathcal{G}=\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

Donc $\mathcal{G}$ est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$.

Pour prouver que $E\oplus G=M_3(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que toute matrice de $M_3(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice de E et d'une matrice de G.

Soit $M=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$. Je cherche tous les $A\in E$ et $B\in G$ telles que $M=A+B$.

Soit $A=\begin{pmatrix}x&y&\lambda-x-y\\z&t&\lambda-z-t\\\lambda-x-z&\lambda-y-t&-\lambda+x+y+z+t\end{pmatrix}\in E$ et $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\alpha\\\beta&\gamma&\delta\end{pmatrix}\in G$. On cherche donc tous les réels $a,y,z,t,\lambda,\alpha,\beta,\gamma,\delta$ tels que $M=A+B$.

$$M=A+B\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y&\lambda-x-y\\z&t&\lambda-z-t\\\lambda-x-z&\lambda-y-t&-\lambda+x+y+z+t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\alpha\\\beta&\gamma&\delta\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y \\ c = \lambda - x - y \\ d = z \\ e = t \\ f = \lambda - z - t + \alpha \\ g = \lambda - x - z + \beta \\ h = \lambda - y - t + \gamma \\ k = -\lambda + x + y + z + t + \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \\ \lambda = a + b + c \\ z = d \\ t = e \\ \alpha = f + d + e - (a + b + c) \\ \beta = g + a + d - (a + b + c) \\ \gamma = h + b + e + (a + b + c) \\ \delta = k - (a + b + d + e) + (a + b + c) = k - d - e + c \end{cases}.$$

Donc, il existe des uniques matrices $A \in E\ et\ B \in G$ telles que $M = A + B$. Ainsi, E et G sont supplémentaires dans $M_3(\mathbb{R})$.