DS 6

4 heures et calculatrice interdite.
En cas de doute sur le sujet, n'hésitez pas à le signaler au surveillant qui m'avertira.
Encadrer <u>tous</u> vos résultats en couleurs (pas de fluo car interdit au concours).
Soigner votre écriture, votre orthographe et la présentation.

EXERCICE 1 Résolution de système grâce aux déterminants.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ **<u>inversible</u>** et $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

On note C_1, C_2, C_3 les colonnes de A et $A = (C_1|C_2|C_3)$.

On note $M_1 = (T|C_2|C_3)$ la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la première colonne de A par T.

On note $M_2 = (C_1|T|C_3)$ la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la deuxième colonne de A par T.

On note $M_2 = (C_1|C_2|T)$ la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la troisième colonne de A par T.

Soit (S) le système linéaire $AX = T$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. Justifier que (S) admet une unique solution. On note $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ cette unique solution.
2. Justifier que $x_0 C_1 + y_0 C_2 + z_0 C_3 = T$.
3. Démontrer, grâce à 2. et aux propriétés du déterminant, que $\det(M_1) = x_0 \det(A)$.
4. Enoncer des formules analogues pour $\det(M_2)$ et $\det(M_3)$.
5. Conclure que $X_0 = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(M_1) \\ \det(M_2) \\ \det(M_3) \end{pmatrix}$.
6. **Application :** Soit p, q, r, s des paramètres réels et (S): $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ px + qy + rz = s \\ p^2x + q^2y + r^2z = s^2 \end{cases}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

Les solutions de (S) dépendent de p, q, r, s .

6.1 Ecrire la matrice A associée à (S) et la matrice T du second membre.

6.2 Montrer que : A est inversible si et seulement si p, q et r sont tous distincts.

6.3 Ici p, q et r sont tous distincts. Résoudre (S) **en appliquant 5.** (les autres résolutions ne seront pas corrigées).

6.4 Ici p, q et r ne sont pas tous distincts. Résoudre (S).

EXERCICE 2 Une famille de polynômes

<u>PARTIE 1</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $L_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k$, polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. Expliciter L_n pour $n \in [\![0,2]\!]$.
2. Montrer que $L_n(-X) = (-1)^n L_n(X)$.
3. Calculer $\widetilde{L_n}(1)$ et $\widetilde{L_n}(-1)$.
4. On pose $P_n(X) = (X^2-1)^n$.

   4.1. Exprimer L_n en fonction de $P_n^{(n)}$.

   4.2. En déduire le degré de L_n .

   4.3. Déterminer le coefficient dominant de L_n de deux manières différentes .

   4.4. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = 1 + |x|$.

   5.1. Montrer que $|\widetilde{L_n}(x)| \leq \left(\frac{y}{2}\right)^n \binom{2n}{n}$.

   5.2. Justifier que $max_{[-1,1]}|\widetilde{L_n}|$ existe et $max_{[-1,1]}|\widetilde{L_n}| \leq \binom{2n}{n}$.

PARTIE 2

6. Soit $q \in [\![0, n-1]\!]$. Justifier que $\widetilde{P_n^{(q)}}(1) = \widetilde{P_n^{(q)}}(-1) = 0$.

7. Montrer que $\forall q \in [\![0, n]\!]$, $\widetilde{P_n^{(q)}}$ s'annule (au moins) q fois dans l'intervalle $]-1\,;1[$.

8. En déduire que L_n est scindé à racines simples réelles et toutes ses racines sont dans l'intervalle $]-1\,;1[$.

Désormais pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $R(n)$ l'ensemble des racines du polynôme L_n . On a donc $R(n) \subset]-1,1[$.
Soit $\lambda(n)$ la plus grande de ces racines.

9. Justifier que 0 est centre de symétrie de l'ensemble $R(n)$.

10. Quelle est la plus petite racine du polynôme L_n ?

11. Quel est le signe de $\widetilde{L_n}(x)$ lorsque $x \in]\lambda(n), +\infty[$?

PARTIE 3

12. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que, en faisant k intégrations par parties, que $\int_{-1}^{1} \widetilde{P_n^{(n)}}(x) x^k dx = 0$.

13. En déduire que $\forall S \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^{1} \widetilde{L_n}(x)\tilde{S}(x)dx = 0$.

EXERCICE 3 Une famille de matrices.

PARTIE A

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit N une matrice de $M_p(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice 3 i.e. $N^3 = 0 \text{ et } N^2 \neq 0$.

Dans **cette partie**, pour tout réel t , on note $E(t) = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2$.

1. Soit s et t deux réels. Montrer qu'il existe un réel w tel que $E(s+t) = E(w)$ et exprimer w en fonction de s et t.

2. En déduire que :

2.2 pour tout entier naturel n et tout réel t, $E(nt) = E(t)^n$.

2.3 pour tout réel t , $E(t)$ est inversible et que son inverse est élément de F (on explicitera cet inverse).

3. Soit s et t deux réels. Montrer que $E(t) = E(s) \Leftrightarrow t = s$.

PARTIE B

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ élément de $M_2(\mathbb{R})$.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que le système $AX = \lambda X$ admet une unique solution **sietssi** $\lambda \notin \{1; 2\}$.

5. Montrer que le système $AX = X$ admet comme solution toutes les matrices $\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ telles que $\alpha \in \mathbb{R}$ et le système $AX = 2X$ admet comme solution toutes les matrices $\beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ telles que $\beta \in \mathbb{R}$.

6. Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.1 Justifier que P est inversible et donner P^{-1}. Puis calculer $D = P^{-1}AP$.

6.2 En déduire l'expression sous forme d'un tableau matriciel de A^n tel que $n \in \mathbb{N}$.

PARTIE C

7. Soit $t \in \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que : $e^t = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right)$.

Pour tout réel t, on note $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k\,!} A^k$. où la matrice A est celle définie à la partie B.

On écrit $E_n(t)$ sous la forme : $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

8. Soit $t \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}$. Expliciter (sous forme de sommes) les coefficients $a_n(t), b_n(t), c_n(t), d_n(t)$ de $E_n(t)$.

9. Soit $t \in \mathbb{R}$. Justifier que les suites $(a_n(t))_{n\in\mathbb{N}}, (b_n(t))_{n\in\mathbb{N}}, (c_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \text{et } (d_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et déterminer leurs limites notées $a(t) = \lim_{n\to+\infty} a_n(t)$, $b(t) = \lim_{n\to+\infty} b_n(t)$, $c(t) = \lim_{n\to+\infty} c_n(t) \text{ et } d(t) = \lim_{n\to+\infty} d_n(t)$.
(Réponse partielle : $a(t) = 3e^{2t} - 2e^t$) .

Désormais, on note $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$.

10. Expliciter deux matrices $Q \text{ et } R$ telles que : $\forall t \in \mathbb{R}, E(t) = e^{2t}Q + e^t R$.

11. Calculer $Q^2, R^2, QR \text{ et } RQ$.

12. En déduire que $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, E(s+t) = E(s)E(t)$.

13. Que dire de $E(t)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$? pour $n = -1$?

Fin et bonnes vacances printanières à tous 🌹