Corrigé du DS 6

EXERCICE 1 Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ **inversible** et $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note C_1, C_2, C_3 les colonnes de A et $A = (C_1|C_2|C_3)$.

On note $M_1 = (T|C_2|C_3)$ la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la première colonne de A par T.

On note $M_2 = (C_1|T|C_3)$ la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la deuxième colonne de A par T.

On note $M_3 = (C_1|C_2|T)$ la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la troisième colonne de A par T.

Soit (S) le système linéaire $AX = T$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Justifier que (S) admet une unique solution. On note $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ cette unique solution.
2. Justifier que $x_0C_1 + y_0C_2 + z_0C_3 = T$.
3. Démontrer, grâce à 1. et aux propriétés du déterminant, que $\det(M_1) = x_0 \det(A)$.
4. Enoncer des formules analogues pour $\det(M_2)$ et $\det(M_3)$.
5. Conclure que l'unique solution de (S) est $\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} \det(M_1) \\ \det(M_2) \\ \det(M_3) \end{pmatrix}$.
6. **Application :** Soit p, q, r, s des paramètres réels et (S): $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ px + qy + rz = s \\ p^2x + q^2y + r^2z = s^2 \end{cases}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Les solutions de (S) dépendent de p, q, r, s .

6.1 Ecrire la matrice A associée à (S) et la matrice T du second membre.

6.2 Montrer que : A est inversible si et seulement si p, q et r sont tous distincts.

6.3 Ici p, q et r sont tous distincts. Résoudre (S) en utilisant les résultats précédents.

6.4 Ici $p = q = r$. Résoudre (S).

1. A étant inversible, $A^{-1}T$ est l'unique solution de (S).
2. On sait que $AX_0 = T$. De plus, d'après le cours, $AX = x_0C_1 + y_0C_2 + z_0C_3$. Donc, $x_0C_1 + y_0C_2 + z_0C_3 = T$.
3. $\det(M_1) = \det(T|C_2|C_3) = det(x_0C_1 + y_0C_2 + z_0C_3|C_2|C_3)$. Donc, par linéarité du déterminant par la première colonne, $\det(M_1) = x_0 det(C_1|C_2|C_3) + y_0 \underbrace{det(C_2|C_2|C_3)}_{\substack{=0\ car \\ C_1 = C_2}} + z_0 \underbrace{det(C_3|C_2|C_3)}_{\substack{=0\ car \\ C_1 = C_3}} = x_0 det(C_1|C_2|C_3) = x_0 \det(A)$.
4. De même, $\det(M_2) = y_0 \det(A)$ et $\det(M_3) = z_0 \det(A)$.
5. Ainsi, $x_0 = \frac{\det(M_1)}{\det(A)}, y_0 = \frac{\det(M_2)}{\det(A)}, z_0 = \frac{\det(M_3)}{\det(A)}$. Donc, $X_0 = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} \det(M_1) \\ \det(M_2) \\ \det(M_3) \end{pmatrix}$.
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{pmatrix}$.
7. $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & q-p & r-p \\ p^2 & q^2-p^2 & r^2-p^2 \end{vmatrix} = (q-p)(r-p)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & 1 \\ p^2 & p+q & p+r \end{vmatrix} = (q-p)(r-p)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 \\ p^2 & p+q & q-r \end{vmatrix}$ donc, $\det(A) = (q-p)(r-p)(r-q)$. Donc A est inversible sietssi p, q, et r sont tous distincts.
8. Ici A est inversible donc nous pouvons appliquer le résultat 5. $\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} \det(M_1) \\ \det(M_2) \\ \det(M_3) \end{pmatrix}$ est l'unique solution de (S) où

   $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s & q & r \\ s^2 & q^2 & r^2 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & s & r \\ p^2 & s^2 & r^2 \end{pmatrix}$ $et\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & s \\ p^2 & q^2 & s^2 \end{pmatrix}$.

   D^' après le calcul de $\det(A)$, $\begin{cases} \det(M_1) = (q-s)(r-s)(r-q) \\ \det(M_2) = (s-p)(r-p)(r-s) \\ \det(M_3) = (q-p)(s-p)(s-q) \end{cases}$. Ainsi, $\frac{\det(M_1)}{\det(A)} = \frac{(q-s)(r-s)(r-q)}{(q-p)(r-p)(r-q)} = \frac{(q-s)(r-s)}{(q-p)(r-p)}$ et

   $\frac{\det(M_2)}{\det(A)} = \frac{(s-p)(r-s)}{(q-p)(r-q)}$ et $\frac{\det(M_3)}{\det(A)} = \frac{(s-p)(s-q)}{(r-p)(r-q)}$. J'en conclus que $\begin{pmatrix} \frac{(q-s)(r-s)}{(q-p)(r-p)} \\ \frac{(s-p)(r-s)}{(q-p)(r-q)} \\ \frac{(s-p)(s-q)}{(r-p)(r-q)} \end{pmatrix}$ est la solution de (S).
9. **Supposons que $q = p \neq r$.** Alors, (S): $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ px + py + rz = s \\ p^2x + p^2y + r^2z = s^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ (r-p)z = s-p \\ (r^2-p^2)z = s^2-p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ (r-p)z = s-p \\ 0 = s^2 - p^2 - (s-p)(r+p) \end{cases}$.

   Or, $s^2 - p^2 - (s-p)(r+p) = (s-p)(s+p-r-p) = (s-p)(s-r)$. J'en déduis les deux cas suivants.

   Si $s \notin \{r, s\}$ alors (S) n'a pas de solution.

Si $s \in \{r,s\}$ alors $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{s-p}{r-p} - y = \frac{r-s}{r-p} - y \\ z = \frac{s-p}{r-p} \end{cases}$ Ainsi, si $q = p \neq r$,alors $Sol(S) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{r-s}{r-p} - y \\ y \\ \frac{s-p}{r-p} \end{pmatrix} / \ y \ réel \right\}$.

De même, si $p = r \neq q$,alors $Sol(S) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \frac{s-p}{q-p} \\ \frac{q-s}{q-p} - x \end{pmatrix} / \ x \ réel \right\}$.

De même, si $q = r \neq p$,alors $Sol(S) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{s-r}{p-r} \\ \frac{p-s}{p-r} - z \\ z \end{pmatrix} / \ z \ réel \right\}$.

Supposons que $q = p = r$. Alors,(S) : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ px + py + pz = s \\ p^2x + p^2y + p^2z = s^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = s - p \\ 0 = s^2 - p^2 \end{cases}$.

Si $s \neq p$ alors (S) n'a pas de solution.

Si $s = p$ alors $(S) \ \Leftrightarrow x = 1 - y - z$. Donc, $Sol(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - z - y \\ y \\ z \end{pmatrix} / \ y, z \ réels \right\}$.

EXERCICE 2 Une famille de polynômes

PARTIE 1 Propriétés de L_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $L_n(X) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k$, polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. Expliciter L_n pour $n \in [\![0,2]\!]$.
2. Montrer que $L_n(-X) = (-1)^n L_n(X)$.
3. Calculer $\widetilde{L_n}(1)$ et $\widetilde{L_n}(-1)$.
4. On pose $P_n(X) = (X^2-1)^n$.
   4.1. Exprimer L_n en fonction de ${P_n}^{(n)}$.
   4.2. En déduire le degré de L_n.
   4.3. Déterminer le coefficient dominant de L_n de deux manières différentes.
   4.4. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = 1 + |x|$.
   5.1. Montrer que $|\widetilde{L_n}(x)| \leq \left(\frac{y}{2}\right)^n \binom{2n}{n}$.
   5.2. Justifier que $max_{[-1,1]}|\widetilde{L_n}|$ existe et $max_{[-1,1]}|\widetilde{L_n}| \leq \binom{2n}{n}$.

1. $L_0(X) = 1$ et $L_1(X) = \frac{1}{2}[(X-1)^1 + (X+1)^1] = X$ et $L_2(X) = \frac{1}{4}[(X-1)^2 + 4(X-1)(X+1) + (X+1)^2] = \frac{1}{2}[3X^2 - 2]$.

2. $L_n(-X) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-X-1)^{n-k}(-X+1)^k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(-1)^k(X-1)^k$

$L_n(-X) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-1)^n(X+1)^{n-k}(X-1)^k = (-1)^n \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X+1)^{n-k}(X-1)^k = (-1)^n L_n(X)$.

3. $L_n(1) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 0^{n-k}2^k = \binom{n}{n}^2 0^{n-n}2^n = 2^n$ et $L_n(-1) = (-1)^n L_n(1) = (-1)^n 2^n = (-2)^n$.

4. 1. $P_n(X) = (X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$. Donc, d'après Leibniz, ${P_n}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((X-1)^n)^{(k)}((X+1)^n)^{(n-k)}$

${P_n}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(X+1)^k = n!\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!k!}(X-1)^{n-k}(X+1)^k = n!\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k$

Donc, ${P_n}^{(n)} = n!\, 2^n L_n(X)$. Ainsi, $L_n(X) = \frac{1}{n!2^n}{P_n}^{(n)}$.

2. Comme $\deg(P_n) = 2n$, $deg(L_n) = \deg({P_n}^{(n)}) = 2n - n = n$.

3.D' une part, $P_n(X) = (X^2-1)^n = X^{2n} + T(X)$ avec $deg(T) < 2n$ donc ${P_n}^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!}X^n + T^{(n)}$ avec $deg(T^{(n)}) < n$.

Donc $L_n(X) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}X^n + Q(X)$ avec $deg(Q) < n$. Ainsi, $codom(L_n) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

D'autre part, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $deg \binom{n}{k}^2 ((X-1)^{n-k}(X+1)^k) = n$. Alors, comme $deg(L_n) = n$, $codom(L_n) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

4. J'en déduis, par unité des coefficients d'un polynôme, que $\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$donc, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$.

5.Soit x un réel et $y = 1 + |x|$.

1. $|L_n(x)| = \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x+1)^{n-k}(x-1)^k\right| = \frac{1}{2^n}\left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x+1)^{n-k}(x-1)^k\right|$

$$\overset{I.T}{\lesseqgtr} \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \left|\binom{n}{k}^2 (x+1)^{n-k}(x-1)^k\right| = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 |x+1|^{n-k}|x-1|^k$$

Or, $0 \leq |x+1| \overset{I.T}{\lesseqgtr} |x| + 1 = y$ donc $0 \leq |x+1|^{n-k} \leq y^{n-k}$ et $0 \leq |x-1| \overset{I.T}{\lesseqgtr} |x| + 1 = y$ donc $0 \leq |x-1|^k \leq y^k$. Et par conséquent, $\binom{n}{k}^2 |x+1|^{n-k}|x-1|^k \leq \binom{n}{k}^2 y^{n-k}y^k = \binom{n}{k}^2 y^n$

Alors, $\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 |x+1|^{n-k}|x-1|^k \leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 y^n = \frac{1}{2^n}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2\right] y^n = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n} y^n = \left(\frac{y}{2}\right)^n \binom{2n}{n}$.

Ainsi, par transitivité de la relation d'ordre, $|L_n(x)| \leq \left(\frac{y}{2}\right)^n \binom{2n}{n}$.

$\widetilde{L_n}$ est continue sur le segment $[-1;1]$ donc $|\widetilde{L_n}|$est aussi continue sur le segment $[-1;1]$. Par conséquent, $|\widetilde{L_n}|$ admet un maximum et un minimum sur ce segment. Ainsi, $max_{[-1,1]}|\widetilde{L_n}|$ existe . Il existe $c \in [-1;1]$tq $max_{[-1,1]}|\widetilde{L_n}| = |\widetilde{L_n}(c)|$.

Or, $\forall x \in [-1;1], |x| \leq 1$ donc $0 \leq y \leq 2$ et par suite, $0 \leq \left(\frac{y}{2}\right)^n \binom{2n}{n} \leq \binom{2n}{n}$. Donc, $\forall x \in [-1;1] |L_n(x)| \leq \left(\frac{y}{2}\right)^n \binom{2n}{n} \leq \binom{2n}{n}$. En particulier, $|\widetilde{L_n}(c)| \leq \binom{2n}{n}$. Ainsi, $max_{[-1,1]}|\widetilde{L_n}| \leq \binom{2n}{n}$.

PARTIE 2 Racines de L_n

6. Soit $q \in [\![0, n-1]\!]$. Justifier que $\widetilde{P_n^{(q)}}(1) = \widetilde{P_n^{(q)}}(-1) = 0$.
7. Montrer que $\forall q \in [\![0, n]\!]$, $\widetilde{P_n^{(q)}}$ s'annule (au moins) q fois dans l'intervalle $]-1\,;1[$.
8. En déduire que L_n est scindé à racine simples réelles et toutes ses racines sont dans l'intervalle $]-1\,;1[$.

Désormais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $R(n)$ l'ensemble des racines du polynôme L_n . On a donc $R(n) \subset]-1,1[$.

Soit $\lambda(n)$ la plus grande de ces racines.

9. Justifier que 0 est centre de symétrie de l'ensemble $R(n)$.
10. Quelle est la plus petite racine du polynôme L_n ?
11. Quel est le signe de $\widetilde{L_n}(x)$ lorsque $x \in]\lambda(n), +\infty[$?

6. $P_n(X) = (X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$.Donc 1 et -1 sont racines de P_n de multiplicité n. Alors le cours assure que $\forall q \in [\![0, n-1]\!]$, $\widetilde{P_n^{(q)}}(1) = \widetilde{P_n^{(q)}}(-1) = 0$.
7. $\widetilde{P_n}$ ne s'annule qu'en 1 et -1, donc s'annule 0 fois sur $]-1\,;1[$.

Appliquons le théorème de Rolle à successivement $\widetilde{P_n}, \widetilde{P_n^{(1)}}, \dots, \widetilde{P_n^{(n-1)}}$. $\widetilde{P_n}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc les dérivées successives de $\widetilde{P_n}$ sont continues sur $[-1,1]$ et dérivables sur $]-1\,;1[$.

$\widetilde{P_n}(1) = \widetilde{P_n}(-1) = 0$. Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe un réel $c_{11} \in]-1;1[$ tels que $\widetilde{P_n}'(c_{11}) = 0$.

$\widetilde{P_n}'(1) = \widetilde{P_n}'(c_{11}) = \widetilde{P_n}'(-1) = 0$. Donc Rolle assure qu'il existe deux réels $c_{21} \in]-1; c_{11}[$ et $c_{22} \in]c_{11}, c_{21}[$ tq $\widetilde{P_n}''(c_{21}) = \widetilde{P_n}''(c_{22}) = 0$.

$\widetilde{P_n}''(1) = \widetilde{P_n}''(c_{21}) = \widetilde{P_n}''(c_{22}) = \widetilde{P_n}''(-1) = 0$. Donc Rolle assure qu'il existe trois réels $c_{31} \in]-1; c_{21}[$ et $c_{32} \in]c_{21}, c_{22}[$ et $c_{33} \in]c_{22}, 1[$ tels que $\widetilde{P_n}'''(c_{31}) = \widetilde{P_n}'''(c_{32}) = \widetilde{P_n}'''(c_{33}) = 0$.

On itère ce précédé. On construit ainsi une famille de réels $(c_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n-1}$tous distincts et tels que :

$$\forall i \in [\![2, n-1]\!], -1 \leq c_{i-1\,1} < c_{i1} < c_{i-1\,2} < c_{i2} < \dots < c_{i-1\,n-2} < c_{i\,n-1} < 1.$$

Alors $\widetilde{P_n}^{(n-1)}(1) = \widetilde{P_n}^{(n-1)}(c_{n-1\,1}) = \dots = \widetilde{P_n}^{(n-1)}(c_{n-1\,n-1}) = \widetilde{P_n}^{(n-1)}(-1)$. Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe n réels $c_{n1} \in]-1; c_{n-1\,1}[$ et $c_{n2} \in]c_{n-1\,1}, c_{n-1\,2}[$, ... et $c_{nn} \in]c_{n-1\;n-1}, 1[$ tels que $\widetilde{P_n}^{(n)}(c_{n\,i}) = 0$.

Ainsi, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\widetilde{P_n}^{(i)}$ s'annule au moins i fois sur $]-1\,;1[$.

8. $\widetilde{P_n}^{(n)}$s'annule donc n fois en tre -1 ; et 1 et comme $\deg\left(\widetilde{P_n}^{(n)}\right) = n$, ces n racines réelles sont les seules racines de $P_n{}^{(n)}$et sont toutes simples dans $P_n{}^{(n)}$. J' en déduis que $P_n{}^{(n)}$est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et toutes dans $]-1;1[$.

Comme $L_n(X) = \frac{1}{n!2^n} P_n{}^{(n)}$, $L_n$est aussi scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples et toutes dans $]-1;1[$.

9. Si c est racine L_n alors $L_n(-c) = (-1)^n L_n(c) = 0$ donc $-c$ est racine de L_n. Ainsi, 0 est centre de symétrie de l'ensemble $R(n)$.
10. La plus petite racine de L_n est donc $-\lambda$.
11. Comme toutes les racines de L_n sont dans $[-\lambda(n), \lambda(n)] \subset]-1;1[$, $\widetilde{L_n}$ ne s'annule pas sur $]\lambda(n), +\infty[$. $\widetilde{L_n}$ étant continue sur cet intervalle, $\widetilde{L_n}$ garde un signe constant sur cet intervalle. Or, $\widetilde{L_n}(1) = 2^n > 0$. Donc $\widetilde{L_n}$ est strictement positive sur $]\lambda(n), +\infty[$.

PARTIE 3 Racines de P_n et L_n

12. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que, en faisant k intégrations par parties, que $\int_{-1}^{1} \widetilde{P_n^{(n)}}(x) x^k dx = 0$.
13. En déduire que $\forall S \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\int_{-1}^{1} \widetilde{L_n}(x)\tilde{S}(x) dx = 0$.

12. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. $\int_{-1}^{1} \widetilde{P_n^{(n)}}(x) x^k dx \overset{IPP}{=} \underbrace{\left[\widetilde{P_n^{(n-1)}}(x) x^k\right]_{-1}^{1}}_{\substack{=0\ car \\ \widetilde{P_n^{(n-1)}}(1) = \widetilde{P_n^{(n-1)}}(-1) = 0}} - \int_{-1}^{1} \widetilde{P_n^{(n-1)}}(x) k x^{k-1} dx = -k \int_{-1}^{1} \widetilde{P_n^{(n-1)}}(x) x^{k-1} dx$

$$\overset{IPP}{=} (-k) \left\{ \underbrace{\left[\widetilde{P_n^{(n-2)}}(x) x^{k-1}\right]_{-1}^{1}}_{\substack{=0\ car \\ \widetilde{P_n^{(n-2)}}(1) = \widetilde{P_n^{(n-2)}}(-1) = 0}} - \int_{-1}^{1} \widetilde{P_n^{(n-2)}}(x)(k-1) x^{k-2} dx = k(k-1) \int_{-1}^{1} \widetilde{P_n^{(n-2)}}(x) x^{k-2} dx \right\}$$

On itère ce procédé. Après k IPP, $\int_{-1}^{1} \widetilde{P_n^{(n)}}(x) x^k dx = (-1)^k k! \int_{-1}^{1} \widetilde{P_n^{(n-k)}}(x) dx = (-1)^k k! \left[\widetilde{P_n^{(n-k-1)}}(x)\right]_{-1}^{1} \underbrace{=}_{\substack{car \\ \widetilde{P_n^{(n-k-1)}}(1) = \widetilde{P_n^{(n-k-1)}}(-1) = 0}} 0.$

13. Soit $S = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$\int_{-1}^{1} \widetilde{L_n}(x)\tilde{S}(x) dx = \int_{-1}^{1} \widetilde{L_n}(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right) dx = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{-1}^{1} \widetilde{L_n}(x) x^k dx = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{-1}^{1} \frac{1}{n!\,2^n} P_n{}^{(n)} x^k dx =$$

$$= \frac{1}{n!\,2^n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \underbrace{\int_{-1}^{1} P_n{}^{(n)} x^k dx}_{=0\ d'après\ 12.} = 0.$$

EXERCICE 3 Une famille de matrices. Les parties B et C sont liées, la partie A est indépendante.

PARTIE A Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit N une matrice de $M_p(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice 3 i.e. $N^3 = 0$ et $N^2 \neq 0$. Dans cette partie, pour tout réel t, on note $E(t) = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2$.

1. Soit s et t deux réels. Montrer qu'il existe un réel w tel que $E(s)E(t) = E(w)$ et exprimer w en fonction de s et t.

2. En déduire que :

a. pour tout entier naturel n et tout réel t, $E(nt) = E(t)^n$.

b. pour tout réel t, $E(t)$ est inversible et que son inverse est de la forme $E(v)$ où l'on exprimera v en fonction de t.

3. Soit s et t deux réels. Montrer que $E(t) = E(s) \Leftrightarrow t = s$.

1. $E(t)E(s) = \left(I + tN + \frac{t^2}{2}N^2\right)\left(I + sN + \frac{s^2}{2}N^2\right) = I + (t+s)N + \left(ts + \frac{s^2}{2} + \frac{t^2}{2}\right)N^2 = I + (t+s)N + \frac{(t+s)^2}{2}N^2 = E(s+t)$. Donc $w = s + t$ convient.

2. a. Soit t un réel. Posons $H(n)$: $E(nt) = E(t)^n$.
Init° : $E(0t) = E(0) = I = E(t)^0$. Donc $H(0)$ vraie.
Propag° : Soit n un entier naturel tel que $E(nt) = E(t)^n$.
Alors $E((n+1)t) = E(nt+t) = E(nt)E(t) = E(t)^nE(t) = E(t)^{n+1}$.
Ccl° : je peux conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, E(nt) = E(t)^n$.
b. Soit t un réel. $E(t)E(-t) = E(0) = I$. J'en déduis que $E(t)$est inversible et d'inverse $E(-t)$.

3. $E(t) = E(s) \Leftrightarrow \left(I + tN + \frac{t^2}{2}N^2\right) = \left(I + sN + \frac{s^2}{2}N^2\right)$

$$\Leftrightarrow (s-t)N + \frac{s^2 - t^2}{2}N^2 = 0 \Leftrightarrow (s-t)\left[N + \frac{s+t}{2}N^2\right] = 0 \Leftrightarrow s = t \text{ ou } N + \frac{s+t}{2}N^2 = 0.$$

Or, $N + \frac{s+t}{2}N^2 = 0 \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{je multiplie par } N} N^2 + \frac{s+t}{2}N^3 = 0 \Longrightarrow N^2 = 0$ *ce qui est faux*. Donc, $N + \frac{s+t}{2}N^2 \neq 0$. Par suite, $E(t) = E(s) \Leftrightarrow s = t$.

PARTIE B

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ élément de $M_2(\mathbb{R})$.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que le système $AX = \lambda X$ admet une unique solution **sietssi** $\lambda \notin \{1; 2\}$.

5. Montrer que le système $AX = X$ admet comme solution toutes les matrices $\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ telles que $\alpha \in \mathbb{R}$ et le système $AX = 2X$ admet comme solution toutes les combinaisons linéaires de à $\beta\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ telles que $\beta \in \mathbb{R}$.

6. Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que P est inversible et donner P^{-1}et calculer $D = P^{-1}AP$.

b. En déduire l'expression sous forme d'un tableau matriciel de A^n tel que $n \in \mathbb{N}$.

4. le système $AX = \lambda X$ admet une unique solution ***sietssi*** $A - \lambda I$ est inversible ***sietssi*** $det(A - \lambda I) \neq 0$.

Or, $det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. J'en déduis que le système $AX = \lambda X$ admet une unique solution ***sietssi*** $\lambda \notin \{1; 2\}$.

5. $AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y$. Donc $Sol = \{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R}\} = \{ y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R}\}$.

De même, $AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3y$. Donc $Sol = \{ \begin{pmatrix} 3y \\ y \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R}\} = \{ y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R}\}$.

6. Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c. $det(P) = -1 \neq 0$ donc P est inversible. $P^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. $D = P^{-1}AP = diag(1,2)$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$.. $A = PDP^{-1}$ donc $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 3.2^n & 6 - 3.2^{n+1} \\ -1 + 2^n & 3 - 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

PARTIE C

7. Soit $t \in \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que : $e^t = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\right)$.

Pour tout réel t, on note $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}A^k$ où la matrice A est celle définie à la partie B.

On écrit $E_n(t)$ sous la forme : $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

8. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Expliciter (sous forme de sommes) les coefficients $a_n(t), b_n(t), c_n(t), d_n(t)$ de $E_n(t)$.

9. Soit $t \in \mathbb{R}$. Justifier que les suites $(a_n(t))_{n\in\mathbb{N}}, (b_n(t))_{n\in\mathbb{N}}, (c_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et déterminer leurs limites notées $a(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t)$, $b(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t)$, $c(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t)$ et $d(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t)$. (Réponse partielle : $a(t) = 3e^{2t} - 2e^t$) . Désormais, on note $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$.

10. Expliciter deux matrices Q et R telles que : $\forall t \in \mathbb{R}, E(t) = e^{2t}Q + e^tR$.

11. Calculer Q^2, R^2, QR et RQ.

12. En déduire que $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, E(s+t) = E(s)E(t)$.

13. Que dire de $E(t)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$? pour $n = -1$?

7. Soit t un réel . exp est de classe C^∞ sur le segment S d'extrémités 0 et t. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in S, \left|exp^{(n+1)}(x)\right| = e^x \leq e^{|t|}$.

Alors, l'inégalité de Taylor-Lagrange assure que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\right| \leq \frac{e^{|t|}|t|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Or , $\lim_{n\to+\infty}\frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}\underbrace{=}_{\substack{croissances\\ comparées\\ sur\ les\ s}}0$. Donc, $\lim_{n\to+\infty}e^{|t|}\frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}=0$ et j'en conclus que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}=e^t$.

8. $E_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k\,!}\begin{pmatrix}-2+3.2^k & 6-3.2^{k+1}\\ -1+2^k & 3-2^{k+1}\end{pmatrix}=$

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix}-2\frac{t^k}{k\,!}+3.2^k\frac{t^k}{k\,!} & 6\frac{t^k}{k\,!}-3.2^{k+1}\frac{t^k}{k\,!}\\ -\frac{t^k}{k\,!}+2^k\frac{t^k}{k\,!} & 3\frac{t^k}{k\,!}-2^{k+1}\frac{t^k}{k\,!}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{n}-2\frac{t^k}{k\,!}+3.2^k\frac{t^k}{k\,!} & \sum_{k=0}^{n}6\frac{t^k}{k\,!}-3.2^{k+1}\frac{t^k}{k\,!}\\ \sum_{k=0}^{n}-\frac{t^k}{k\,!}+2^k\frac{t^k}{k\,!} & \sum_{k=0}^{n}3\frac{t^k}{k\,!}-2^{k+1}\frac{t^k}{k\,!}\end{pmatrix}$$

$$E_n(t)=\begin{pmatrix}-2\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k\,!}+3\sum_{k=0}^{n}\frac{(2t)^k}{k\,!} & 6\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k\,!}-6\sum\frac{(2t)^k}{k\,!}\\ -\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k\,!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(2t)^k}{k\,!} & 3\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k\,!}-2\sum_{k=0}^{n}\frac{(2t)^k}{k\,!}\end{pmatrix}$$

Ainsi, $a_n(t)=-2\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k\,!}+3\sum_{k=0}^{n}\frac{(2t)^k}{k\,!}$

$b_n(t)=6\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k\,!}-6\sum_{k=0}^{n}\frac{(2t)^k}{k\,!}$

$c_n(t)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k\,!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(2t)^k}{k\,!}$

$d_n(t)=3\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k\,!}-2\sum_{k=0}^{n}\frac{(2t)^k}{k\,!}$.

9. $a(t)=\lim_{n\to+\infty}a_n(t)=-2e^t+3e^{2t}$

   $b(t)=\lim_{n\to+\infty}b_n(t)=6e^t-6e^{2t}$

   $c(t)=\lim_{n\to+\infty}c_n(t)=-e^t+e^{2t}$

   $d(t)=\lim_{n\to+\infty}d_n(t)=3e^t-2e^{2t}$

Alors, $E(t)=\begin{pmatrix}-2e^t+3e^{2t} & 6e^t-3e^{2t}\\ -e^t+e^{2t} & 3e^t-e^{2t}\end{pmatrix}=e^t\underbrace{\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -1 & 3\end{pmatrix}}_{=R}+e^{2t}\underbrace{\begin{pmatrix}3 & -6\\ 1 & -2\end{pmatrix}}_{=Q}$.

10. Par le calcul, je vérifie que $QR=RQ=0\ et\ Q^2=Q\ et\ R^2=R$.

11. $E(t)E(s)=(e^tR+e^{2t}Q)(e^sR+e^{2s}Q)=e^te^sR^2+e^te^{2s}RQ+e^{2t}e^sQR+e^{2t}e^{2s}Q^2=e^{t+s}R+e^{2(t+s)}Q=E(s+t)$.

12. Alors avec le même preuve que dans la partie A, $\forall n\in\mathbb{N}\cup[-1\}, E(t)^n=E(nt)$.