Programme de colle 25

Révision sur le calcul intégral

Intégration ou recherche d'une primitive de fonctions de la forme :

- ✓ Dérivées usuelles
- ✓ $\frac{u'(x)}{u(x)}$, $u'(x)u(x)^{\alpha}$ où $\alpha \neq -1$, $\frac{u'(x)}{u(x)^{\alpha}} = u'(x)u(x)^{-\alpha}$ où $\alpha \neq 1$, $u'(x)e^{u(x)}$, $u'(x)\cos(u(x))$ ...
- ✓ Produit d'une fonction $polynômiale$ et du $logarithme$ ou de l'$Arctangente$
- ✓ Produit de fonction $polynômiale$ et d'une fonction sinusoïdale ou exponentielle ou hyperbolique
- ✓ Produit d'un fonction exponentielle et d'une fonction sinusoïdale
- ✓ Produit de fonctions sinusoïdales
- ✓ $\frac{Q}{P}$ avec P et Q polynomiales
- ✓ $(x \mapsto \sqrt{1-x^2})$, $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$. $(x \mapsto \sqrt{a^2-x^2})$ où a et b réels non nuls.

CHAPITRE 18 : Espaces vectoriels de dimension finie.

I Dimension finie .

Définition d'un K-e-v de dimension finie (resp. infinie).

Un K-e-v E est de dimension finie lorsque E admet une famille génératrice finie.

Condition suffisante pour être un K-e-v de dimension infinie .

Si E contient une famille $(\overrightarrow{e_k})_{k\in\mathbb{N}}$telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est libre alors E est de dimension infinie.

Comparaison du cardinal d'une famille libre et cardinal d'une famille génératrice

Dans un K-e-v E de dimension finie, le cardinal de n'importe quelle famille libre de vecteurs de E est inférieur ou égal au cardinal de toute famille génératrice de E.

Existence d'une base et définition de la dimension.

Tout K-e-v E de dimension finie et non réduit à $\{\overrightarrow{O_E}\}$ a une base de cardinal fini et toutes les bases de E ont le même cardinal.

Ce cardinal commun à toutes les bases de E est la dimension de E.

Bases et dimension des K-e-v de référence .

Une droite vectorielle est un e-v de dimension 1. Un plan vectoriel est un e-v de dimension 2.
Si P *est le* $\mathbb{R}-e-v$ des vecteurs du plan, alors une base de P est formée de 2 vecteurs de P non colinéaires et $dim_{\mathbb{R}}\, P = 2$
Si E est le $\mathbb{R}-e-v$ des vecteurs de l'espace géométrique alors une base de E est formée de trois vecteurs de E non coplanaires et $dim_{\mathbb{R}}\, E = 3$.
$dim_K\, K = 1$. Base de K : (1).
$dim_K\, K^n = n$. Base canonique de K^n: $((1,0,..,0),(0,1,0,..,0),\dots,(0,0,\dots,0,1)$
$dim_K M_{n,p}(K) = np$. Base canonique de $M_{n,p}(K)$: $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$
$dim_K\, K_n[X] = n+1$. Base canonique de $K_n[X]$: $(1, X, X^2, .., X^n)$. Base de Taylor en α de $K_n[X]$: $(1, X-\alpha, (X-\alpha)^2, .., (X-\alpha)^n)$.
$dim_K\, K[X] = +\infty$.
$dim_K\, \mathcal{F}(I,K) = +\infty$, $dim_K\, C^k(I,K) = +\infty$, $dim_K\ \ D^k(I,K) = +\infty$, $dim_K\ \ C^\infty(I,K) = +\infty$.
$dim_K\, K^{\mathbb{N}} = +\infty$.

II Famille de vecteurs dans un K-e-v de dimension finie

Comparaison de la dimension avec le cardinal d'une famille libre et avec le cardinal d'une famille génératrice

Dans un K-e-v E de dimension finie, si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E , $\mathcal{B}$ est une base de E et $\mathcal{L}$ une famille libre de vecteurs de E alors, $card(\mathcal{L}) \leq card(\mathcal{B}) \leq card(\mathcal{G})$.

Caractérisation d'une base : famille libre et maximale ou famille génératrice et minimale .

Soit E K-e-v de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E
$\mathcal{F}$ est une base de E sietssi $\mathcal{F}$ est libre et card($\mathcal{F}$)=dim(E).
sietssi $\mathcal{F}$ est génératrcie et card($\mathcal{F}$)=dim(E).

Théorème de complétion d'une famille libre pour obtenir une base

Dans un K-e-v E de dimension finie, toute famille libre $\mathcal{L}$ peut être compléter par $dim(E) - card(\mathcal{L})$ vecteurs bien choisis parmi les vecteurs Tapez une équation ici.d'une base de E pour obtenir une nouvelle base de E.

Théorème d'extraction d'une base d'une famille génératrice .

Dans un K-e-v E de dimension finie, de toute famille génératrice $\mathcal{G}$ on peut ôter $card(\mathcal{G})-dim(E)$ vecteurs bien choisis parmi les vecteurs d'une base de $\mathcal{G}$ pour obtenir une nouvelle base de E.

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base finie.

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots \overrightarrow{e_n})$ une base d'un K-e-v E de dimension finie n . Soit $\mathcal{V}= (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ une famille de vecteurs de E .
$\forall j \in \{1,..p\}$, notons $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj})$ les composantes de $\overrightarrow{v_j}$ dans $\mathcal{B}$ ie. $\overrightarrow{v_j} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\overrightarrow{e_i}$

$$mat_{\mathcal{B}}\mathcal{V} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_2} & \cdots & \overrightarrow{v_p} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{e_n} \end{matrix}$$

$\Delta: \begin{pmatrix} E \to M_{n,1}(K) \\ \vec{x} \to mat_B\vec{x} \end{pmatrix}$ est une bijection.

Soit $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$ deux vecteurs de E , α, β deux scalaires. Alors $mat_{\mathcal{B}}\,(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha mat_{\mathcal{B}}\,\vec{x} + \beta mat_{\mathcal{B}}\,\vec{y}$.
Soit $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p}$des vecteurs de E . $\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_p\overrightarrow{v_p}$ si et ssi $mat_{\mathcal{B}}\,\vec{x} = \alpha_1 mat_{\mathcal{B}}\overrightarrow{v_1} + \alpha_2 mat_{\mathcal{B}}\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_p mat_{\mathcal{B}}\,\overrightarrow{v_p}$.

Caractérisation matricielle d »'une base

Soit $\mathcal{V}= (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$.des vecteurs de E . $\mathcal{V}$ *base de* E si et ssi $mat_{\mathcal{B}}\mathcal{V}$ est inversible. Et le cas échéant, $(mat_{\mathcal{B}}\mathcal{V})^{-1} = mat_{\mathcal{V}}\mathcal{B}$.

Matrice de passage entre deux bases

Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E alors $mat_{\mathcal{B}_1}\mathcal{B}_2$ est appelée la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.
$mat_{\mathcal{B}_1}\mathcal{B}_2$ est inversible et $(mat_{\mathcal{B}_1}\mathcal{B}_2)^{-1} = mat_{\mathcal{B}_2}\mathcal{B}_1$.

Formule de changement de bases pour les vecteurs

Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Soit $\vec{v}$ un vecteur de E . Alors , $mat_{\mathcal{B}_1}(\vec{v}\,) = mat_{\mathcal{B}_1}\mathcal{B}_2 \times\ mat\ _{\mathcal{B}_2}(\vec{v}\,)$.

III Ss-e-v d' un K-e-v de dimension finie

Dimension d'un sous–e-v d'un K-e-v de dimension finie .

Si F est un ss-e-v d'un K-e-v E de dimension finie alors F est de dimension finie et $dim(F) \leq dim(E)$ et $(F = E \Leftrightarrow dim(E) = dim(F))$.

Caractérisation de ss-e-v supplémentaires .

Soit $F\ et\ G$ un ss-e-v d'un K-e-v E de dimension finie .
F et G sont supplémentaires dans E⟺la concaténation d' une base de F et une base de G est une base de E.
Lorsque $F \oplus G = E, dim(F) + dim(G) = dim(E)$.

Existence et construction d'un supplémentaire .

Si F est un ss-e-v d'un K-e-v E de dimension finie alors F admet un supplémentaire dans E et ce supplémentaire est engendré par les vecteurs qui complètent une base de F pour obtenir une base de E.

Formule de Grassmann .

Soit $F\ et\ G$ un ss-e-v d'un K-e-v E de dimension finie . $dim(F) + dim(G) = dim(F + G) + dim(F \cap G)$.

IV Rang d'une famille de vecteurs

Si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de E alors $rg\mathscr{F} = \dim\,(vect(\mathscr{F}))$.
$rg\mathscr{F} \leq \min(dimE, card\mathscr{F})$.
$\mathscr{F}$est libre $\Leftrightarrow rg(\mathscr{F})$=card($\mathscr{F}$)
$\mathscr{F}$est génératrice de E $\Leftrightarrow rg(\mathscr{F})$=dim($E$).
$Si\ \mathscr{B}$ est une base de E alors $rg(\mathscr{F})$ $=rg(mat_{\mathscr{B}}\mathscr{F})$.

Chapitre 19 : Applications linéaires. Le tout début !

I Généralités

Définition et règles de calcul

$f \in \mathscr{L}(E,F)$ dans F lorsque f est une application de E dans F et $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \forall(\alpha,\beta) \in K^2, f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$.

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $f\left(\overrightarrow{O_E}\right) = \overrightarrow{O_F}$ et $\forall(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}) \in E^n, \forall(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in K^n, f(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overrightarrow{u_k}) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k f(\overrightarrow{u_k})$.

Exemples.

Application linéaire nulle : $\omega: E \to F\ telle\ que\ \ \omega(\vec{x}) = \overrightarrow{O_F}$
Endomorphisme nul $\omega: E \to E\ telle\ que\ \ \omega(\vec{x}) = \overrightarrow{O_E}$. Identité $id_E: E \to E\ telle\ que\ \ id_E(\vec{x}) = \vec{x}$.
Homothétie h vectorielle de rapport $\alpha \in K^*$: $h: E \to E\ telle\ que\ \ h(\vec{x}) = \alpha\vec{x}$.

Endomorphisme de K^n canoniquement associé à la matrice A de $M_n(K)$: $f_A: \left((x_1,x_2,\dots,x_n) \mapsto (y_1,y_2,\dots,y_n)\right)$ tel que : $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Application linéaire $f$de $K^p dans\ K^n$ canoniquement associée à la matrice A de $M_{n,p}(K)$: $f_A: \left((x_1,\dots,x_p) \mapsto (y_1,\dots,y_n)\right)$ tq $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Trace, transposition, opérateur Intégral, dérivation (...).

Propriété fondamentale

Soit $B = (\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$ une base de l'espace vectoriel E et $(\overrightarrow{y_i})_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F . Il existe une unique application linéaire f de E vers F qui vérifie : $\forall i \in I, f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$.
Une application linéaire f de $E\ dans\ F$ est entièrement caractérisée par la donnée des images par f des vecteurs d'une base de E .
Deux applications linéaires de E dans F coïncidant en tout vecteur d'une base de E sont égales (partout).

Question de cours : Savoir énoncer tout résultat de cours et savoir énoncer et démontrer les résultats suivants :

1) La formule de changement de bases pour les vecteurs.
2) Dans un K-e-v E de dimension finie, tout ss-e-v F de E admet un supplémentaire dans E.
3) La formule de Grassmann.
4) Soit B=$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,..,\vec{e}_n)$ une base du K-e-v E et $(\vec{y}_1,\vec{y}_2,..,\vec{y}_n)$ une famille de vecteurs du K-e-v F . Démontrer qu'il existe une et une seule application linéaire f de E dans F telle que $\forall k \in [\![1,n]\!], f(\overrightarrow{e_k}) = \overrightarrow{y_k}$.