

Corrigé du TD 7

LES INCONTOURNABLES

Ex 1 De la trigo....Classique et réciproque.

Simplifions $\alpha = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{48}{7}\pi\right)\right)$.

Le cours assure que : $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Méthode : utiliser les propriétés de sinus ($\forall t \in \mathbb{R}, \sin(t) \stackrel{(*)}{=} \sin(t + 2k\pi)$ tq $k \in \mathbb{Z}$ et $\sin(t) \stackrel{(**)}{=} \sin(\pi - t)$) pour écrire $\alpha = \text{Arcsin}(\sin(\theta))$ tq $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}\alpha &= \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{48}{7}\pi\right)\right) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{42+6}{7}\pi\right)\right) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{6}{7}\pi + 6\pi\right)\right) \stackrel{(*)}{=} \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{6}{7}\pi\right)\right) \stackrel{(**)}{=} \text{Arcsin}\left(\sin\left(\pi - \frac{6}{7}\pi\right)\right) \\ \alpha &= \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) \stackrel{\text{car}}{=} \frac{\pi}{7}.\end{aligned}$$

$\frac{\pi}{7} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Avec la même méthode : simplifions $a(x) = \text{Arcsin}(\sin x)$ pour $x \in \left[-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right]$

Soit $x \in \left[-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right]$. Alors $\pi - x \in \left[\pi + \frac{5\pi}{2}, \pi + \frac{7\pi}{2}\right] = \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$. et $\pi - x - 4\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Donc, $a(x) = \text{Arcsin}(\sin(x)) \stackrel{(**)}{=} \text{Arcsin}(\sin(\pi - x)) \stackrel{(*)}{=} \text{Arcsin}(\sin(\pi - x - 4\pi)) \stackrel{\text{car}}{=} -3\pi - x$.

Simplifions $\beta = \text{Arccos}\left(\sin\left(\frac{36}{5}\pi\right)\right)$

Le cours assure que : $\text{Arccos}(\cos(x)) = x \Leftrightarrow x \in [0, \pi]$.

Méthode : utiliser la relation, $\forall t \in \mathbb{R}, \sin(t) \stackrel{(***)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ pour obtenir $\beta = \text{Arccos}(\cos(t))$ puis utiliser les propriétés de cosinus ($\forall t \in \mathbb{R}, \cos(t) \stackrel{(*)}{=} \cos(t + 2k\pi)$ tq $k \in \mathbb{Z}$ et $\cos(t) \stackrel{(**)}{=} \cos(-t)$) pour écrire $\beta = \text{Arccos}(\cos(\theta))$ tq $\theta \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned}\beta &= \text{Arccos}\left(\sin\left(\frac{36}{5}\pi\right)\right) \stackrel{(***)}{=} \text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{36}{5}\pi\right)\right) = \text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{(5-72)\pi}{10}\right)\right) = \text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{-67\pi}{10}\right)\right) = \text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{(-60-7)\pi}{10}\right)\right) \\ &= \text{Arccos}\left(\cos\left(-6\pi - \frac{7\pi}{10}\right)\right) \stackrel{(*)}{=} \text{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{10}\right)\right) \stackrel{(**)}{=} \text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)\right) \stackrel{\text{car}}{=} \frac{7\pi}{10}.\end{aligned}$$

$\frac{7\pi}{10} \in [0, \pi]$

Avec la même méthode simplifions $b(x) = \text{Arccos}(2\sin^2(x) - 1)$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. $b(x) = \text{Arccos}(2\sin^2(x) - 1) = \text{Arccos}(-\cos(2x)) \stackrel{\text{car } \forall t \in [0, \pi], \text{Arccos}(-t) = \pi - \text{Arccos}(t)}{=} \pi - \text{Arccos}(\cos(2x))$. Mais $2x \in [-\pi, \pi]$.

1er cas $2x \in [0, \pi]$ i.e. $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors, $b(x) = \pi - 2x$.

2ème cas $2x \in [-\pi, 0]$ i.e. $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Alors, $b(x) = \pi - \text{Arccos}(\cos(2x)) = \pi - \text{Arccos}(\cos(-2x)) = \pi + 2x$.

Ainsi, $b(x) = \begin{cases} \pi - 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi + 2x & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]. \end{cases}$

Simplifions $\gamma = \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{58}{13}\pi\right)\right)$.

Le cours assure que : $\text{Arctan}(\tan(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Méthode : utiliser les propriétés de tangente ($\forall t \in \mathbb{R}, \tan(t) \stackrel{(*)}{=} \tan(t + k\pi)$ tq $k \in \mathbb{Z}$) pour écrire $\beta = \text{Arctan}(\tan(\theta))$ tq $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\gamma = \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{58}{13}\pi\right)\right) = \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{52+6}{13}\pi\right)\right) = \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{6}{13}\pi + 4\pi\right)\right) \stackrel{(*)}{=} \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{6}{13}\pi\right)\right) \stackrel{\text{car}}{=} \frac{6}{13}\pi.$$

$\frac{6}{13}\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Simplifier les expressions suivantes :

$$A(x) = \cos(2\text{Arcsin}(x))$$

$$B(x) = \cos(2\text{Arctan}(x))$$

$$C(x) = \tan(2\text{Arcsin}(x))$$

$$D(x) = \sin(2\text{Arccos}(x))$$

$$E(x) = \sin(2\text{Arctan}(x))$$

Méthode : utiliser les formules de trigonométrie pour faire apparaître $\sin(\text{Arcsin}(x))$, $\cos(\text{Arcsin}(x))$, $\cos(\text{Arccos}(x))$, $\sin(\text{Arccos}(x))$.

Le cours assure que : $\forall x \in [-1, 1], \sin(\text{Arcsin}(x)) = x = \cos(\text{Arccos}(x))$. $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\text{Arctan}(x)) = x$.

$$\forall x \in [-1, 1], \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - x^2} = \cos(\text{Arcsin}(x)).$$

$$\cdot D_A = [-1, 1]. \forall x \in [-1, 1], A(x) = \cos(2\text{Arcsin}(x)) \stackrel{\text{car } \cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)}{=} 1 - 2\sin^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 - 2x^2.$$

$$\cdot D_B = \mathbb{R}. B(x) = \cos(2\text{Arctan}(x)) = 2\cos^2(\text{Arctan}(x)) - 1 \stackrel{\text{car } \frac{1}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)}{=} \frac{2}{1 + \tan^2(\text{Arctan}(x))} - 1 = \frac{2}{1 + x^2} - 1 = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

$$\cdot D_E = \mathbb{R}. E(x) = \sin(2\operatorname{Arctan}(x)) = 2\sin(\operatorname{Arctan}(x))\cos(\operatorname{Arctan}(x)) \stackrel{\substack{\text{car} \\ \sin(t)=\tan(t)\cos(t)}}{=} 2\tan(\operatorname{Arctan}(x))\cos^2(\operatorname{Arctan}(x))$$

$$E(x) \stackrel{\substack{\text{car} \\ \cos^2(t)=\frac{1}{1+\tan^2(t)}}}{=} \frac{2\tan(\operatorname{Arctan}(x))}{1+\tan^2(\operatorname{Arctan}(x))} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$\cdot D_C = [-1,1] \setminus \{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\}. \text{ En effet, } C(x) \text{ existe}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1,1] \\ \forall k \in \mathbb{Z}, 2\operatorname{Arcsin}(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$\text{Arcsin est défini sur } [-1,1] \text{ et } \operatorname{Arctan} \text{ est défini sur } \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$$

$$C(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1,1] \\ \forall k \in \mathbb{Z}, \operatorname{Arcsin}(x) \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1,1] \\ \operatorname{Arcsin}(x) \neq \pm \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1,1] \\ x \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

$$\text{Soit } x \in [-1,1] \setminus \{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\}, C(x) = \tan(2\operatorname{Arcsin}(x)) \stackrel{\substack{\tan(t)=\frac{\sin(t)}{\cos(t)} \\ \text{car } \sin(2t)=2\sin(t)\cos(t) \\ \text{et } \cos(2t)=1-2\sin^2(t)}}{=} \frac{\sin(2\operatorname{Arcsin}(x))}{\cos(2\operatorname{Arcsin}(x))} = \frac{2\sin(\operatorname{Arcsin}(x))\cos(\operatorname{Arcsin}(x))}{1-2\sin^2(\operatorname{Arcsin}(x))} = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}.$$

Ex 3 Etudier le domaine de définition, la périodicité et la parité des fonctions suivantes et représenter ces fonctions :

1. $m = \sin \circ \operatorname{Arcsin}$, $n = \cos \circ \operatorname{Arccos}$ et $q = \tan \circ \operatorname{Arctan}$.

Le cours assure que : $\forall x \in [-1,1], \sin(\operatorname{Arcsin}(x)) = x = \cos(\operatorname{Arccos}(x))$. $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\operatorname{Arctan}(x)) = x$.

Donc $m = \operatorname{id}_{[-1,1]} = n$ et Donc $q = \operatorname{id}_{\mathbb{R}}$. m et n sont définies sur $[-1,1]$, q est définie sur $\mathbb{R}$, toutes les trois sont impaires.

2. $f = \operatorname{Arcsin} \circ \sin$, $g = \operatorname{Arccos} \circ \cos$ et $h = \operatorname{Arctan} \circ \tan$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) \in [-1,1], \cos(x) \in [-1,1]$ Comme Arcsin et Arccos sont définies sur $[-1,1]$,

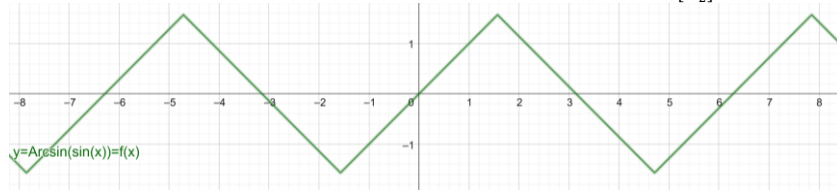
$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arcsin}(\sin(x))$ et $\operatorname{Arccos}(\cos(x))$ existent. Ainsi, $D_f = D_g = \mathbb{R}$.

Comme Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in D_{\tan}, \operatorname{Arctan}(\tan(x))$ existe. Donc $D_h = D_{\tan}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arcsin}(\sin(x + 2\pi)) = \operatorname{Arcsin}(\sin(x))$ et $\operatorname{Arcsin}(\sin(-x)) = \operatorname{Arcsin}(-\sin(x)) = -\operatorname{Arcsin}(\sin(x))$.

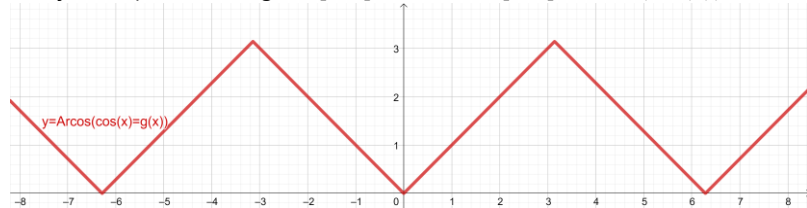
Donc, f est impaire et 2π -périodique. On peut étudier f sur $[0, \pi]$.

Or, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \operatorname{Arcsin}(\sin(x)) = x$ et $\forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \operatorname{Arcsin}(\sin(x)) = \operatorname{Arcsin}(\sin(\pi - x)) \stackrel{\substack{\text{car} \\ \pi - x \in [0, \frac{\pi}{2}]}}{=} \pi - x$. D'où la courbe ci-dessous.



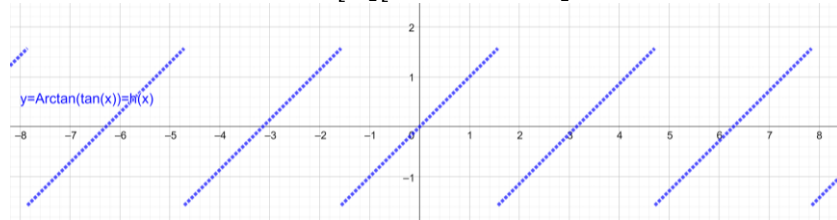
$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arccos}(\cos(x + 2\pi)) = \operatorname{Arccos}(\cos(x))$ et $\operatorname{Arccos}(\cos(-x)) = \operatorname{Arccos}(\cos(x))$.

Donc, g est paire et 2π -périodique. On peut étudier g sur $[0, \pi]$. Enfin, $\forall x \in [0, \pi], \operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x$. D'où la courbe ci-dessous.



$\forall x \in D_{\tan}, \operatorname{Arctan}(\tan(x + \pi)) = \operatorname{Arctan}(\tan(x))$ et $\operatorname{Arctan}(\tan(-x)) = \operatorname{Arctan}(-\tan(x)) = -\operatorname{Arctan}(\tan(x))$.

Donc, h est impaire et π -périodique. On peut étudier h sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Enfin, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \operatorname{Arctan}(\tan(x)) = x$. D'où la courbe ci-dessous.



Ex 2

Le cours assure que $\forall x \in [-1,1], \cos(\operatorname{Arccos}(x)) = x$ et $\sin(\operatorname{Arcsin}(x)) = x$

Résoudre (E_1) : $9\sin^2(x) - 1 = 0$

$$9\sin^2(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow (3\sin(x) - 1)(3\sin(x) + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{1}{3} \text{ ou } \sin(x) = -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right)\right) \text{ ou } \sin(x) = \sin\left(\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin(a) \\ \Leftrightarrow \\ \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} x &= a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x &= \pi - a + 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} x = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} x = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \end{cases}$$

Ainsi, $Sol = \left\{ \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi, -\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi, -\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi, \pi + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

$(E_2): 3 \sin(5x) - 2 \cos(5x) = 1$.

Le cours assure que :

pour tout $a \in [-1, 1]$, $\operatorname{Arccos}(a)$ est l'unique réel de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut a .

pour tout $b \in [-1, 1]$, $\operatorname{Arcsin}(b)$ est l'unique réel de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut b .

pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arcsin}(c)$ est l'unique réel de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut b .

Méthode : je reconnais la forme $A \cos(wx) + B \sin(wx)$ que je transforme sous la forme $C \sin(wx)$ ou $C \cos(wx)$ en mettant $\sqrt{A^2 + B^2}$ en facteur puis en reconnaissant le cosinus et le sinus d'un même angle en facteur de $\cos(wx)$ et de $\sin(wx)$.

$$3 \sin(5x) - 2 \cos(5x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{13} \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \sin(5x) - \frac{2}{\sqrt{13}} \cos(5x) \right) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \sin(5x) - \frac{2}{\sqrt{13}} \cos(5x) \right) = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\theta) \sin(5x) - \sin(\theta) \cos(5x) = \frac{1}{\sqrt{13}} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(5x - \theta) = \sin\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)\right)$$

Donc $\exists! \theta \in [0, 2\pi[/ \cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{13}}$

et $\sin(\theta) = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} 5x - \theta = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 5x - \theta = \pi - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) + 2k\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} x = \frac{\theta}{5} + \frac{1}{5} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) + \frac{2k\pi}{5} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\theta}{5} + \frac{\pi}{5} - \frac{1}{5} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) + \frac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

Comme $\cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{13}}$ et $\sin(\theta) = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)$ convient.

Ainsi, $Sol = \left\{ \frac{\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)}{5} + \frac{1}{5} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) + \frac{2k\pi}{5}, \frac{\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)}{5} + \frac{\pi}{5} - \frac{1}{5} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\}$

$(E_3): 3 \cos^2(x) - \tan(x) > 3$.

La fonction $f: (x \mapsto 3 \cos^2(x) - \tan(x))$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$. et π -périodique. Cherchons les solutions de (E_3) sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Soit $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Alors, $x \text{ sol}^\circ \text{ de } (E_3) \Leftrightarrow 3 \cos^2(x) - \tan(x) > 3 \Leftrightarrow \frac{3}{1 + \tan^2(x)} - \tan(x) > 3$

$x \text{ sol}^\circ \text{ de } (E_3) \Leftrightarrow 3 - \tan(x)(1 + \tan^2(x)) > 3(1 + \tan^2(x)) \Leftrightarrow \tan^3(x) + 3 \tan^2(x) + \tan(x) < 0$

$x \text{ sol}^\circ \text{ de } (E_3) \Leftrightarrow \tan(x)[\tan^2(x) + 3 \tan(x) + 1] < 0 \Leftrightarrow \tan(x)[\tan^2(x) + 3 \tan(x) + 1] < 0 \Leftrightarrow \tan(x) \left[\tan(x) - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right] \left[\tan(x) - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right] < 0$

Faisons un tableau de signe : Tout d'abord, $\tan(x) - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} < 0 \Leftrightarrow \tan(x) < \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)\right) \Leftrightarrow x < \operatorname{Arctan}\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

De même, $\tan(x) - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} < 0 \Leftrightarrow x < \operatorname{Arctan}\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)$.

De plus, $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2} < \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} < 0$. Alors, comme **Arctan est strictement croissante**, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan}\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) < \operatorname{Arctan}\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) < 0$.

D'où le tableau :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\operatorname{Arctan}\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)$	$\operatorname{Arctan}\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	-	-	-	0	+
$\tan(x) - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$	-	-	0	+	+
$\tan(x) - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$	-	0	+	+	+
$h(x)$	-	0	+	0	+

Donc les solutions de (E_3) dans $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ sont les tous les réels de $\left] -\frac{\pi}{2}, \operatorname{Arctan}\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) \right[\cup \left] \operatorname{Arctan}\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right), 0 \right[$. Alors, par périodicité de

f , j'en conclus que les solutions de (E_3) sont les tous les réels appartenant à un intervalle de la forme de $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \operatorname{Arctan}\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) + k\pi \right[$ ou de la forme $\left] \operatorname{Arctan}\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) + k\pi, k\pi \right[$ tel que $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit,

$Sol(E_3) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \operatorname{Arctan}\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) + k\pi \right[\cup \left] \operatorname{Arctan}\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) + k\pi, k\pi \right[$.

3. $r: (x \mapsto \text{Arccos}(\sin(3x)))$, $t: (x \mapsto \text{Arctan}(\frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}))$, $u: (x \mapsto \text{Arccos}(1 - 2\sin^2(\frac{x}{2})))$

$r: (x \mapsto \text{Arccos}(\sin(3x)))$. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(3x) \in [-1, 1]$. Donc $D_r = \mathbb{R}$. De plus, r est continue sur D_r car son expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.

r est $\frac{2\pi}{3}$ - périodique car $r(x + \frac{2\pi}{3}) = \text{Arccos}(\sin(3(x + \frac{2\pi}{3}))) = \text{Arccos}(\sin(3x + 2\pi)) = \text{Arccos}(\sin(3x)) = r(x)$.

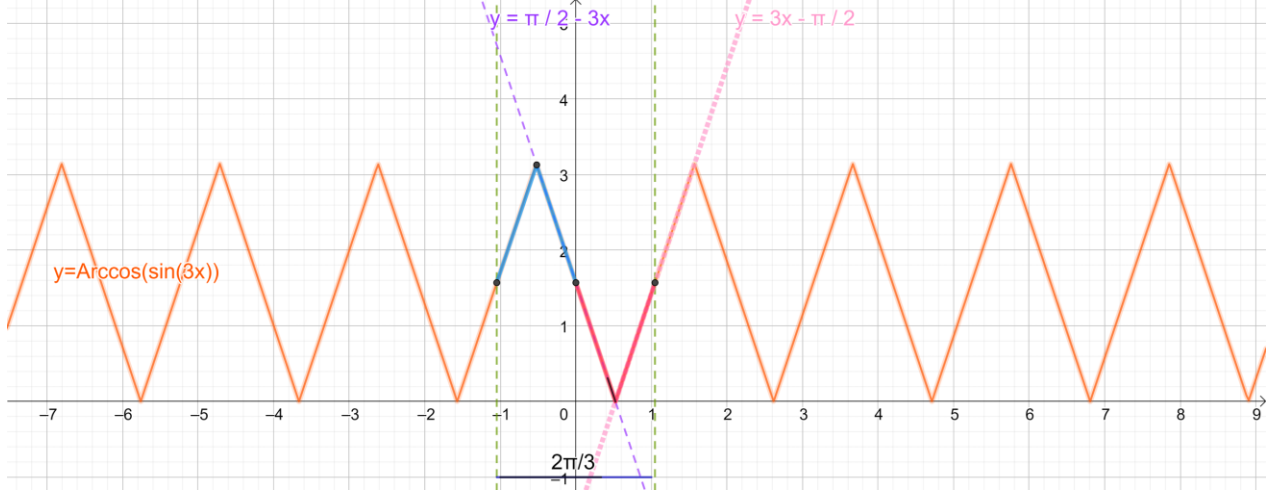
De plus, $r(-x) = \text{Arccos}(\sin(-3x)) = \text{Arccos}(-\sin(3x)) = \pi - \text{Arccos}(\sin(3x)) = \pi - r(x)$.

Donc, $\frac{r(-x) + r(x)}{2} = \frac{\pi}{2}$. Donc Les points $M(-x)$ et $M(x)$ sont symétriques par rapport au point $A(0, \frac{\pi}{2})$. On peut donc étudier r sur $[0, \frac{\pi}{3}]$.

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $3x \in [0, \pi]$ et $\text{Arccos}(\sin(3x)) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(\sin(3x))$.

Si $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$, alors $3x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\text{Arcsin}(\sin(3x)) = 3x$ et $r(x) = \frac{\pi}{2} - 3x$.

Si $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, alors $3x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ et $\pi - 3x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\text{Arcsin}(\sin(3x)) = \text{Arcsin}(\sin(\pi - 3x)) = \pi - 3x$ et $r(x) = \frac{\pi}{2} - (\pi - 3x) = 3x - \frac{\pi}{2}$.



$t: (x \mapsto \text{Arctan}(\frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}))$

$t(x)$ existe $\Leftrightarrow \tan(x)$ existe et $\tan(x) \neq \pm 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$. Donc, $D_t = \mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

$\forall x \in D_t, x + \pi \in D_t$ et $-x \in D_t$ et $t(x + \pi) = \text{Arctan}(\frac{2 \tan(x + \pi)}{1 - \tan^2(x + \pi)}) \stackrel{\text{car } \tan(x + \pi) = \tan(x)}{=} t(x)$

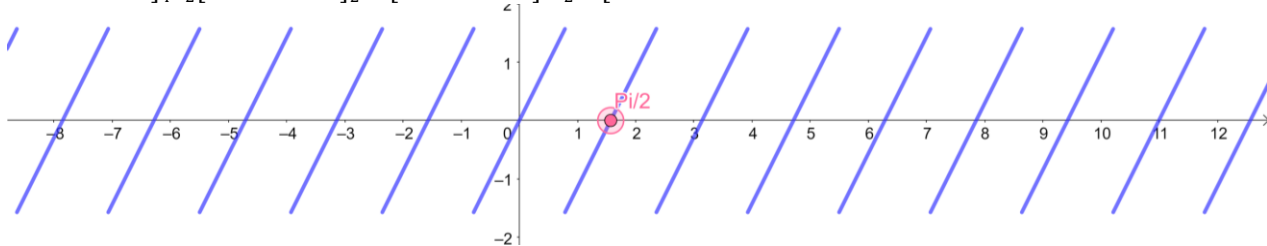
et $t(-x) = \text{Arctan}(\frac{2 \tan(-x)}{1 - \tan^2(-x)}) = \text{Arctan}(\frac{-2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}) = \text{Arctan}(\frac{-2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}) = -\text{Arctan}(\frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}) = -t(x)$.

Donc t est impaire et π - périodique. Etudions donc t sur $[0, \frac{\pi}{2} \setminus \{\frac{\pi}{4}\}]$.

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2} \setminus \{\frac{\pi}{4}\}]$, $\frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)} = \tan(2x)$ et $t(x) = \text{Arctan}(\tan(2x))$ avec $2x \in [0, \pi \setminus \{\frac{\pi}{2}\}]$.

1^{er} cas : $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Alors, $2x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et par conséquent, $t(x) = \text{Arctan}(\tan(2x)) = 2x$.

2^{ème} cas : $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Alors, $2x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ et $2x - \pi \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$; par conséquent, $t(x) = \text{Arctan}(\tan(2x)) = \text{Arctan}(\tan(2x - \pi)) = 2x - \pi$.



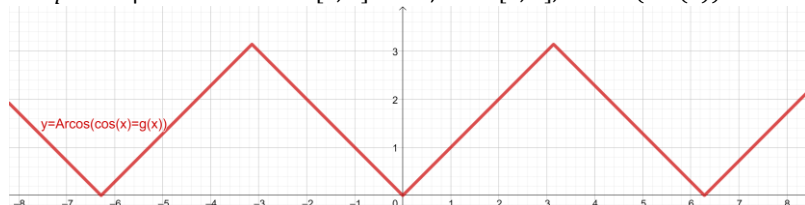
$u: (x \mapsto \text{Arccos}(1 - 2\sin^2(\frac{x}{2})))$

$u(x)$ existe $\Leftrightarrow -1 \leq 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2}) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -2\sin^2(\frac{x}{2}) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sin^2(\frac{x}{2}) \leq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $D_u = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2}) = \cos(x)$. Donc, $u(x) = \text{Arccos}(\cos(x))$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arccos}(\cos(x + 2\pi)) = \text{Arccos}(\cos(x))$ et $\text{Arccos}(\cos(-x)) = \text{Arccos}(\cos(x))$.

Donc, u est paire et 2π - périodique. On peut étudier u sur $[0, \pi]$. Enfin, $\forall x \in [0, \pi], \text{Arccos}(\cos(x)) = x$. D'où la courbe ci-dessous.



4. $f: (x \mapsto \text{Arccos}(\cos(x)) + \frac{1}{2}\text{Arccos}(\cos(2x)))$

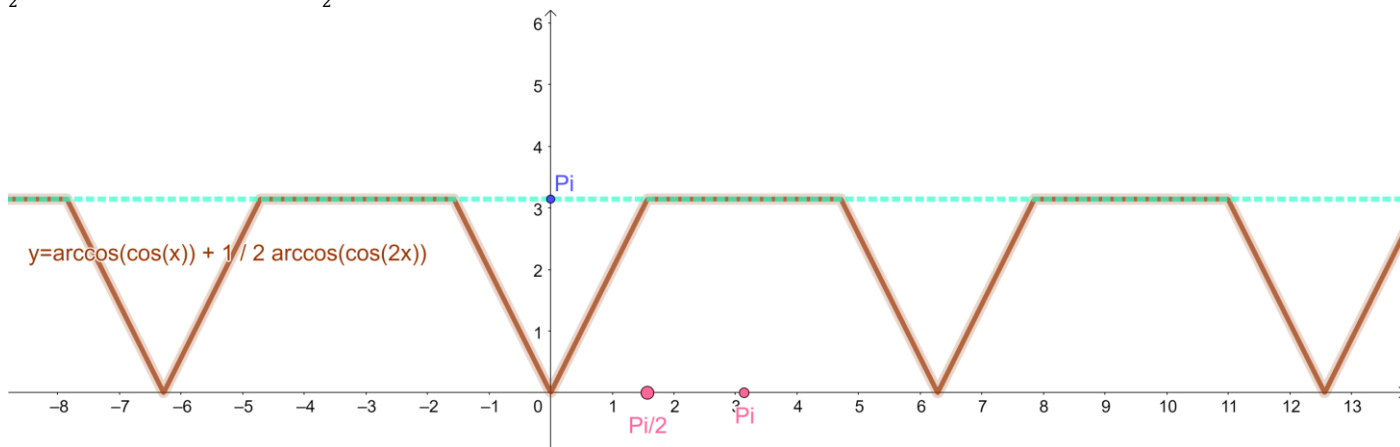
$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \in [-1, 1]$ et $\cos(2x) \in [-1, 1]$. Donc $Df = \mathbb{R}$.

f est paire et 2π -périodique. On peut étudier f sur $[0, \pi]$.

$\forall x \in [0, \pi], \text{Arccos}(\cos(x)) = x$ mais $2x \in [0, 2\pi]$ Donc, $\forall x \in [0, \pi], f(x) = x + \frac{1}{2}\text{Arccos}(\cos(2x))$.

1^{er} cas : $2x \in [0, \pi]$ i.e. $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Alors, $f(x) = x + \frac{1}{2}2x = 2x$.

2^{ème} cas : $2x \in [\pi, 2\pi]$ i.e. $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Alors, $-2x \in [-2\pi, -\pi]$ et $2\pi - 2x \in [0, \pi]$ et $\cos(2x) = \cos(2\pi - 2x)$ donc $f(x) = x + \frac{1}{2}\text{Arccos}(\cos(2\pi - 2x)) = x + \frac{1}{2}(2\pi - 2x) = \pi$. D'où la courbe ci-dessous



Ex 4 Egalités et inégalités

1. Montrer que pour tout réel x , $\text{Arcsin}\left(\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}\right) = \text{Arctan}(\text{sh}(x))$.

Posons $f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}\right)$ et $g(x) = \text{Arctan}(\text{sh}(x))$.

Soit x un réel. Comme $|\text{sh}(x)| < \text{ch}(x)$, $\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \in]-1, 1[\subset [-1, 1]$. Et par conséquent, $\text{Arcsin}\left(\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}\right)$ existe. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)$ existe donc $g(x)$ existe.

1^{ère} méthode : par « composition » . pour prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$, il suffit de prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(f(x)) = \sin(g(x))$ et que $f(x)$ et $g(x)$ vivent dans un même domaine sur lequel sinus est injective. On peut aussi utiliser le cosinus ou la tangente ou une autre fonction en fonction des expressions de $f(x)$ ou de $g(x)$.

Cette méthode nécessite de bien connaître les formules de trigonométrie simple et réciproque et d'appliquer précisément le résultat suivant : « Si sinus est injective sur D et a et b sont deux réels de D tels que $\sin(a) = \sin(b)$ alors $a = b$. ».

Soit x un réel.

Comme Arcsin est à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et Arctan est à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f(x)$ et $g(x)$ sont dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

De plus, d'une part, $\sin(f(x)) = \sin\left(\text{Arcsin}\left(\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}\right)\right) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$. D'autre part,

$$\sin(g(x)) = \sin(\text{Arctan}(\text{sh}(x))) \stackrel{\text{car } (**)}{=} \frac{\text{sh}(x)}{\sqrt{1+\text{sh}^2(x)}} \stackrel{\text{car } \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1}{=} \frac{\text{sh}(x)}{\sqrt{\text{ch}^2(x)}} \stackrel{\text{car } \text{ch}(x) > 0}{=} \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}.$$

Ainsi, $\sin(f(x)) = \sin(g(x))$. Comme $f(x)$ et $g(x)$ sont un même intervalle sur lequel $\sin$ est injective, j'en conclus que $f(x) = g(x)$.

$$(**) \sin(\text{Arctan}(t)) = \tan(\text{Arctan}(t)) \cos(\text{Arctan}(t)) \\ \stackrel{\text{car } \cos^2(t) = \frac{1}{1+\tan^2(t)}}{=} t \times \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\text{Arctan}(t))}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \text{et } \cos(\text{Arctan}(t)) > 0 \text{ puisque } \text{Arctan}(t) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

2^{ème} méthode : par « dérivation » . pour prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$, il suffit de prouver que $h: (x \mapsto f(x) - g(x))$ est constante égale à 0 en montrant d'abord que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 0$ et ensuite que $h(0) = 0$.

Cette méthode nécessite de bien connaître les dérivées usuelles et formules de dérivation et d'appliquer avec précision le résultat suivant : « Si h est dérivable sur l'intervalle I et h' est nulle sur un **intervalle** I alors h est constante sur l'intervalle I . ».

hypothèse essentielle

On pose $h: (x \mapsto f(x) - g(x))$. Dans l'expression de h seule la fonction Arcsin n'est pas dérivable partout sur son domaine de définition et continuité. Arcsin n'est définie et continue que sur $] -1, 1[$. Mais $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \in] -1, 1[$. Par conséquent, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = f'(x) - g'(x)$ avec

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= u'(x) \text{Arcsin}'(u(x)) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}} \text{ et } u(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \text{ et } u'(x) = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}; \text{ autrement dit,} \\ f'(x) &= \frac{\frac{1}{\text{ch}^2(x)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}\right)^2}} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} \frac{1}{\sqrt{\frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)}}} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\text{ch}^2(x)}}} \stackrel{\text{car } \text{ch}(x) > 0}{=} \frac{1}{\text{ch}^2(x)} \text{ch}(x) = \frac{1}{\text{ch}(x)}. \\ \bullet g'(x) &= \text{sh}'(x) \text{Arctan}'(\text{sh}(x)) = \frac{\text{ch}(x)}{1+\text{sh}^2(x)} = \frac{\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}(x)}. \end{aligned}$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. J'en déduis que h est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(0)$. Or, $h(0) = \text{Arcsin}(0) - \text{Arctan}(0) = 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 0$.

Soit x un réel.

2. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Soit $f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$ et $g(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

$$f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}} \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 0 \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 1 \leq \sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 1 \leq x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0. \text{ Donc } Df = \mathbb{R}^+.$$

$g(x) \text{ existe} \Leftrightarrow x > 0$. Donc $Dg = \mathbb{R}^{*+}$.

$\forall x > 0$, $f(x)$ et $g(x)$ existent et $f(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (car $x \neq 0$ donc $\frac{1}{\sqrt{x+1}} \in]-1,1[$) et $g(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Et la fonction tangente est strictement croissante donc injective sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$.

$$\tan(g(x)) = \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{Et } \tan(f(x)) = \tan\left(\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\right) = \frac{\sin\left(\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\right)}{\cos\left(\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\right)} \stackrel{=}{=} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\cos\left(\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x+1}}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x+1}}} \stackrel{\substack{\text{car} \\ x > 0}}{=} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x+1}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\tan(g(x)) = \tan(f(x))$ et $f(x)$ et $g(x)$ sont dans un même domaine sur lequel la tangente est injective, je peux conclure que :

$f(x) = g(x)$.

3. Montrer que $f: \left(x \mapsto 2\text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \text{Arccos}(2x-1)\right)$ est constante sur Df .

$$f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{1-x}{x} \geq 0 \\ -1 \leq 2x-1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{1-x}{x} \geq 0 \\ -1 \leq 2x-1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]0,1] \\ 0 \leq 2x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]0,1]. \text{ Donc } Df =]0,1].$$

1ère méthode : par dérivation

Dans l'expression de f , toutes les fonctions sont continues sur leur propre domaine de définition donc f est continue sur Df .

Dans l'expression de f , seules les fonctions *racine carrée* et *Arccos* ne sont pas dérivables sur leur domaine de définition. La racine carrée n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{*+}$ et *Arccos* n'est dérivable que sur $] -1,1[$. Or, $\forall x \in]0,1[$, $\frac{1-x}{x} > 0$ et $2x-1 \in] -1,1[$. Donc f est au moins

dérivable sur $]0,1[$. Et $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) = 2u'(x)\text{Arctan}'(u(x)) - v'(x)\text{Arccos}'(v(x)) = \frac{2u'(x)}{1+u^2(x)} + \frac{v'(x)}{\sqrt{1-v^2(x)}}$

$$\text{avec } u(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \text{ et } u'(x) = \frac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}} \text{ et } w(x) = \frac{1-x}{x} \text{ et } w'(x) = \frac{-x-(1-x)}{x^2} = \frac{-1}{x^2} \text{ donc } u'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = -\frac{1}{2x^2} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

et $v(x) = 2x-1$ et $v'(x) = 2$.

$$\text{Donc, } \forall x \in]0,1[, f'(x) = -\frac{2}{2x\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} + \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = -\frac{1}{x\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \frac{x}{1} + \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} = 0.$$

Donc f est constante sur l'intervalle $]0,1[$. Comme f est continue en 1, f est aussi constante sur $]0,1]$. Alors $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = f(1) =$

$$2\text{Arctan}(0) - \text{Arccos}(1) = 0 - 0 = 0. \text{ Ainsi, } \forall x \in]0,1], 2\text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \text{Arccos}(2x-1) = 0.$$

Le choix de poser $t = \text{Arccos}(\sqrt{x})$ vient du terme $\text{Arccos}(2x^2-1)$: l'idée est de faire apparaître $\text{Arccos}(\cos(X))$.

2ème méthode : par changement de variables

Soit $x \in]0,1]$. Posons $t = \text{Arccos}(\sqrt{x})$ de sorte que $x = \cos^2(t)$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\text{Alors, } f(x) = 2\text{Arctan}\sqrt{\frac{1-\cos^2(t)}{\cos^2(t)}} - \text{Arccos}(2\cos^2(t)-1) = 2\text{Arctan}\sqrt{\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}} - \text{Arccos}(\cos(2t)) = 2\text{Arctan}(\tan(t)) - \text{Arccos}(\cos(2t))$$

$$f(x) = 2\text{Arctan}(|\tan(t)|) - 2t = 2\text{Arctan}(\tan(t)) - 2t = 2t - 2t = 0.$$

$\begin{matrix} \text{car } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \text{car } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{matrix}$

4. Démontrer que $\forall x \in]-1; 1[\setminus \{0\}, |\text{Arcsin}(x)| < \left|\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right|$

Par changement de variables et étude de fonction

Soit $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$, Posons $t = \text{Arcsin}(x)$. Alors $x = \sin(t)$ et $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$. Alors,

$$|\text{Arcsin}(x)| = |\text{Arcsin}(\sin(t))| = |t| \text{ et } \left|\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right| = \left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\right| = \left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{\cos^2(t)}}\right| = \left|\frac{\sin(t)}{|\cos(t)|}\right| = \frac{|\sin(t)|}{|\cos(t)|} = \left|\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right| = |\tan(t)|.$$

Je vais alors prouver que $\forall]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}, |t| < |\tan(t)|$.

Soit $\forall]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}, f(t) = |\tan(t)| - |t|$. f est paire et $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(t) = \tan(t) - t$. Alors f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $f'(t) = 1 + \tan^2(t) - 1 = \tan^2(t) > 0$. Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ et comme $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$, $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(t) > 0$. Alors comme f est paire, $\forall]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}, f(t) > 0$. Ainsi, $\forall]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}, |t| < |\tan(t)|$ et par conséquent $\forall x \in]-1; 1[\setminus \{0\}, |\text{Arcsin}(x)| < \left|\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right|$.

5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{(x+1)^2+1} \leq \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$. **Applications :**

a) Montrer que la suite u , telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k^2}$, est convergente.

b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x)) = 1$.

Posons $f(x) = \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x) - \frac{1}{x^2+1}$ et $g(t) = \text{Arctan}(t) - \text{Arctan}(t-1) - \frac{1}{t^2+1}$.

f et g sont continues et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+2x^2+x^4) - (1+x^2)(2+2x+x^2) + 2x(2+2x+x^2)}{(1+(x+1)^2)(1+x^2)^2} =$

$\frac{-1+2x+3x^2}{(1+(x+1)^2)(1+x^2)^2} = \frac{3(x+1)(x-\frac{1}{3})}{(1+(x+1)^2)(1+x^2)^2}$. D'où les variations :

De plus, $f(0) = \text{Arctan}(1) - 1 = \frac{\pi}{4} - 1 < 0$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0 = 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq 0$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+, \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$.

x	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

De même, $\forall t \in \mathbb{R}^+, g'(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+(t-1)^2} + \frac{2t}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)(2-2t+t^2) - (1+2t^2+t^4) + 2t(2-2t+t^2)}{(1+t^2)^2(1+(t-1)^2)^2} = \frac{1+2t-3t^2}{(1+t^2)^2(1+(t-1)^2)^2} = \frac{-3(t+1)(t-\frac{1}{3})}{(1+t^2)^2(1+(t-1)^2)^2}$

$g(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} > 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0 = 0$.

Donc $\forall t \in [1, +\infty[, g(t) \geq 0$ i.e.

$\text{Arctan}(t) - \text{Arctan}(t-1) \geq \frac{1}{t^2+1}$. Par conséquent,

$\forall x \in \mathbb{R}^+, \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x) \geq \frac{1}{(x+1)^2+1}$.

t	1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$g'(t)$	+		-
$g(t)$			

Applications :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k^2}$. La suite u est croissante puisque $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{1+(n+1)^2} > 0$.

$\forall k \geq 1, \frac{1}{k^2+1} \leq \text{Arctan}(k) - \text{Arctan}(k-1) \leq \frac{1}{(k-1)^2+1}$.

Donc, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+1} \leq \sum_{k=1}^n \text{Arctan}(k) - \text{Arctan}(k-1)$ i.e. $u_n \leq \text{Arctan}(n) - \text{Arctan}(0) = \text{Arctan}(n) \leq \frac{\pi}{2}$. Ainsi, la suite u est majorée.

J'en conclus que u est convergente.

2. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{(x+1)^2+1} \leq \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$ donc $\frac{x^2}{(x+1)^2+1} \leq x^2(\text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x)) \leq \frac{x^2}{x^2+1}$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2+1} = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1}$, je peux conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x)) = 1$.

6. Montrer que : $\forall x \in]0,1], 2\text{Arcsin}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} + \text{Arcsin}(2x-1) = \pi - 2\text{Arctan}\left(\frac{1-x}{x}\right)$.

$\forall x \in]0,1], \sqrt{x} \in]0,1], 2x-1 \in]0,1]$ et $\frac{1-x}{x} > 0$. Par conséquent, pour tout $x \in]0,1], f(x) = 2\text{Arcsin}(\sqrt{x}), g(x) = \frac{\pi}{2} + \text{Arcsin}(2x-1)$

et $h(x) = \pi - 2\text{Arctan}\left(\frac{1-x}{x}\right)$ existent.

1ère méthode : par changement de variable

Soit $x \in]0,1]$. Posons $t = \text{Arcsin}(\sqrt{x})$. Alors $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $x = \sin^2(t)$.

car $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$
Et, $f(x) = f(\sin^2(t)) = 2\text{Arcsin}\left(\sqrt{\sin^2(t)}\right) \stackrel{\text{donc } \sin(t) \geq 0}{=} 2\text{Arcsin}(\sin(t)) = 2t$

$g(x) = g(\sin^2(t)) = \frac{\pi}{2} + \text{Arcsin}(2\sin^2(t) - 1) = \frac{\pi}{2} + \text{Arcsin}(-\cos(2t)) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(\cos(2t)) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arccos}(\cos(2t))\right)$
 $= \text{Arccos}(\cos(2t)) \stackrel{\text{car } 2t \in]0, \pi]}{=} 2t$

$h(x) = h(\sin^2(t)) = \pi - 2\text{Arctan}\left(\frac{1-\sin^2(t)}{\sin^2(t)}\right) = \pi - 2\text{Arctan}\left(\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}\right) \stackrel{\text{car } t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]}{\text{donc } \tan(t) > 0} = \pi - 2\text{Arctan}\left(\frac{1}{\tan(t)}\right)$
 $\stackrel{\text{car } \tan(t) > 0}{=} \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(\tan(t))\right) = 2\text{Arctan}(\tan(t)) = 2t.$

et $\forall x > 0, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Ainsi, $\forall x \in]0,1], f(x) = g(x) = h(x)$.

2ème méthode : par dérivation.

3ème méthode : par composition

Ex 5 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\text{Arcsin}(\sin(x))}{x - \pi}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \text{Arctan}(x \sin(x)) \ln(1 + \text{Arcsin}(e^{-x}))$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\text{Arcsin}(\text{Arctan}(x)) - 1)$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) \right)^{\frac{1}{\text{Arctan}(x)}}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}}$

Soit $x \in]0,1]$. Posons $t = 2\text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$. Alors $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $x = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} t = 0$.

Par conséquent, $\frac{\text{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}} = \frac{\text{Arccos}\left(1-2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{\sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}} = \frac{\text{Arccos}(\cos(t))}{\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|} = \frac{\text{Arccos}(\cos(t))}{\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|} \stackrel{\text{car } t \in [0, \pi]}{\stackrel{\text{car } \sin(t/2) \geq 0}} \frac{t}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \sqrt{2} \frac{\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} t = 0$. Donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 1$. J'en déduis que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}$.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) \right)^{\frac{1}{\text{Arctan}(x)}}$

$\left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) \right)^{\frac{1}{\text{Arctan}(x)}} = e^{\frac{1}{\text{Arctan}(x)} \ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x)\right)}$. Posons $h(x) = \frac{1}{\text{Arctan}(x)} \ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x)\right)$.

Alors, $h(x) = \frac{\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) - 1}{\text{Arctan}(x)} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x)\right)}{\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) - 1} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{\text{Arctan}(x)} \right) \left(\frac{\text{Arccos}(x) - \frac{\pi}{2}}{x} \right) \left(\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x)\right)}{\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) - 1} \right)$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t)}{t-1} \stackrel{TA}{=} 1$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x)\right)}{\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) - 1} = 1$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{x} \stackrel{TA}{=} 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arccos}(x) - \frac{\pi}{2}}{x} = -1$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\frac{2}{\pi}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) \right)^{\frac{1}{\text{Arctan}(x)}} = e^{-\frac{2}{\pi}}$.

Ex 5 Calculer les limites suivantes :

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}}$

Soit $x \in]0,1]$. Posons $t = 2\text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$. Alors $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $x = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} t = 0$.

Par conséquent, $\frac{\text{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}} = \frac{\text{Arccos}\left(1-2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{\sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}} = \frac{\text{Arccos}(\cos(t))}{\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|} = \frac{\text{Arccos}(\cos(t))}{\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|} \stackrel{\text{car } t \in [0, \pi]}{\stackrel{\text{car } \sin(t/2) \geq 0}} \frac{t}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \sqrt{2} \frac{\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} t = 0$. Donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 1$. J'en déduis que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}$.

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) \right)^{\frac{1}{\text{Arctan}(x)}}$

$\left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) \right)^{\frac{1}{\text{Arctan}(x)}} = e^{\frac{1}{\text{Arctan}(x)} \ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x)\right)}$. Posons $h(x) = \frac{1}{\text{Arctan}(x)} \ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x)\right)$.

Alors, $h(x) = \frac{\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) - 1}{\text{Arctan}(x)} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x)\right)}{\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) - 1} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{\text{Arctan}(x)} \right) \left(\frac{\text{Arccos}(x) - \frac{\pi}{2}}{x} \right) \left(\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x)\right)}{\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) - 1} \right)$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t)}{t-1} \stackrel{TA}{=} 1$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x)\right)}{\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) - 1} = 1$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{x} \stackrel{TA}{=} 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arccos}(x) - \frac{\pi}{2}}{x} = -1$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\frac{2}{\pi}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) \right)^{\frac{1}{\text{Arctan}(x)}} = e^{-\frac{2}{\pi}}$.

Ex 6 Etude de fonctions par deux méthodes changement de variables ou dérivation :

1. Soit $f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

a) Déterminer Df .

b) Soit y un réel tel que $x = \tan\left(\frac{y}{2}\right)$ existe. Montrer que : $\cos(y) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ et $\sin(y) = \frac{2x}{1+x^2}$.

c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} 2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x \in [-1,1] \\ \pi - 2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x \in]1, +\infty[\\ -\pi - 2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x \in]-\infty, -1[\end{cases}$.

d) Représenter cette fonction.

e) Retrouver le résultat c) par dérivation.

a) $f(x)$ existe $\Leftrightarrow -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 - x^2 \leq 2x \leq 1 + x^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 + 1 + 2x$ et $1 + x^2 - 2x \geq 0$.
 $f(x)$ existe $\Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$.

Comme $\forall x, (x+1)^2 \geq 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$, je peux affirmer que $Df = \mathbb{R}$.

f) Soit y un réel tel que $x = \tan\left(\frac{y}{2}\right)$ existe.

Alors $\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1 - \left(\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right)^2}{1 + \left(\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right)^2} = \left(1 - \tan^2\left(\frac{y}{2}\right)\right) \cos^2\left(\frac{y}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{y}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{y}{2}\right) = \cos\left(\frac{2y}{2}\right) = \cos(y)$.

Et, $\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2 \tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{y}{2}\right)} = 2 \tan\left(\frac{y}{2}\right) \cos^2\left(\frac{y}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{y}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) = \sin\left(\frac{2y}{2}\right) = \sin(y)$.

g) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = 2\operatorname{Arctan}(x)$. Alors, $y \in]-\pi, \pi[$ et $x = \tan\left(\frac{y}{2}\right)$. Et, $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2 \tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{y}{2}\right)}\right) = \operatorname{Arcsin}(\sin(y))$.

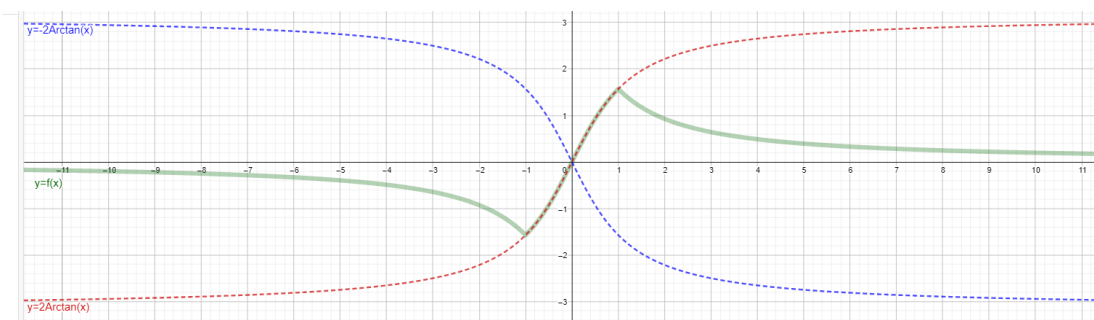
1er cas : $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i.e. $x \in [-1,1]$. Alors, $f(x) = y = 2\operatorname{Arctan}(x)$.

2ème cas : $y \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$ i.e. $x \in]-\infty, -1[$. Alors, $f(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin(\pi - y)) = \operatorname{Arcsin}(\sin(\pi - y - 2\pi)) \stackrel{\text{car } -\pi - y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}{=} -\pi - y$. Donc, $f(x) = -\pi - 2\operatorname{Arctan}(x)$.

3ème cas : $y \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ i.e. $x \in]1, +\infty[$. Alors, $f(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin(\pi - y)) \stackrel{\text{car } \pi - y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}{=} \pi - y = \pi - 2\operatorname{Arctan}(x)$.

J'en conclus que : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} 2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x \in [-1,1] \\ \pi - 2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x \in]1, +\infty[\\ -\pi - 2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x \in]-\infty, -1[\end{cases}$.

h) Voici la courbe de $2\operatorname{Arctan}$, $-2\operatorname{Arctan}$ et f :



e) Retrouvons ce résultat par dérivation :

f est continue sur $\mathbb{R}$ car son expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.

b) Dans l'expression de f seule la fonction Arcsin n'est pas dérivable sur tout son domaine de continuité. Arcsin n'est dérivable que sur $] -1, 1[$. Or, $-1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 > 0$ et $(x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$. Donc f est au moins dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, f'(x) = u'(x) \operatorname{Arcsin}'(u(x)) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$ avec $u(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ et $u'(x) = \frac{2(1-x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^2}$.

Donc, $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2 - (2x)^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2-4x^2}{1+x^2}}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-3x^2}}$.

$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{|1-x^2|} = \begin{cases} \frac{2}{(1+x^2)} & \text{si } (1-x^2) > 0 \\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{si } (1-x^2) < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{(1+x^2)} & \text{si } x \in]-1, 1[\\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{si } x > 1 \text{ ou } x < -1 \end{cases} = \begin{cases} 2\operatorname{Arctan}'(x) & \text{si } x \in]-1, 1[\\ -2\operatorname{Arctan}'(x) & \text{si } x > 1 \\ -2\operatorname{Arctan}'(x) & \text{si } x < -1 \end{cases}$.

Sur l'intervalle $] -\infty, -1[$, f et $-2\operatorname{Arctan}$ sont deux primitives d'une même fonction ? Par conséquent, il existe une constante c_1 réelle telle que : $\forall x < -1, f(x) = -2\operatorname{Arctan}(x) + c_1$. Alors $c_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2\operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arcsin}(0) + 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$. Donc, $\forall x \in]-\infty, -1[, f(x) = -\pi - 2\operatorname{Arctan}(x)$.

De même, Sur l'intervalle $] -1, 1[$, f et $2\operatorname{Arctan}$ sont deux primitives d'une même fonction ? Par conséquent, il existe une constante c_2 réelle telle que : $\forall x \in] -1, 1[, f(x) = 2\operatorname{Arctan}(x) + c_2$. Alors $c_2 = f(0) + 2\operatorname{Arctan}(0) = 0$. Donc, $\forall x \in] -1, 1[, f(x) = 2\operatorname{Arctan}(x)$. De plus, $f(1) = \operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2} = 2\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan}(1)$ et $f(-1) = 2\operatorname{Arctan}(-1)$. Donc $\forall x \in [-1, 1], f(x) = 2\operatorname{Arctan}(x)$.

Sur l'intervalle $]1, +\infty[$, f et $2\operatorname{Arctan}$ sont deux primitives d'une même fonction. Par conséquent, il existe une constante c_3 réelle telle que : $\forall x > 1, f(x) = 2\operatorname{Arctan}(x) + c_3$. Alors $c_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + 2\operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arcsin}(0) + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. Donc, $\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \pi + 2\operatorname{Arctan}(x)$.

Je retrouve ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} 2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x \in [-1,1] \\ \pi - 2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x \in]1, +\infty[\\ -\pi - 2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x \in]-\infty, -1[\end{cases}$.

2. Démontrer que : pour tout réel t , $4\cos^3(t) - 3\cos t = \cos(3t)$. En déduire une simplification de l'expression et une représentation de la fonction f définie par : $f(x) = \text{Arccos}(4x^3 - 3x)$.

• Soit $t \in \mathbb{R}$. $4\cos^3(t) - 3\cos t = 4\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^3 - 3\cos(t)$

$$4\cos^3(t) - 3\cos t = \frac{1}{2}(e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}) - 3\cos(t) = \cos(3t) + 3\cos(t) - 3\cos(t) = \cos(3t).$$

• $f(x)$ existe $\Leftrightarrow -1 \leq 4x^3 - 3x \leq 1 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x + 1 \geq 0$ et $4x^3 - 3x - 1 \leq 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)(4x^2 - 4x + 1) \geq 0$ et $(x-1)(4x^2 + 4x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x-1)^2 \geq 0$ et $(x-1)(2x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$.
 Donc $Df = [-1, 1]$.

• Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $t = \text{Arccos}(x)$. Alors $t \in [0, \pi]$ et $x = \cos(t)$.

Alors $f(x) = \text{Arccos}(4(\cos(t))^3 - 3\cos(t)) = \text{Arccos}(\cos(3t))$ avec $3t \in [0, 3\pi]$.

1^{er} cas : $3t \in [0, \pi]$ i.e. $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$ i.e. $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Alors $f(x) = 3t = 3\text{Arctan}(x)$.

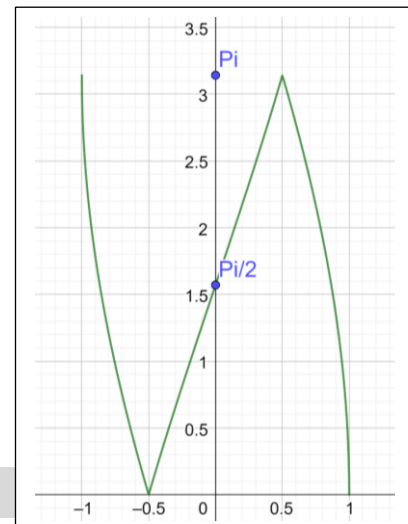
2^{ème} cas : $3t \in [\pi, 2\pi]$ i.e. $t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ i.e. $x \in [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$.

Alors $f(x) = \text{Arccos}(\cos(3t)) = \text{Arccos}(\cos(-3t)) = \text{Arccos}(\cos(2\pi - 3t)) \stackrel{\text{car } 2\pi - 3t \in [0, \pi]}{=} 2\pi - 3t = 2\pi - 3\text{Arctan}(x)$.

3^{ème} cas : $3t \in [2\pi, 3\pi]$ i.e. $t \in [\frac{2\pi}{3}, \pi]$ i.e. $x \in [-\frac{1}{2}, -1]$.

Alors $f(x) = \text{Arccos}(\cos(3t)) = \text{Arccos}(\cos(3t - 2\pi)) \stackrel{\text{car } 3t - 2\pi \in [0, \pi]}{=} 3t - 2\pi = 3\text{Arctan}(x) - 2\pi$.

Ainsi, $f(x) = \begin{cases} 3\text{Arctan}(x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2\pi - 3\text{Arctan}(x) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}] \\ 3\text{Arctan}(x) - 2\pi & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, -1] \end{cases}$



Autre méthode : par dérivation.

3. Soit $f: (x \mapsto \text{Arccos}(\frac{1-x^2}{1+x^2}))$. Représenter la fonction f .

▪ $f(x)$ existe $\Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 - x^2 \leq 1 - x^2 \leq 1 + x^2 \Leftrightarrow -1 \leq 1$ et $2x^2 \geq 0$. Je peux affirmer que $Df = \mathbb{R}$. TJS VRAI

▪ f est paire et continue sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.

▪ Dans l'expression de f , seule la fonction Arccos n'est pas dérivable sur tout leur domaine de définition. Arccos n'est dérivable que sur $] -1, 1[$. Or, $(\frac{1-x^2}{1+x^2}) \in] -1, 1[\Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Donc, f est dérivable au moins sur $\mathbb{R}^*$. Et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$ avec $u(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

et $u'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$. Donc, $f'(x) = -\frac{-4x}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}} = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}} = \frac{4x}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{4x^2}} = \frac{2x}{|x|} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)$

Donc, $f'(x) = \begin{cases} -2\text{Arctan}'(x) & \text{si } x < 0 \\ 2\text{Arctan}'(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

▪ Sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$, f et 2Arctan sont deux primitives d'une même fonction. Donc il existe une constante c telle que :

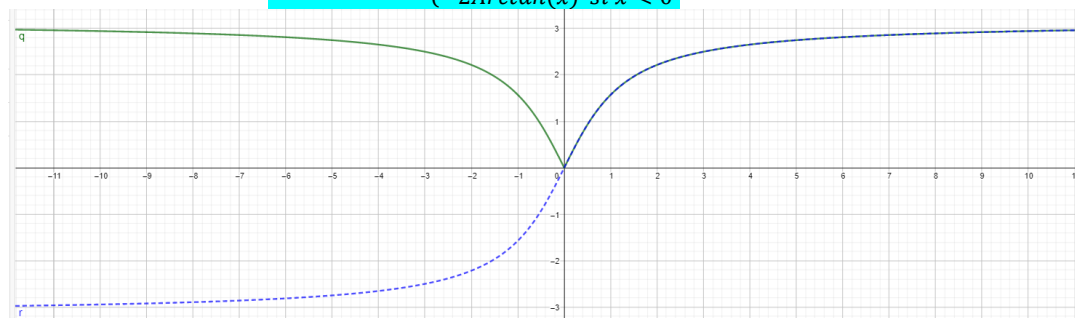
$\forall x > 0$, $f(x) = 2\text{Arctan}(x) + c$. Alors, $c = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arccos}(\frac{1-x^2}{1+x^2}) - 2\text{Arctan}(x) = \text{Arccos}(-1) - 2\frac{\pi}{2} = \pi - \pi = 0$.

Sur l'intervalle $\mathbb{R}^{-*}$, f et -2Arctan sont deux primitives d'une même fonction. Donc il existe une constante d telle que :

$\forall x < 0$, $f(x) = -2\text{Arctan}(x) + d$. Alors, $d = \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arccos}(\frac{1-x^2}{1+x^2}) + 2\text{Arctan}(x) = \text{Arccos}(-1) + 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

▪ Enfin, f est continue en 0 donc $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \text{Arccos}(\frac{1-x^2}{1+x^2}) - 2\text{Arctan}(x) = \text{Arccos}(1) - 2\text{Arctan}(0)$.

▪ Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2\text{Arctan}(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -2\text{Arctan}(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$



▪ Montrons que f n'est pas dérivable en 0 :

D'une part, $\forall x > 0$, $\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2\text{Arctan}(x)}{x}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tau(x) = 2\text{Arctan}'(0) = 2$.

D'autre part, $\forall x < 0$, $\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-2\text{Arctan}(x)}{x}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} \tau(x) = -2\text{Arctan}'(0) = -2$.

Il en découle que f n'est pas dérivable en 0 et Cf a deux demi-tangentes en 0 l'une de pente 2 et l'autre de pente -2.

4. Proposer dans chaque cas un bon changement de variable afin de simplifier l'expression :

$$A(x) = \operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) \quad , \quad B(x) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}\right) \quad , \quad C(x) = \operatorname{Arccos}(1-2x^2) \quad , \quad D(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Ex 7 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\operatorname{Arccos}(\sin(x)) = \frac{5\pi}{9}$

2. $\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)$

3. $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{3}$

4. $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$

5. $\operatorname{Arcsin}(\tan(x)) = x$

6. $\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}(2x)$

7. $\operatorname{Arcsin}(2x) - \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{3}) = \operatorname{Arcsin}(x)$.

8. $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2}$.

1. Soit (e): $\operatorname{Arccos}(\sin(x)) = \frac{5\pi}{9}$ d'inconnue x réelle.

$$x \text{ solution} \Leftrightarrow \operatorname{Arccos}(\sin(x)) = \operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right) \text{ car } \frac{5\pi}{9} \in [0, \pi]$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) \text{ car } \operatorname{Arccos} \text{ est injective}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{9}\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = -\frac{\pi}{18} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + \frac{\pi}{18} + 2k\pi.$$

Ainsi, $Sol = \left\{-\frac{\pi}{18} + 2k\pi, \frac{19\pi}{18} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Soit (e): $\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)$ d'inconnue x réelle.

$$\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x \text{ est un antécédent par } \operatorname{Arcsin} \text{ de } b = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right).$$

Comme Arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et bijective de $[-1, 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de bijection réciproque $\sin$, l'équation admet au plus une solution :

une unique solution $\sin_1(b)$ ($= \sin(b)$) si $b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et aucune solution si $b \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Or, $\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{3}{4} = \frac{64-75}{100} < 0$. Donc $0 < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Alors, par stricte croissance de Arcsin , $0 < \operatorname{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) < \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

De même, $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Alors, par stricte croissance de Arctan , $0 < \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) < \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Par suite, $0 < b < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$. J'en déduis que b a un unique antécédent par Arcsin qui est $\sin(b)$ et qui est l'unique solution de notre équation.

$$\sin(b) = \sin\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \sin\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right)\right) \cos\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right) + \cos\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right)\right) \sin\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$\sin(b) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}} + \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Ainsi, $Sol = \left\{\frac{3}{\sqrt{10}}\right\}$.

car ,

$$\cos(\operatorname{Arcsin}(t)) = \sqrt{1-t^2}$$

$$\cos(\operatorname{Arctan}(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\sin(\operatorname{Arctan}(t)) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

3. Soit (e): $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{3}$ d'inconnue x réelle.

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -(1+x^2) \leq 2x \leq 1+x^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0 \text{ et } (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}. \text{ Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \text{ existe.}$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ ou } x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi, $Sol = \left\{\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

4. Soit (e): $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$ d'inconnue x réelle.

Soit x un réel.

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12} \quad \xRightarrow[\text{car } \operatorname{Arctan}(t) > 0 \Leftrightarrow t > 0]{\text{car } \frac{7\pi}{12} \in D_{\tan}} \quad x > 0 \text{ et } \tan(\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x\sqrt{3})) = \tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow x > 0 \text{ et } \frac{\tan(\operatorname{Arctan}(x)) + \tan(\operatorname{Arctan}(x\sqrt{3}))}{1 - \tan(\operatorname{Arctan}(x))\tan(\operatorname{Arctan}(x\sqrt{3}))} = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x > 0 \text{ et } \frac{x+x\sqrt{3}}{1-x^2\sqrt{3}} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow x > 0 \text{ et } \frac{x(1+\sqrt{3})}{1-x^2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x > 0 \text{ et } x(1+\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{-2} (1-\sqrt{3}x^2) \Rightarrow x > 0 \text{ et } \frac{x(1+\sqrt{3})}{(-2-\sqrt{3})} = (1-\sqrt{3}x^2) \Rightarrow x > 0 \text{ et } (1-\sqrt{3}x^2) - x(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-2) = 0$$

$$\Rightarrow x > 0 \text{ et } -\sqrt{3}x^2 - x(1-\sqrt{3}) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0 \text{ et } \left[x = \frac{(1-\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})}{-2\sqrt{3}} = 1 \text{ ou } x = \frac{(1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})}{-2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$\Delta = (1-\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}$$

$$\Delta = (1+\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow x = 1. \text{ Donc } 1 \text{ est la seule solution possible. Mais ce réel est-il solution ? } \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}. \text{ Ainsi, } Sol = \{1\}.$$

1. $\operatorname{Arcsin}(\tan(x))$ existe $\Leftrightarrow \tan(x) \in [-1, 1] \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$.

Soit $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$. $\operatorname{Arcsin}(\tan(x)) = x \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

car $\forall t \in [-1, 1], \operatorname{Arcsin}(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad \text{car } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

Désormais $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

car Arcsin
est
injective

$$\begin{aligned} \text{Arcsin}(\tan(x)) = x &\Leftrightarrow \text{Arcsin}(\tan(x)) = \text{Arcsin}(\sin(x)) \Leftrightarrow \tan(x) = \sin(x) \Leftrightarrow \sin(x) \left(\frac{1}{\cos(x)} - 1 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = 1) \Leftrightarrow x = 0. \text{ Ainsi, } \text{Sol} = \{0\}. \end{aligned}$$

$x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$$2. \quad \text{Arccos}(x) \text{ et } \text{Arcsin}(2x) \text{ existent} \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 2x \in [-1, 1] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{De plus, } \text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}(2x) \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{car } \text{Arccos}(x) \in [0, \pi] \\ \text{et} \\ \text{Arcsin}(2x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{matrix} \text{Arccos}(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \text{Arcsin}(2x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x \in [0, 1] \text{ et } 2x \in [0, 1] \Rightarrow x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Soit } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \text{ Alors, } \text{Arccos}(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \text{Arcsin}(2x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Par conséquent,}$$

$$\begin{aligned} \text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}(2x) &\Leftrightarrow \sin(\text{Arccos}(x)) = \sin(\text{Arcsin}(2x)) \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 2x \Leftrightarrow 1-x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}. \\ &\text{car sinus est injective sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{car } 2x \geq 0 \quad \text{car } x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \text{Sol} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}.$$

$$3. \quad \text{Arcsin}(2x), \text{Arcsin}(x\sqrt{3}) \text{ et } \text{Arcsin}(x) \text{ existent} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \in [-1, 1] \\ \sqrt{3}x \in [-1, 1] \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Soit } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Arcsin}(2x) - \text{Arcsin}(x\sqrt{3}) = \text{Arcsin}(x) \Rightarrow \sin(\text{Arcsin}(2x) - \text{Arcsin}(x\sqrt{3})) = \sin(\text{Arcsin}(x))$$

$$\Rightarrow \sin(\text{Arcsin}(2x)) \cos(\text{Arcsin}(x\sqrt{3})) - \cos(\text{Arcsin}(2x)) \sin(\text{Arcsin}(x\sqrt{3})) = x$$

$$\Rightarrow 2x\sqrt{1-3x^2} - x\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} = x$$

$$\Rightarrow x(2\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } (2\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } 2\sqrt{1-3x^2} = \sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} + 1$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } 4(1-3x^2) = 3(1-4x^2) + 1 + 2\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2}$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } 2\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Réciproquement ? } \text{Arcsin}(2 \times 0) - \text{Arcsin}(0 \times \sqrt{3}) = 0 - 0 = 0 = \text{Arcsin}(0) \text{ donc } 0 \text{ est solution.}$$

$$\text{Arcsin}\left(2 \times \frac{1}{2}\right) - \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ donc } \frac{1}{2} \text{ est solution.}$$

$$\text{Comme } f: (x \mapsto \text{Arcsin}(2x) - \text{Arcsin}(x\sqrt{3}) - \text{Arcsin}(x)) \text{ est impaire, } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \text{ Donc } -\frac{1}{2} \text{ est solution.}$$

$$\text{Ainsi, } \text{Sol} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right\}.$$

$$4. \quad \text{Soit } f: (x \mapsto \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1)).$$

f est strictement croissante comme somme de fonctions strictement croissantes. Donc f est injective. L'équation $f(x) = \frac{\pi}{2}$ admet donc au plus une solution. De plus, $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3\pi}{2}$. Alors, comme $\frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, le TBCSM assure que $\frac{\pi}{2}$ admet un unique antécédent α par f et $\alpha \in \mathbb{R}^+$. α est alors l'unique solution de notre équation. On a donc $\text{Arctan}(\alpha-1) + \text{Arctan}(\alpha) + \text{Arctan}(\alpha+1) = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Donc } \text{Arctan}(\alpha-1) + \text{Arctan}(\alpha+1) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(\alpha). \text{ Comme } \alpha \in \mathbb{R}^+, \text{Arctan}(\alpha) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ donc } \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(\alpha) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[. \text{ Alors}$$

$$\tan(\text{Arctan}(\alpha-1) + \text{Arctan}(\alpha+1)) \text{ et } \tan\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(\alpha)\right) \text{ existent.}$$

$$\text{Alors } \tan(\text{Arctan}(\alpha-1) + \text{Arctan}(\alpha+1)) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(\alpha)\right) = \frac{1}{\tan(\text{Arctan}(\alpha))} = \frac{1}{\alpha}.$$

$$\text{Comme } \tan(\text{Arctan}(\alpha-1)) \text{ et } \tan(\text{Arctan}(\alpha+1)) \text{ existent, } \tan(\text{Arctan}(\alpha-1) + \text{Arctan}(\alpha+1)) = \frac{\alpha-1+\alpha+1}{1-(\alpha-1)(\alpha+1)} = \frac{2\alpha}{2-\alpha^2}.$$

$$\text{Alors, } \frac{2\alpha}{2-\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}. \text{ Donc, } 2\alpha^2 = 2 - \alpha^2. \text{ Donc, } \alpha^2 = \frac{2}{3} \text{ et ainsi, puisque } \alpha > 0, \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Ex 8 Montrer que : } \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ et } \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Tout d'abord, montrer } \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ revient à montrer : } \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{4} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right).$$

Posons $a = \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$, $b = \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$ et $c = \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)$. Alors a, b , et c sont dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et par conséquent, $\tan(a), \tan(b)$ et $\tan(c)$ existent. De plus, comme $0 < \frac{1}{8} < \frac{1}{5} < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ et Arctan est strictement croissante, $\text{Arctan}(0) < \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) < \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) < \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) < \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ i.e. $0 < c < b < a < \frac{\pi}{6}$. Par conséquent, $a + b$ et $\frac{\pi}{4} - c$ sont dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan(a + b)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4} - c\right)$ existent.

$$\text{Alors puisque } \tan(a), \tan(b), \tan(a + b) \text{ existent, } \tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}.$$

De même, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right), \tan(c), \tan\left(\frac{\pi}{4} - c\right)$ existent, $\tan\left(\frac{\pi}{4} - c\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(c)}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan(c)} = \frac{1 - \frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{9}{8}} = \frac{7}{9}$.

Par conséquent, $\tan(a + b) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - c\right)$ avec $a + b$ et $\frac{\pi}{4} - c$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Comme $\tan$ est injective sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, je peux conclure que $a + b = \frac{\pi}{4} - c$ et ainsi, $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Ex 9 On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

1. Montrer que si n est pair alors $\forall x \geq 0, P_{n+1}(x) \leq \text{Arctan}(x) \leq P_n(x)$.

2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\text{Arctan}(x) - P_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.

3. Montrer que : $\frac{\pi}{4} + \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = 4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$.

4. Déterminer un rationnel r tel que : $|\pi - r| \leq 10^{-1000}$.

1. Posons $f(x) = \text{Arctan}(x) - P_n(x)$.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^n (-1)^k (2k+1) \frac{x^{2k}}{2k+1} = \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} - \underbrace{\sum_{k=0}^n (-x^2)^k}_{\text{somme géométrique}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = (-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}$ est du signe de $(-1)^{n+1}$.

(...)

Ex 10 Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left| \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \right| \leq 1$.

En déduire que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{Arccos}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right) = \underset{\text{signe de } (x+y)}{\text{sgn}(x+y)} (\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y))$.

Soit x et y deux réels.

$\left| \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|1-xy|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \leq 1 \Leftrightarrow |1-xy| \leq \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow (1+x^2)(1+y^2) \geq (1-xy)^2 \Leftrightarrow -2xy \leq x^2 + y^2$
 $\left| \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 0$. Comme l'inégalité $(x+y)^2 \geq 0$ est toujours vraie, l'inégalité $\left| \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \right| \leq 1$ qui lui est équivalente est aussi vraie.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \left| \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \right| \leq 1$ donc $\text{Arccos}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right)$ existe. Posons $a = \text{Arctan}(x)$ et $b = \text{Arctan}(y)$. Alors $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x = \tan(a)$ et $y = \tan(b)$ et $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in]-\pi, \pi[$.

$\text{Arccos}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{1-\tan(a)\tan(b)}{\sqrt{1+\tan(a)^2}\sqrt{1+\tan(b)^2}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{1-\tan(a)\tan(b)}{\frac{1}{\cos(a)\cos(b)}}\right) = \text{Arccos}[\cos(a)\cos(b)(1-\tan(a)\tan(b))]$

$\text{Arccos}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right) = \text{Arccos}[\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)] = \text{Arccos}[\cos(a+b)]$ avec $a+b \in]-\pi, \pi[$.

1^{er} cas : $a+b \in [0, \pi[$ i.e. $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in [0, \pi[$.

Alors $\text{Arccos}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right) = a+b = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)$.

2^{ème} cas : $a+b \in]-\pi, 0[$ i.e. $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in]-\pi, 0[$.

Alors $\text{Arccos}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right) = \text{Arccos}(\cos(-(a+b))) \underset{\substack{\text{car} \\ a+b \in]-\pi, 0[}}{=} -(a+b) = -(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y))$.

Or, $x+y > 0 \Leftrightarrow x > -y \Leftrightarrow \text{Arctan}(x) > \text{Arctan}(-y) \Leftrightarrow \text{Arctan}(x) > -\text{Arctan}(y) \Leftrightarrow \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) > 0 \Leftrightarrow \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in [0, \pi[$.

Ainsi, je peux conclure que $\text{Arccos}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right) = \underset{\text{signe de } (x+y)}{\text{sgn}(x+y)} (\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y))$.

Ex 11 Simplifier :

$$a = e^{-3 \ln(x)}$$

$$b = \frac{\ln(x^2)}{\ln(x^4)}$$

$$c = e^{\ln(x^2+1)-3 \ln(x)}$$

$$d = \ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$$

$$a = e^{\ln(x^{-3})} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$b = \frac{\ln(x^2)}{\ln(x^4)} = \frac{2 \ln(x)}{4 \ln(x)} = \frac{1}{2}$$

$$c = e^{\ln(x^2+1)-3 \ln(x)} = e^{\ln(x^2+1)-\ln(x^3)} = e^{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^3}\right)} = \left(\frac{x^2+1}{x^3}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$$

$$d = \ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2}) = \ln(e^2) - \ln(e) = 2 - 1 = 1$$

$$h = \ln(\sqrt{\exp(x)}) = \frac{1}{2} \ln(e^x) = \frac{x}{2}$$

$$m = \text{ch}\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right) = \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})} + e^{\frac{1}{3} \ln(e^{-3})} \right] = \frac{1}{2} \left[e^{\ln\left((e^{-3})^{-\frac{1}{3}}\right)} + e^{\ln\left((e^{-3})^{\frac{1}{3}}\right)} \right] = \frac{1}{2} [e^{\ln(e^1)} + e^{\ln(e^{-1})}] = \frac{1}{2} [e^1 + e^{-1}] = \text{ch}(1).$$

$$h = \ln(\sqrt{\exp(x)})$$

$$m = \text{ch}\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$$

$$p = \text{sh}\left(-\frac{3}{2} \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x^2+1}}\right)\right)$$

$$p = sh\left(-\frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x^2+1}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x^2+1}}\right)} - e^{\frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x^2+1}}\right)}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{\ln\left(\left((3x^2+1)^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)} - e^{\ln\left(\left((3x^2+1)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{\ln\left((3x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)} - e^{\ln\left((3x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right)}\right]$$

$$p = \frac{1}{2}\left[(3x^2+1)^{\frac{1}{2}} - (3x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}\left[\sqrt{3x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}\right] = \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{\sqrt{3x^2+1}}\right].$$

Ex 12 Soit y un paramètre réel. Résoudre les (in-)équations suivantes d'inconnue x réelle : : on repérera préalablement si l'équation peut se résoudre algébriquement ou non.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $e^{-6x^2+1} - \sqrt{e} > 0$ | 7. $sh(x) = x^2$ | 13. $2ch(x) - x^2 \leq 0$ |
| 2. $\ln(x) + \ln(3x^2 - 4) > \ln(x^2 - 2)$ | 8. $e^{-2x} + e^x \leq 2$ | 14. $x \ln(2 - x) = 1$ |
| 3. $\log_2(x) + \log_x(2) = \frac{5}{2}$ | 9. $x + e^x > 2$ | 15. $sh^3(x) - 14sh(x) + 5 < 5ch^2(x)$ |
| 4. $3x \log_{10}(x) + 2(x - 1) = 0$ | 10. $e^{-x} + e^x = y$ | 16. $3sh(x) - ch(x) = 1$ |
| 5. $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ | 11. $x^2 < \ln(x) + 1$ | 17. $x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| 6. $\frac{e^{3x} - 2e^{2x} - e^{x+4} + 2e^4}{\ln^2 x - 1} > 0$ | 12. $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x-2)} \leq 2$ | 18. $ch^5 x - sh^5 x = 1$ |

1. Soit $(e): e^{-6x^2+1} - \sqrt{e} > 0$. Soit x un réel.

$x \text{ sol}^o \text{ de } (e) \Leftrightarrow e^{-6x^2+1} - \sqrt{e} > 0 \Leftrightarrow e^{-6x^2+1} > e^{\frac{1}{2}} \stackrel{\text{car exp est strictement croissante}}{\Leftrightarrow} -6x^2 + 1 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - 12x^2 > 0$
 $\Leftrightarrow (1 - \sqrt{12}x)(1 + \sqrt{12}x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}[.$

Donc, $Sol =]-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}[.$

2. Soit $(e): \ln(x) + \ln(3x^2 - 4) > \ln(x^2 - 2)$.

$\ln(x), \ln(3x^2 - 4) \text{ et } \ln(x^2 - 2) \text{ existent} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3(x - \frac{2}{\sqrt{3}})(x + \frac{2}{\sqrt{3}}) > 0 \\ (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3(x - \frac{2}{\sqrt{3}})(x + \frac{2}{\sqrt{3}}) > 0 \\ (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \sqrt{2}.$

Soit $x > \sqrt{2}$. $x \text{ sol}^o \text{ de } (e) \Leftrightarrow \ln(x) + \ln(3x^2 - 4) > \ln(x^2 - 2) \Leftrightarrow \ln(x) + \ln(3x^2 - 4) - \ln(x^2 - 2) > 0$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x(3x^2-4)}{x^2-2}\right) > \ln(1) \stackrel{\text{car } \ln \text{ est strictement croissante}}{\Leftrightarrow} \frac{x(3x^2-4)}{x^2-2} > 1 \Leftrightarrow x(3x^2-4) > x^2-2$

$\Leftrightarrow 3x^3 - x^2 - 4x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 2x - 2) > 0$
 $\Leftrightarrow 3(x-1)\left(x - \frac{-2+2\sqrt{7}}{6}\right)\left(x - \frac{-2-2\sqrt{7}}{6}\right) > 0 \stackrel{\text{car } x > \sqrt{2}}{\Leftrightarrow} x > \sqrt{2}.$
 $\text{car } \frac{-2-2\sqrt{7}}{6} < \frac{-2+2\sqrt{7}}{6} < 1 < \sqrt{2}$

Ainsi, $Sol =]\sqrt{2}, +\infty[.$

3. Soit $(e): \log_2(x) + \log_x(2) = \frac{5}{2}$. Soit $x \in \mathbb{R}^{++} \setminus \{1\}$. Posons $X = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

$\log_2(x) + \log_x(2) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow X^2 - \frac{5}{2}X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{2} \text{ ou } X = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = 0$

$\Delta = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$
 $X_1 = \frac{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1 \text{ et } X_2 = \frac{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \ln(\sqrt{2}) \text{ ou } \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ou } x = 1$. Ainsi, $Sol = \{\sqrt{2}, 1\}$.

4. Soit $(e): 3x \log_{10}(x) + 2(x - 1) = 0$. Posons $f(x) = \frac{3x \ln(x)}{\ln(10)} + 2(x - 1)$.

$Df = \mathbb{R}^{++}$. f est continue et dérivable sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions définies sur leur propre domaine de définition. Et $\forall x > 0, f'(x) = \frac{3}{\ln(10)} [\ln(x) + 1] + 2$.

Alors $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\ln(10)} [\ln(x) + 1] + 2 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -\frac{2\ln(10)}{3} - 1 \Leftrightarrow x > e^{-\frac{2\ln(10)}{3} - 1} = \frac{1}{e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}\right) + 1}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}}}$

D'où le tableau suivant :

$f\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}}}\right) < 0$ puisque f est décroissante sur $]0, \frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}}}]$ et $f(0) = -2 < 0$.

Donc f ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}}}]$. De plus,

f est continue et strictement croissante sur $]\frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}}}, +\infty[$.

Donc, le TBCSM assure que f est bijective de $]\frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}}}, +\infty[$ sur $]f\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}}}\right), +\infty[$.

Comme $0 \in]f\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}}}\right), +\infty[$, 0 a un unique antécédent par f sur $]\frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}}}, +\infty[$.

Finalement, f s'annule une seule fois sur Df en un réel $a \in]\frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}}}, +\infty[$.

Or $f(1) = 0$. Donc $a = 1$. Ainsi, $Sol = \{1\}$.

5. Soit $(e): 2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$. Soit x un réel.

$x \text{ sol de } (e) \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x-\frac{1}{2}} + 3^{x+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{2x} + \frac{2^{2x}}{2} = \frac{3^x}{\sqrt{3}} + 3^x \sqrt{3} \Leftrightarrow 2^{2x} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)$

$\Leftrightarrow 4^x \left(\frac{3}{2}\right) = 3^x \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow \ln(4^x) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(3^x) + \ln\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow x \ln(4) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) = x \ln(3) + \ln\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$

x	0	$\frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	-2		$+\infty$

$$\Leftrightarrow x(\ln(4) - \ln(3)) = \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow x(2\ln(2) - \ln(3)) = 2\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(3) + \ln(2) = 3\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(3\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3))}{(2\ln(2) - \ln(3))} = \frac{3}{2}. \text{ Ainsi, } \text{Sol} = \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

$$6. \text{ Soit } (e): \frac{e^{3x} - 2e^{2x} - e^{x+4} + 2e^4}{\ln^2 x - 1} > 0. \ln(x)^2 = 1 \Leftrightarrow (\ln(x) - 1)(\ln(x) + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) = 1 \\ \text{ou} \\ \ln(x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{e} \end{cases}.$$

Désormais, $x \in \mathbb{R}^{++} \setminus \{e, \frac{1}{e}\}$. Posons $X = e^x$.

$$N(x) = e^{3x} - 2e^{2x} - e^{x+4} + 2e^4 = X^3 - 2X^2 - e^4 X + 2e^4 = X^2(X - 2) - e^4(X - 2) = (X - 2)(X^2 - e^4) = (X - 2)(X - e^2)(X + e^2)$$

$$N(x) = (e^x - 2)(e^x - e^2)(e^x + e^2).$$

$$\text{Et, } D(x) = \ln(x)^2 - 1 = (\ln(x) - 1)(\ln(x) + 1).$$

Ainsi,

$$\text{Sol} =]0, \frac{1}{e}[\cup]\ln(2), 2[\cup]e, +\infty[$$

	0	$\frac{1}{e}$	$\ln(2)$	2	e	$+\infty$
$e^x - 2$	-	-	0	+	+	+
$e^x - e^2$	-	-	-	0	+	+
$N(x)$	+	+	0	-	0	+
$\ln(x) - 1$	-	-	-	-	0	+
$\ln(x) + 1$	-	0	+	+	+	+
$D(x)$	+	0	-	-	-	0
$\frac{N(x)}{D(x)}$	+	-	0	+	0	+

$$7. \text{ Soit } (e): sh(x) = x^2.$$

Posons $f: (x \mapsto sh(x) - x^2)$.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = ch(x) - 2x$. f' est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = sh(x) - 2$.

$$\text{Alors } f''(x) > 0 \Leftrightarrow sh(x) > 2 \Leftrightarrow x > sh^{-1}(2) = \ln(2 + \sqrt{2^2 + 1}) = \ln(2 + \sqrt{5}).$$

car sh bijective
et strictement croissante

$$f'(sh^{-1}(2)) = ch(sh^{-1}(2)) - 2sh^{-1}(2) = \sqrt{1 + (sh(sh^{-1}(2)))^2} - 2sh^{-1}(2)$$

$$f'(sh^{-1}(2)) = \sqrt{5} - 2\ln(2 + \sqrt{5}) \approx -0,65$$

f est continue et strictement décroissante sur $] - \infty; \ln(2 + \sqrt{5})]$.

Donc f' est bijective de $] - \infty; \ln(2 + \sqrt{5})]$ sur $[\sqrt{5} - 2\ln(2 + \sqrt{5}), +\infty[$.

Comme $0 \in [\sqrt{5} - 2\ln(2 + \sqrt{5}), +\infty[$, par f' , un unique antécédent dans $] - \infty; \ln(2 + \sqrt{5})]$

noté a . De même, $+\infty[$, 0 , par f' , un unique antécédent dans $]\ln(2 + \sqrt{5}), +\infty[$ noté b . On en déduit le signe de f' puis les variations de f .

De plus, $f(0) = 0$ et $f(sh^{-1}(2)) = 2 - (sh^{-1}(2))^2 = 2 - (\ln(2 + \sqrt{5}))^2 \approx -0,8 < 0$. Par conséquent, $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$. J'en déduis comme pour f' , en utilisant la continuité, la stricte monotonie et les valeurs de f , que f s'annule exactement une fois sur $]0, b[$ en un réel α et une autre fois sur $]b, +\infty[$. Ainsi, $\text{Sol} = \{0, \alpha, \beta\}$.

x	$-\infty$	0	a	$\ln(2 + \sqrt{5})$	b	β	$+\infty$
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	$+$	< 0	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+$	< 0	0	$+$	$+\infty$

$$8. \text{ Soit } (e): e^{-2x} + e^x \leq 2$$

Soit x un réel et $X = e^x$.

$$x \text{ solution} \Leftrightarrow X^{-2} + X \leq 2 \Leftrightarrow 1 + X^3 - 2X^2 \leq 0 \Leftrightarrow (X - 1)(X^2 - X - 1) \leq 0 \Leftrightarrow (X - 1)\left(X + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1)\left(e^x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(e^x - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(e^x - 1)\left(e^x - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)}_{H(x)} \leq 0 \text{ car } \forall x, e^x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0.$$

D'où le tableau ci-contre et les solutions ci-dessous :

$$\text{Sol} = \left[\ln\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right), 0\right].$$

x	$\ln\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$	0
$e^x - 1$	-	0
$e^x - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$	-	0
$H(x)$	+	0

$$9. \text{ Soit } (e): x + e^x > 2$$

Tout d'abord, si $x \leq 0$ alors $e^x \leq 1$ donc $e^x + x \leq 1 + x \leq 1 < 2$ et par suite, x n'est pas solution de (e) .

si $x \geq 1$ alors $e^x \geq e$ donc $e^x + x \geq e + x \geq e + 1 > 2$ donc x est solution de (e) .

Pour déterminer les solutions de (e) sur $]0, 1[$, étudions $f: (x \mapsto e^x + x - 2)$.

f est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$ car les fonctions $\exp$ et $(x \mapsto x - 2)$ le sont. Comme $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = e - 1 > 0$, le TBCSM assure que f s'annule exactement une fois sur $]0, 1[$ en un réel α . Alors, $\forall x < \alpha, f(x) < 0$ et $\forall x > \alpha, f(x) > 0$.

Ainsi, $\text{Sol} =]\alpha, +\infty[$. On peut déterminer une valeur approchée de α en appliquant la méthode de dichotomie (Cf TD 6)

$$10. \text{ Soit } (e): e^{-x} + e^x = y$$

Soit X un réel et $X = e^x$.

$$e^{-x} + e^x = y \Leftrightarrow \frac{1}{X} + X = y \Leftrightarrow X^2 - yX + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2} \text{ ou } X = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \text{ si } y \in [-2, 2] \\ \text{impossible si } y \notin [-2, 2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2} \text{ ou } e^x = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \text{ si } y \in [-2, 2] \\ \text{impossible si } y \notin [-2, 2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}\right) \text{ ou } x = \ln\left(\frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2}\right) \text{ si } y \in [-2, 2] \\ \text{impossible si } y \notin [-2, 2] \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, si } y \notin [-2, 2] \text{ alors } \text{Sol} = \emptyset; \text{ si } y \in [-2, 2] \text{ alors } \text{Sol} = \left\{\ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}\right), \ln\left(\frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2}\right)\right\}.$$

11. Soit (e) : $x^2 < \ln(x) + 1$

Soit $f: (x \mapsto x^2 - \ln(x) - 1)$. $Df = \mathbb{R}^{+*}$. f est continue et dérivable sur Df et $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x} = \frac{2(x - \frac{1}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}})}{x}$.

$f(1) = 0$. Alors les variations et valeurs de f permettent de conclure que $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) < 0$.

f est continue et strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. Alors le TBCSM assure que f est bijective de $]0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ sur $[f(\frac{1}{\sqrt{2}}), +\infty[$. Comme $0 \in]f(\frac{1}{\sqrt{2}}), +\infty[$, 0 a un unique antécédent α par f .

Alors les variations et valeurs de f permettent de conclure que $f(x) < 0 \Leftrightarrow]\alpha, 1[$.

Ainsi, **Sol = $] \alpha, 1[$** . On peut déterminer une valeur approchée de α en appliquant la méthode de dichotomie (Cf TD 6).

x	0	α	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0		+
$f(x)$	$+\infty$		0		$+\infty$

12. Soit (e) : $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x-2)} \leq 2$

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln(x-2)} \text{ existe} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ \ln(x-2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ \ln(x-2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \\ x-2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2 \text{ et } x \neq 3.$$

Désormais $x \in]2, 3[\cup]3, +\infty[= D$.

$$x \text{ solution de (e)} \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{\ln(x-2)} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1) - 2\ln(x-2)}{\ln(x-2)} \leq 0.$$

$$\text{Or, } \ln(x+1) - 2\ln(x-2) > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) > \ln[(x-2)^2] \Leftrightarrow (x+1) > (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 < 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2} \right[\cap D \Leftrightarrow x \in \left] 2, \frac{5+\sqrt{13}}{2} \right[\setminus \{3\}.$$

De plus, $\ln(x-2) > 0 \Leftrightarrow (x-2) > 1 \Leftrightarrow x > 3$.

D'où le tableau ci-contre et les solutions ci-dessous.

Ainsi, **Sol = $]2, 3[\cup \left] \frac{5+\sqrt{13}}{2}, +\infty \right[$** .

x	2	3	$\frac{5+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$
$\ln(x-2)$		-	0	+
$\ln(x+1) - 2\ln(x-2)$		+	0	-
$H(x)$		-	+	0

13. Soit (e) : $x \ln(2-x) = 1$

Posons $f: (x \mapsto x \ln(2-x) - 1)$. $Df =]-\infty, 2[$. f est continue et dérivable sur Df et $\forall x \in Df, f'(x) = \ln(2-x) - \frac{x}{2-x} = \frac{(2-x)\ln(2-x) - x}{2-x}$.

Donc $f'(x)$ est du signe de $h(x) = (2-x)\ln(2-x) - x$. h est dérivable sur Df et $\forall x \in Df, h'(x) = -\ln(2-x) - 1 - 1 = -\ln(2-x) - 2$.

Alors $h'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(2-x) > -2 \Leftrightarrow 2-x > e^{-2} \Leftrightarrow x < 2 - \frac{1}{e^2}$.

D'après les variations de h et sa limite en 2, j'en déduis que $h\left(2 - \frac{1}{e^2}\right) < 0$.

h est continue et strictement décroissante sur $] -\infty, 2 - \frac{1}{e^2}]$ et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty > 0 > h\left(2 - \frac{1}{e^2}\right)$. Alors le TBCSM assure que h s'annule

une seule fois sur $] -\infty, 2 - \frac{1}{e^2}]$ en un réel α . Et les variations et valeurs de

assurent que h ne s'annule pas sur $\left[2 - \frac{1}{e^2}, 2\right]$.

De plus, $h(1) = -1 < 0 = h(\alpha) < 2\ln(2) = h(0)$.

Par conséquent, $0 < \alpha < 1 < 2 - \frac{1}{e^2}$. D'où le tableau ci-contre.

$f(\alpha) = \alpha \ln(2-\alpha) - 1$. Comme $0 < \alpha < 1, \ln(2) > \ln(2-\alpha) > 0$ donc $1 > \ln(2) > \alpha \ln(2-\alpha) > \alpha \ln(2-\alpha) > 0$. Ainsi, $f(\alpha) < 0$.

D'après les variations et valeurs de f , on peut affirmer que f ne s'annule jamais et est toujours strictement négative. Et finalement, **Sol = $\emptyset$** .

14. Soit (e) : $sh^3(x) + 5 < 14sh(x) + 5ch^2(x)$

$$sh^3(x) + 5 < 14sh(x) + 5ch^2(x) \Leftrightarrow X^3 + 5 < 14X + 5(1 + X^2) \Leftrightarrow X^3 - 5X^2 - 14X > 0 \Leftrightarrow X(X^2 - 5X - 14) > 0$$

$$\Leftrightarrow X(X+2)(X-7) > 0 \Leftrightarrow \frac{sh(x)(sh(x) - (-2))(sh(x) - 7)}{H(x)} > 0.$$

$$\text{Or, pour tous } x \text{ et } y \text{ réels, } sh(x) > y \Leftrightarrow x > sh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

car sh est strictement croissante

D'où le tableau ci-contre et les solutions ci-dessous.

Ainsi, **Sol = $] \ln(-2 + \sqrt{5}), 0[\cup] \ln(7 + \sqrt{50}), +\infty[$** .

x	$\ln(-2 + \sqrt{5})$	0	$\ln(7 + \sqrt{50})$
$sh(x) + 2$	-	0	+
$sh(x)$	-	-	0
$sh(x) - 7$	-	-	-
$H(x)$	-	0	+

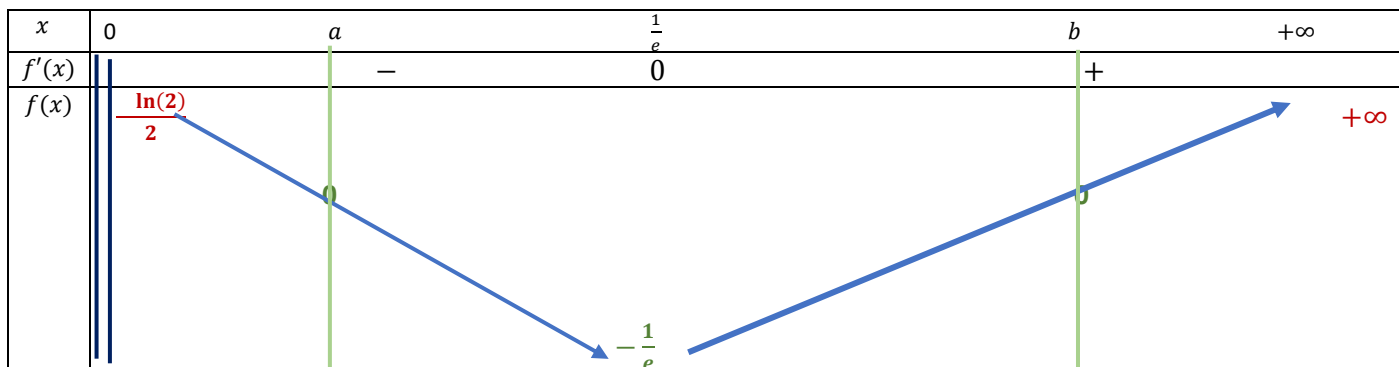
17. Soit l'équation (e) : $x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ d'inconnue x réelle.

Tout d'abord, $x^x = e^{x \ln(x)}$ n'existe que si $x > 0$. Désormais $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

$$x^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow e^{x \ln(x)} = e^{\ln(\frac{1}{\sqrt{2}})} \Leftrightarrow x \ln(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow x \ln(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Posons $f(x) = x \ln(x) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$. f est continue et dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}^{+*}$ (car son expression n'est constituée que de fonctions dérivables sur leur propre domaine de définition). Et $\forall x > 0, f'(x) = \ln(x) + 1$. Donc,

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} = \frac{1}{e}$. D'où les signes de f' et variations de f suivantes :



$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ donc, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{2} > 0$. Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0$.

f est continue sur l'intervalle $]0, \frac{1}{e}]$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 0 > f\left(\frac{1}{e}\right)$. Donc le TVI assure que f s'annule au moins une fois sur $]0, \frac{1}{e}]$. Comme f est strictement croissante sur $]0, \frac{1}{e}]$, f est injective sur cet intervalle. Donc, f s'annule une seule fois sur $]0, \frac{1}{e}]$ en un réel a . De même, f s'annule une seule fois sur $\frac{1}{e}, +\infty[$ en un réel b . Ainsi f s'annule en deux réels uniquement a et b .

Enfin, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{4} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Donc, $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{1}{2}$ sont les solutions de (e).

15.

Ex 13 Résoudre: (S): $\begin{cases} \log_y(x) + \log_x(y) = \frac{50}{7} \\ xy = 256 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Ex 14 Calculer les limites suivantes : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} (2\sqrt[3]{x} - 3x^2) \ln^2(x^4 - 3x)$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\ln(x) - 3x^2 + \sin(x)}$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-\sqrt{\ln(x^2)}}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \ln(1+x)$.

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2+\cos(x^2)) - \ln(2)}{x^2}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - \cos(x)}{\sin(x)}$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ch\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x \ln(x^2) - 3x^2}$

h. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+y)^\alpha - x^\alpha - y^\alpha$ où $y \in \mathbb{R}^{++}$ fixé.

i. $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ quand cette limite existe (on justifiera qu'elle n'existe pas le cas échéant)

j. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\ln(x)}$

k. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 3ch(x))e^x$

2) Pour quelles valeurs du réel α , la fonction $f: \left(x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ? R

On suppose ici que $\alpha < 1$. Le prolongement par continuité de f est-il dérivable en 0 ?

3) Soit $f(x) = x \exp\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = x e^{\frac{x}{x^2-1}}$ et $\varphi(t) = \frac{e^{\frac{t}{1-t^2}} - 1}{t}$.

Calculer la limite de φ en 0. En déduire que Cf admet une même asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ dont on donnera une équation.

Ex 15 : Etudier g et représenter la courbe de g :

1. $g(x) = \ln(2^x - x - 1)$

2. $g(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 + x}$

3. $g(x) = x^x$

4. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

5. $g(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$

6. $g(x) = \ln(ch(x))$.

2. Etude de la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 + x}$.

Df ? $f(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$. Donc, $Df =]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$.

Variations de f ? f est continue sur Df (puisque son expression n'est constituée que de fonctions dérivables sur leur propre domaine de définition) Dans l'expression de f seule la racine carrée n'est pas dérivable partout où elle est continue. $\sqrt{\cdot}$ est dérivable uniquement sur $\mathbb{R}^{++}$. $\forall x \in]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[, x^2 + x \in \mathbb{R}^{++}$ et $x \mapsto x^2 + x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$. Donc par composition, $v: (x \mapsto \sqrt{x^2 + x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$. Comme $u: (x \mapsto e^{\frac{1}{x}})$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (puisque son expression n'est constituée que de fonctions dérivables sur leur propre domaine de définition) donc sur $]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$, f est dérivable que $]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$. Et, $\forall x \in]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[, f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ et $u'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$ et $v'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Donc, $\forall x \in]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[, f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+x} + e^{\frac{1}{x}}\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-2(x^2+x) + (2x+1)x^2}{2x^2\sqrt{x^2+x}}\right)$

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{2x^3 - x^2 - 2x}{2x^2\sqrt{x^2+x}}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x(2x^2 - x - 2)}{2x^2\sqrt{x^2+x}}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{2x\left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)}{2x^2\sqrt{x^2+x}}\right)$. De plus $-1 < \frac{1-\sqrt{17}}{4} < 0 < \frac{1+\sqrt{17}}{4}$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1-\sqrt{17}}{4}$	0	$\frac{1+\sqrt{17}}{4}$	$+\infty$
$x - \frac{1+\sqrt{17}}{4}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x - \frac{1-\sqrt{17}}{4}$	$-$	$-$	$+$	$+$	0	
$f'(x)$	$-$	$?$		0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ AO			$+\infty$ AV		$+\infty$ AO

Limites de f aux bords de Df ?

En 0^+ ? FI " $\infty \times 0$ ".

$\forall x > 0, f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(1+x)} = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x} \sqrt{1+x} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{(\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}} \varphi(x)$ tel que $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 1$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^{\frac{1}{2}}} = +\infty$. Donc par composition,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{(\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}} = +\infty$. Il en découle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Cf a donc une asymptote verticale en 0.

En $+\infty$? pas de FI. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

En $-\infty$? FI " $+\infty - (+\infty)$ "

$\forall x < -1, f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{1}{x}} |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = -x e^{\frac{1}{x}} \varphi(x)$ tel que $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 1$. Donc, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Dérivabilité de f en -1 ?

$\forall x < -1, \tau(x) = \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(1+x)}}{x+1} = \frac{e^{\frac{1}{x}} \sqrt{-x(-x-1)}}{x+1} = \frac{e^{\frac{1}{x}} \sqrt{-x} \sqrt{-x-1}}{-x-1} = -\frac{e^{\frac{1}{x}} \sqrt{-x}}{\sqrt{-x-1}}$. Donc $\lim_{x \rightarrow -1} \tau(x) = -\infty$.

Donc f n'est pas dérivable en -1 et Cf a une tangente verticale au point $A(-1, 0)$.

Branch infinie de Cf en $+\infty$?

$\forall x > 0, \frac{f(x)}{x} = \frac{e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

$\forall x > 0, f(x) - x = x e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x = x \left(e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)}{\frac{1}{x}} = H\left(\frac{1}{x}\right)$ où $H(t) = \frac{e^t \sqrt{1+t} - 1}{t} = \frac{\theta(t) - \theta(0)}{t - 0}$ et $\theta(t) = e^t \sqrt{1+t}$.

θ est dérivable en 0 et $\theta'(0) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Donc, $\lim_{t \rightarrow 0} H(t) = \frac{3}{2}$ et par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \frac{3}{2}$. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(x + \frac{3}{2}\right) = 0$. Donc

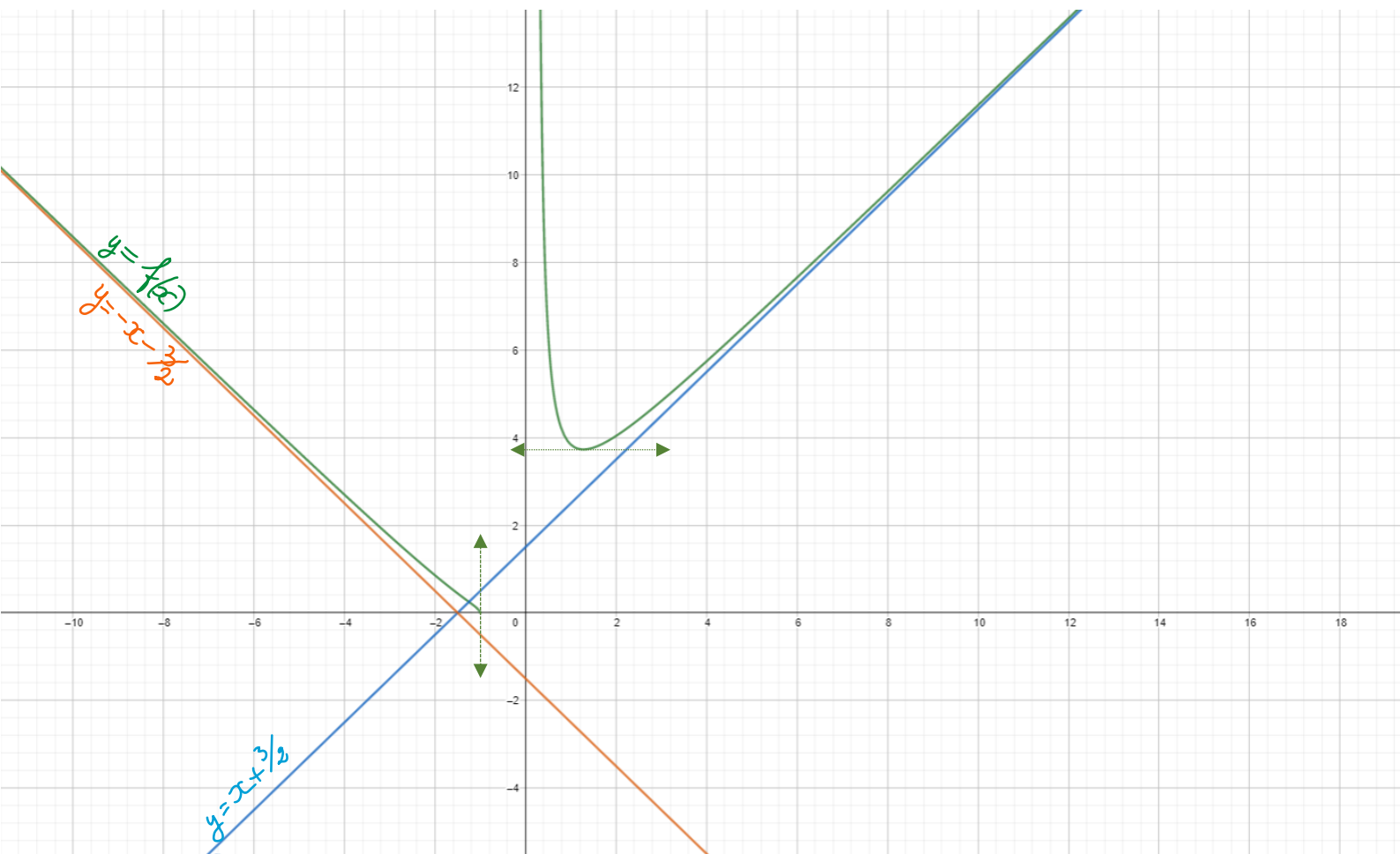
la droite d'équation $y = x + \frac{3}{2}$ est asymptote à Cf en $+\infty$.

Branch infinie de Cf en $-\infty$?

$\forall x < -1, \frac{f(x)}{x} = \frac{e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \frac{-x e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = -e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$.

$\forall x < -1, f(x) + x = -x e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x = -x \left(e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = -\frac{\left(e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)}{-\frac{1}{x}} = -H\left(\frac{1}{x}\right)$.

Or, $\lim_{t \rightarrow 0} H(t) = \frac{3}{2}$ et par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = -\frac{3}{2}$. Alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(-x - \frac{3}{2}\right) = 0$. Donc la droite d'équation $y = -x - \frac{3}{2}$ est asymptote à Cf en $-\infty$.



Ex 16 Soit $a \in \mathbb{R}^{++}$. Etudier $g: (x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1-ax)})$.

$$\frac{\ln(1+ax)}{\ln(1-ax)} \text{ existe} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+ax > 0 \\ 1-ax > 0 \\ 1-ax \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a} \\ x \neq 0 \end{cases} \text{ Ainsi, } Dg =]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[\setminus \{0\}.$$

g est continue et dérivable sur Dg car son expression n'est constituée que de fonctions continues et dérivables sur leur propre domaine de

$$\text{définition. Et } \forall x \in Dg, g'(x) = \frac{\frac{a}{1+ax} \ln(1-ax) + \frac{a}{1-ax} \ln(1+ax)}{\ln(1-ax)^2} = \frac{a}{\ln(1-ax)^2(1-a^2x^2)} [(1-ax) \ln(1-ax) + (1+ax) \ln(1+ax)].$$

Donc $g'(x)$ est du signe de $h(x) = (1-ax) \ln(1-ax) + (1+ax) \ln(1+ax)$.

h est dérivable sur Dg et $\forall x \in Dg, h'(x) = a[\ln(1+ax) - \ln(1-ax)] = a[\ln(1+ax) - \ln(1-ax)]$.

$$\text{Donc, } h'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(1+ax) - \ln(1-ax) > 0 \Leftrightarrow \ln(1+ax) > \ln(1-ax) \Leftrightarrow 1+ax > 1-ax \Leftrightarrow 2ax > 0 \Leftrightarrow x > 0. \text{ car } a > 0$$

D'où le tableau :

x	$-\frac{1}{a}$	0	$\frac{1}{a}$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	+	0	+
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$-\infty$		0

Etudions les limites de f en 0^+ et en 0^- :

$$\frac{\ln(1+ax)}{\ln(1-ax)} = -\frac{\ln(1+ax)}{ax} \frac{-ax}{\ln(1-ax)}.$$

$$\text{Or } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-ax}{\ln(1-ax)} = 0. \text{ Donc par composition, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

Comme g a une limite finie en 0, je peux affirmer que g est prolongeable par continuité en 0 par la valeur -1 .

Comme g a une limite finie en $\frac{1}{a}$, je peux affirmer que g est prolongeable par

continuité en $\frac{1}{a}$ par la valeur 0. Alors la fonction $\tilde{g}: \left(x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1-ax)} \text{ si } x \in]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[\setminus \{0\} \\ 0 \text{ si } x = \frac{1}{a} \\ -1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \right)$ est continue sur $]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[$ et est le prolongement par

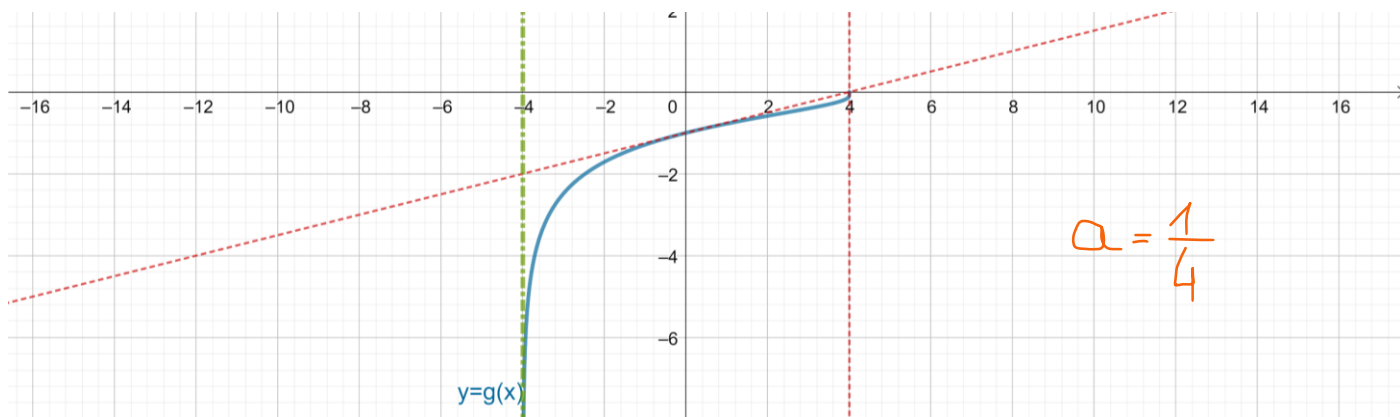
continuité en 0 et $\frac{1}{a}$ de g . Pour savoir comment Cg s'approche des points $A(0, -1)$ et $B(\frac{1}{a}, 0)$, étudions la dérivabilité de $\tilde{g}$ en 0 et en $\frac{1}{a}$.

$\tilde{g}$ est continue sur $]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[$, dérivable au moins sur $]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[\setminus \{0\}$

$$\text{et } \forall x \in]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[\setminus \{0\}, \frac{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln(1+ax)}{\ln(1-ax)} + 1}{x} = \frac{\ln(1+ax) + \ln(1-ax)}{x \ln(1-ax)} = \frac{1}{x} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\ln(1-ax)} = a \frac{\ln(1-a^2x^2)}{-a^2x^2} \frac{-ax}{\ln(1-ax)}.$$

Comme $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -ax = 0$, donc par composition, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{-a^2x^2} = 1$ et ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-ax}{\ln(1-ax)} = 1$ et ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(0)}{x - 0} = a$. Donc, $\tilde{g}$ est dérivable en 0 en $\tilde{g}'(0) = a$. La courbe de Cg approche donc le point A en se collant à la droite d'équation $y = ax$ (tangente à $C\tilde{g}$ en A).

$\forall x \in]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[\setminus \{0\}, \frac{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(\frac{1}{a})}{x - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{\ln(1+ax)}{\ln(1-ax)}}{x - \frac{1}{a}} = \frac{\ln(1+ax)}{(ax-1)\ln(1-ax)}$. Or, $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}} 1 - ax = 0^+$. Donc par composition, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}} (1 - ax) \ln(1 - ax) = 0^-$ et par suite $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}} \frac{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(\frac{1}{a})}{x - \frac{1}{a}} = +\infty$. Donc, $\tilde{g}$ n'est pas dérivable en $\frac{1}{a}$ et $C\tilde{g}$ a une tangente verticale en B . La courbe de Cg approche donc le point A en se collant à la droite verticale d'équation $y = \frac{1}{a}$. Enfin, Comme f a une limite infinie en $-\frac{1}{a}$, je peux affirmer que Cf a une asymptote verticale d'équation $x = -\frac{1}{a}$.



Ex 17 Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq 3$ et x, a et b des réels.

1) Montrer que $\sum_{k=0}^n \text{ch}(a + kb) = \frac{\text{sh}(\frac{(n+1)b}{2})}{\text{sh}(\frac{b}{2})} \text{ch}(a + \frac{nb}{2})$.

2) Calculer :

$$S_n = \sum_{p=3}^n \log_{10} \left(\frac{2p^2 - 2p - 4}{3p^2 + 3p - 6} \right)$$

$$T_n(x) = \sum_{k=n}^{n^2} (-1)^k a^{(bk)}$$

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-1}{k+1} 5^{n-\frac{k}{a}} \sqrt[n]{2}$$

$$P_n = \prod_{k=3}^n \left(\frac{k^2-1}{k^2-4} \right)^a$$

$$R_n(x) = \frac{1}{\text{sh}(2a)} \prod_{k=0}^n \text{ch}\left(\frac{a}{2^k}\right)$$

où $a \neq 0$

Ex 18

1. Montrer que pour tout réel x , $\text{ch}^2(x) + \text{sh}x > 0$ et $|\text{sh}(x)| \geq \left|x + \frac{x^3}{6}\right|$.

2. Montrer que pour tout réel x de $]0,1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$. (2.bis. Montrer que : $\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$)

$$x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{x \ln(x)} e^{(1-x) \ln(1-x)} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x) \geq -\ln(2).$$

Posons $f(x) = x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)$. $Df =]0,1[$. f est continue et dérivable sur Df et

$$\forall x \in Df, f'(x) = \ln(x) + 1 - \ln(1-x) - 1 = \ln(x) - \ln(1-x). \text{ Donc, } f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > \ln(1-x) \Leftrightarrow x > 1-x \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

D'où le tableau des variations de f suivant :

$$\text{Alors, } \forall x \in]0,1[, f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2).$$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

Montrer que : $\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e$.

Par définition, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$. Donc, $\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ existe et $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 0$. Alors,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e \Leftrightarrow x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 \Leftrightarrow x[\ln(x+1) - \ln(x)] < 1.$$

Soit $f(x) = x[\ln(x+1) - \ln(x)]$ f est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$.

Et $\forall x > 0, f'(x) = \ln(x+1) - \ln(x) + \frac{x}{x+1} - 1 = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ et $f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$. Donc f' est décroissante et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. Donc, $\forall x > 0, f'(x) > 0$. Donc f est croissante. De plus, $f(x) = x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Comme

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1. \text{ Je déduis des limites et variations de } f \text{ que } \forall x > 0, f(x) < 1. \text{ Ainsi, } \forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e$$

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{++}, \forall y \in \mathbb{R}^{++}, \forall t \in [0,1], t \ln(x) + (1-t) \ln(y) \leq \ln(tx + (1-t)y)$.

Si $t = 0$ ou $t = 1$ alors l'inégalité est évidemment vraie pour tous réels x et y strictement positifs.

Fixons $y \in \mathbb{R}^{++}$ et $t \in]0,1[$ et introduisons $f(x) = t \ln(x) + (1-t) \ln(y) - \ln(tx + (1-t)y)$.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$

et $\forall x \in \mathbb{R}^{++}, f'(x) = \frac{t}{x} - \frac{t}{tx+(1-t)y} = t \left(\frac{tx+(1-t)y-x}{x(tx+(1-t)y)} \right) = t(1-t) \left(\frac{(y-x)}{x(tx+(1-t)y)} \right) = \left(\frac{t(1-t)}{x(tx+(1-t)y)} \right) (y-x)$. Il en découle que $f'(x)$ est du

signe de $(y-x)$.

x	0	y	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		0	

Or, $f(y) = t \ln(y) + (1-t) \ln(y) - \ln(ty + (1-t)y) = 0$.

Des variations et valeurs de f , je peux conclure que :

$\forall x \in \mathbb{R}^{++}, f(x) \leq 0$ et par conséquent, $\forall y \in \mathbb{R}^{++}, \forall t \in]0,1[$,

$\forall x \in \mathbb{R}^{++} t \ln(x) + (1-t) \ln(y) \leq \ln(tx + (1-t)y)$.

CCL : $\forall x \in \mathbb{R}^{++}, \forall y \in \mathbb{R}^{++}, \forall t \in [0,1], t \ln(x) + (1-t) \ln(y) \leq \ln(tx + (1-t)y)$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{++} \setminus \{1\}$. Montrer que : $[\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{++})^2, (x+y)^\alpha < x^\alpha + y^\alpha] \Leftrightarrow \alpha \in]0,1[$.

5. Soit a et b deux réels tels que Montrer que : $(0 < a < b \Rightarrow \frac{b-a}{b} \leq \ln(b) - \ln(a) \leq \frac{b-a}{a})$.

Ex 19 Déterminer tous les réels a tels que $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \leq e^{ax^2}$.

$ch(x) \leq e^{ax^2} \Leftrightarrow \ln(ch(x)) \leq ax^2 \Leftrightarrow \frac{\ln(ch(x))}{x^2} \leq a$ ou $x = 0$. Donc pour que a vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \leq e^{ax^2}$, il faut et il suffit que a vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\ln(ch(x))}{x^2} \leq a$ donc que a soit un majorant de la fonction $f: (x \mapsto \frac{\ln(ch(x))}{x^2})$. Etudions f :

$Df = \mathbb{R}^*$ et f est paire. Etudions f sur $\mathbb{R}^{++}$. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ et $\forall x > 0, f'(x) = \frac{\frac{sh(x)}{ch(x)}x^2 - 2x \ln(ch(x))}{x^4} = \frac{\frac{sh(x)}{ch(x)}x - 2 \ln(ch(x))}{x^3}$

$f'(x)$ est du signe de $g(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}x - 2 \ln(ch(x))$. g est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ et

$\forall x > 0, g'(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} + \frac{x}{ch^2(x)} - \frac{2sh(x)}{ch(x)} = \frac{x}{ch^2(x)} - \frac{sh(x)}{ch(x)}$ et $g''(x) = \frac{1}{ch^2(x)} - \frac{2xsh(x)}{ch^3(x)} - \frac{1}{ch^2(x)} = -\frac{2xsh(x)}{ch^3(x)} < 0$.

D'où le tableau ci-contre donnant, en particulier, les variations de f :

D'après les variations et la parité de f , f est majorée dès que la limite de f en 0 existe et est finie.

Etudions cette limite : $\frac{\ln(ch(x))}{x^2} = \frac{\ln(ch(x))}{ch(x)-1} \frac{ch(x)-1}{x^2} = \frac{\ln(ch(x))}{ch(x)-1} \frac{2sh^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{\ln(ch(x))}{ch(x)-1} \frac{2sh^2(\frac{x}{2})}{4(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2} \frac{\ln(ch(x))}{ch(x)-1} \left(\frac{sh(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})} \right)^2$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} ch(x) \stackrel{C}{=} 1$ et $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{\ln(u)}{u-1} \stackrel{TA}{=} 1$, donc par composition, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ch(x))}{ch(x)-1} = 1$. Et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \stackrel{C}{=} 0$ et $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{sh(u)}{u} \stackrel{TA}{=} 1$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{sh(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})} = 1$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$. Donc $[\frac{1}{2}, +\infty[$ est l'ensemble des majorants de f . Je conclus que les réels a recherchés sont tous les réels supérieurs à $\frac{1}{2}$.

x	0	$+\infty$
$g''(x)$	-	
$g'(x)$	0	-
$g(x)$	0	-
$f'(x)$		-
$f(x)$		

Ex 20

- Etudier le signe de $f(x) = (x-1)\ln(x+1) - x\ln(x)$ sur $[1; +\infty[$.
- En déduire les variations de $\varphi(x) = \ln(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ sur $[1; +\infty[$.
- En calculant $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, en déduire les variations de φ sur $]0,1]$.
- Montrer que pour tous réels strictement positifs, $\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq (\ln(2))^2$.

Ex 21 Montrer que les applications suivantes sont bijectives de Df sur un ensemble J à déterminer.

Déterminer une expression de la bijection réciproque lorsque cela est possible. Etudier la dérivabilité de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'(b)$.

1. $f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}; b \in J$

2. $f(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} (\equiv th(x)); b \in J$

3. $f(x) = ch(e^{x\sqrt{e}}); b = \frac{e^2+e^{-2}}{2}$

5. $f(x) = sh(x) + \frac{x^2}{2}; b = \frac{e^2+e^{-1}}{2e}$

4. $f(x) = x + 2\sqrt{x}; b = 1$

Ex 22 Soit $t \in]0; 1[$. Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose $f_t(x) = \min\{n \in \mathbb{N}^* / x^n \leq t\}$.

Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$, $\frac{\ln(t)}{\ln(x)} \leq f_t(x) < \frac{\ln(t)}{\ln(x)} + 1$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f_t(x)$.

Soit $x \in]0, 1[$. $x^n \leq t \Leftrightarrow \ln(x^n) \leq \ln(t) \Leftrightarrow n \ln(x) \leq \ln(t) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(t)}{\ln(x)}$. Donc, $f_t(x) = \min\{n \in \mathbb{N}^* / n \geq \frac{\ln(t)}{\ln(x)}\}$.

Or, $[\frac{\ln(t)}{\ln(x)}, \frac{\ln(t)}{\ln(x)} + 1[$ contient un seul entier non nul (puisque $\ln(t) \neq 0$). Il en découle que $\frac{\ln(t)}{\ln(x)} \leq f_t(x) < \frac{\ln(t)}{\ln(x)} + 1$.

Alors $\forall x \in]0, 1[$, $(1-x)\frac{\ln(t)}{\ln(x)} \leq (1-x)f_t(x) < (1-x)\left[\frac{\ln(t)}{\ln(x)} + 1\right]$ i.e. $\frac{1}{x-1}[-\ln(t)] \leq (1-x)f_t(x) < \frac{1}{x-1}[-\ln(t)] + (1-x)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) = 0$, les deux fonctions qui encadrent $(1-x)f_t(x)$ ont la même limite $[-\ln(t)]$ quand $x \rightarrow 1^-$ et par suite, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f_t(x) = -\ln(t)$.

Ex 23 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \begin{cases} nx^n & \text{si } x \in [0, \frac{n}{n+1}] \\ n^{n+1}(1-x)^n & \text{si } x \in [\frac{n}{n+1}, 1] \end{cases}$

1. Etudier la continuité de chaque f_n .
2. Déterminer, pour x fixé, la limite de la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Puis déterminer la limite de $(f_n(\frac{n}{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$.

1. g_n et h_n sont polynomiales donc continues sur $\mathbb{R}$. J'en déduis que f_n est continue au moins sur $[0, \frac{n}{n+1}]$ et sur $[\frac{n}{n+1}, 1]$.
 f_n est-elle continue en $\frac{n}{n+1}$? Autrement dit g_n et h_n se raccordent-elles au point d'abscisse $\frac{n}{n+1}$?

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{n}{n+1})^-} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{n}{n+1})^-} g_n(x) = n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{n}{n+1})^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{n}{n+1})^+} h_n(x) = n^{n+1} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^n = n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1}\right)^n = n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

J'en déduis que f_n est continue en $\frac{n}{n+1}$.

2. Fixons $x \in [0, 1[$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1^-$, pour n assez grand, $\frac{n}{n+1} > x$ et par conséquent $x \in [0, \frac{n}{n+1}]$ et $f_n(x) = nx^n$.

Or $nx^n = ne^{n \ln(x)} = \frac{n}{e^{(-\ln(x))n}} = \frac{n}{e^{\gamma n}}$. Or $\gamma = -\ln(x) > 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{\gamma t}} \stackrel{CC}{=} 0$. Donc, par composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^{(-\ln(x))n}} = 0$. Et ainsi,

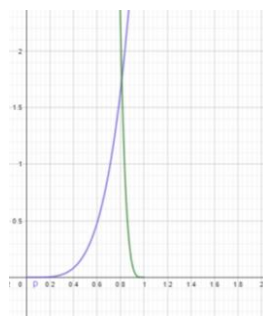
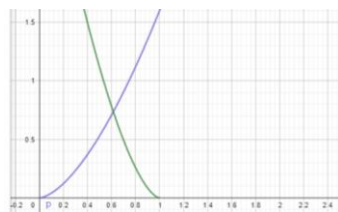
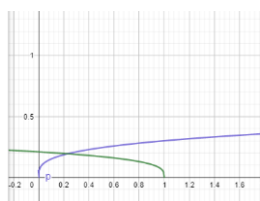
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Prenons $x = 1$. Alors $f_n(1) = n^{n+1}0^n = 0$ dès que $n \geq 1$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1) = 0$.

CCL : $\forall x \in [0; 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = ne^{n \ln(\frac{n}{n+1})} = ne^{-n \ln(\frac{n+1}{n})} = ne^{-\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}}$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1. \text{ Par conséquent, } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}} = e^{-1} = \frac{1}{e}. \text{ J'en conclus que : } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{e}.$$



Ex 24 On définit trois suites P, T et u telles que : $\forall n > 0, P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right), T_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ et $u_0 = -1$ et $\forall n, \sqrt[n]{u_n} \sqrt[n+1]{u_{n+1}} = e$.

- 1) Justifier que la suite P est strictement croissante et convergente.
- 2) Montrer que T est convergente et déterminer sa limite.
- 3) Donner une expression explicite de u .