

Programme de colle 26

Chapitre 19 : Applications linéaires.

E et F sont deux K-e.v.

I Généralités

1. Définition et règles de calcul

$f \in \mathcal{L}(E, F)$ dans F lorsque f est une application de E dans F et $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ et $\forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) \in E^n, \forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n, f(\sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{u}_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f(\vec{u}_k)$.

2. Exemples.

Application linéaire nulle : $\omega: E \rightarrow F$ telle que $\omega(\vec{x}) = \vec{0}_F$

Endomorphisme nul $\omega: E \rightarrow E$ telle que $\omega(\vec{x}) = \vec{0}_E$. Identité $id_E: E \rightarrow E$ telle que $id_E(\vec{x}) = \vec{x}$.

Homothétie h vectorielle de rapport $\alpha \in K^* : h: E \rightarrow E$ telle que $h(\vec{x}) = \alpha\vec{x}$.

Endomorphisme f_A canoniquement de K^n associé à la matrice A de $M_n(K) : f : ((x_1, x_2, \dots, x_n)) \mapsto (y_1, y_2, \dots, y_n)$ telle que : $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Application linéaire de K^p dans K^n canoniquement associée à la matrice A de $M_{n,p}(K) : f : ((x_1, x_2, \dots, x_p)) \mapsto (y_1, y_2, \dots, y_n)$ telle que :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Trace, transposition, opérateur Intégral, dérivation (...).

3. Propriété fondamentale

Soit $B = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel E et $(\vec{y}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F . Il existe une unique application linéaire f de E vers F qui vérifie : $\forall i \in I, f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$.

Une application linéaire f de E dans F est entièrement caractérisée par la donnée des images par f des vecteurs d'une base de E . Deux applications linéaires de E dans F coïncidant en tout vecteur d'une base de E sont égales (partout).

Soit $E = E_1 \oplus E_2$ et $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Il existe une unique application linéaire u de E vers F tq : $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

4. Opérations sur les applications linéaires.

Une combinaison linéaire ou une composée d'applications linéaires ou une bijection réciproque d'un isomorphisme est linéaire.

Calculs dans $\mathcal{L}(E) : \forall (f, g, u, v) \in \mathcal{L}(E)^4, \forall (\alpha, \beta, a, b) \in K^4, (\alpha f + \beta g) \circ (au + bv) = \alpha a(f \circ u) + \alpha b(f \circ v) + \beta a(g \circ u) + \beta b(g \circ v)$.

Itérés d'un endomorphisme : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $f^0 = id_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f^n \circ f = f \circ f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \in \mathcal{L}(E)$.

Formule du binôme de Newton et formule de factorisation : Si f et g sont deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$, alors f et g commutent

1. $\forall (n, m, p, q) \in \mathbb{N}^4, (f \circ g)^n = f^n \circ g^n = g^n \circ f^n$ et $f^m \circ g^p \circ f^n \circ g^q = f^{m+n} \circ g^{p+q} = g^{p+q} \circ f^{m+n}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, (f + g)^n = (f + g) \circ (f + g) \circ \dots \circ (f + g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{f^k g^{n-k}}_{f \circ f \circ \dots \circ f \circ g \circ \dots \circ g}$ (FBN).

3. $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} - g^{n+1} = (f - g) \circ (\sum_{k=0}^n f^k \circ g^{n-k}) = (f - g) (\sum_{k=0}^n f^k g^{n-k})$. (Formule de factorisation)

II Noyau, image et rang.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$Ker f = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \vec{0}_F\}$. Autrement dit, $\vec{x} \in Ker f \Leftrightarrow \vec{x} \in E$ et $f(\vec{x}) = \vec{0}_F$. $Ker f$ est un ss-e-v de E

$Im f = \{f(\vec{x}) / \vec{x} \in E\}$. Autrement dit, $\vec{y} \in Im f \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in E / \vec{y} = f(\vec{x})$. $Im f$ est un ss-e-v de F .

$rg(f) = dim(Im(f))$.

$rg(f) \leq \min(dim E, dim F)$.

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E alors $f(\mathcal{B}) = (f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de $Im(f)$ et $rg(f) = rg(f(\mathcal{B}))$.

Théorème du rang :

- ✓ Tout supplémentaire de $Ker(f)$ dans E est isomorphe à $Im(f)$.
- ✓ Si $dim E < +\infty$ alors $rg(f) + dim Ker(f) = dim(E)$.

Si G est un ss e v de F alors $f^{-1}(G)$, l'ensemble de tous les antécédents par f des éléments de G , est un ss e v de E

Si H est un ss e v de E alors $f(H)$, l'ensemble de toutes les images par f des éléments de H , est un ss e v de F .

Le ss e v H de E est stable par f lorsque $f(H) \subset H$ i.e. lorsque $\forall \vec{x} \in H, f(\vec{x}) \in H$ et dans ce cas, $f_H : \begin{pmatrix} H \rightarrow H \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de H appelé endomorphisme induit par f sur H .

III Application linéaire injective-surjective- bijective

- Caractérisations de l'injectivité, surjectivité et bijectivité d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- ✓ f est injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$
- ✓ f est surjective $\Leftrightarrow Im(f) = F$
- ✓ f est isomorphisme de E sur $F \Leftrightarrow Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$ et $Im(f) = F$

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ est une base de E alors

- ✓ f est injective $\Leftrightarrow (f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est une famille libre

- ✓ f est surjective $\Leftrightarrow (f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de F
- ✓ f est isomorphisme de E sur $F \Leftrightarrow (f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est une base de F .

Si E est de dimension finie alors f est injective $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim E$

Si F est de dimension finie alors f est surjective $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim F$.

Si E et F sont de dimension finie alors f isomorphisme de E sur $F \Leftrightarrow \dim E = \text{rg}(f) = \dim F$.

Si $\dim E = \dim F < +\infty$ alors f est un isomorphisme de E sur $F \Leftrightarrow f$ est injective $\Leftrightarrow f$ est surjective de E sur F .

Conséquences :

- ✓ E et F isomorphes $\Rightarrow \dim E = \dim F$.
- ✓ Si $\dim E = \dim F < +\infty$ alors E et F sont isomorphes.
- ✓ Si G est un ss e v de F et f est un isomorphisme de E sur F alors $\dim(f^{-1}(G)) = \dim G$
- ✓ Si H est un ss e v de E et f est un isomorphisme de E sur F alors $\dim f(H) = \dim H$.

Si h est un isomorphisme de G sur E et g un isomorphisme de F sur G alors $\text{rg}(f \circ h) = \text{rg}(f) = \text{rg}(g \circ f)$.

Si $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(g), \text{rg}(f))$.

IV Projections et symétries vectorielles

• Définition d'une projection et d'une symétrie vectorielle

Soit F et G deux ss-e-v de E tels que $F \oplus G = E$. $\forall x \in E, \exists! x_F \in F, \exists! x_G \in G / x = x_F + x_G$.

Alors $p(x) = x_F$ est le projeté de x sur F et parallèlement à G .

$q(x) = x_G$ est le projeté de x sur G et parallèlement à F .

$s(x) = x_F - x_G$ est le symétrique de x par rapport à F et parallèlement à G .

• Propriétés : $F = \text{Im}(p) = \text{Ker}(s - id) = \text{Ker}(q)$ et $G = \text{Ker}(p) = \text{Ker}(s + id) = \text{Im}(q)$

- ✓ p est la projection sur $\text{Im}(p)$ et parallèlement à $\text{Ker}(p)$.
- ✓ s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - id)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + id)$.
- ✓ $p \circ p = p, p + q = id_E, q \circ p = 0 = p \circ q$
- ✓ $s \circ s = id, s = 2p - id_E = p - q = id - 2q$
- ✓ $\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = E$ et $\text{Ker}(s + id) \oplus \text{Ker}(s - id) = E$
- ✓ $\text{Ker}(p - id) = \text{Im}(p), p_{\text{Im}(p)} = id_{\text{Im}(p)}$ et $p_{\text{Ker}(p)} = 0$.

• Définition d'un projecteur et d'une involution

Lorsque $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$ alors p est un projecteur.

Lorsque $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = id$ alors s est une involution.

• Deux caractérisations d'une projection vectorielle si E de dimension quelconque :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. p projection $\Leftrightarrow p \circ p = p \Leftrightarrow \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = E$ et $p_{\text{Im}(p)} = id$

• Trois caractérisations d'une symétrie vectorielle si E de dimension quelconque :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. s symétrie $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(s + id)$ projecteur $\Leftrightarrow s \circ s = id \Leftrightarrow \text{Ker}(s - id) \oplus \text{Ker}(s + id) = E$.

V Equations linéaires

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. Notons (e) : $f(x) = b$ l'équation linéaire d'inconnue $x \in E$

- ✓ Si $b \notin \text{Im}(f)$ alors (e) n'admet aucune solution.
- ✓ Si $b \in \text{Im}(f)$ alors (e) admet au moins une solution « particulière » x_0 et les solutions de (e) sont tous les éléments de E de la forme $x_0 + h$ tel que $h \in \text{Ker}(f)$ (i.e. h solution de l'équation homogène associée (eh) : $f(x) = 0$)

VII Hyperplans et formes linéaires

• Définition d'un hyperplan

Un ss-e-v H de E est un hyperplan de E lorsque H lorsqu'il existe une droite vectorielle de E supplémentaire de H dans E .

• Caractérisations d'un hyperplan

Un ss-e-v H de E est un hyperplan de E si et si $\forall a \in E \setminus H, H \oplus \text{vect}(a) = E$

si et si il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$.

• Caractérisations d'un hyperplan dans un K -e-v de dimension finie

On suppose que E est de dimension n et $B = (e_i)_{i=1..n}$ une base de E .

Un ss-e-v H de E est un hyperplan de E si et si $\dim H = \dim E - 1$

si et si il existe a_1, \dots, a_n scalaires non tous nuls tels que $H = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k e_k / \underbrace{\sum_{k=1}^n x_k a_k = 0}_{\text{équation de } H \text{ dans } B} \right\}$

Question de cours

- 1) Soit $B = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel E et $(\vec{v}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F . Il existe une unique application linéaire f de
- 2) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que $\text{Ker}(u)$ est un ss-e-v de E et u est injective si et si $\text{Ker}(u) = \{\vec{0}_E\}$.
- 3) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que $\text{Im}(u)$ est un ss-e-v de F et si (e_1, e_2, \dots, e_n) est une base de E , alors $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(u)$.
- 4) Démontrer le théorème du rang.
- 5) Soit u et v deux endomorphismes de E . Soit $\lambda \in K$ et $k \in \mathbb{N}$. Compléter et justifier :
 - a) $u \circ v = 0 \Leftrightarrow \dots$
 - b) $\text{Ker}(u^k) \dots \text{Ker}(u^{k+1})$ et $\text{Im}(u^k) \dots \text{Im}(u^{k+1})$.
 - c) $\text{Ker}(u - \lambda id) = \{\dots \dots \dots\}$ est stable par u .

Savoir clairement énoncer les formules analogues dans le cas où f et g sont des endomorphismes d'une même K -e-v E .