TD 19
Applications linéaires.

Ex 1 Sont-elles linéaires ? Si oui, trouver une base du noyau et une base de l'image.

1. f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $f(P) = P(2)P'(1)$.
2. u définie sur $C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})par$: $u(f) = f' + 2f$.
3. u définie sur $M_n(\mathbb{C})par$: $u(M) = \det(M)$.
4. $Soit\ D = diag(a,b)$ où a et b complexes fixés et u définie sur $M_2(\mathbb{C})$ par : $u(M) = DM^T$.
5. Ψ définie sur $\mathbb{R}^2 par$: $\Psi\big((x,y)\big) = (x - 3y, 2x^2 - y)$.
6. f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $f(P) = P + XP' + 1$.
7. f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $f(P) = P + P'(1)X$.
8. u définie sur $C^2(\mathbb{R},\mathbb{C})par$: $u(f) = 2f(0)f''$.
9. Ψ définie sur $\mathbb{R}^4$ par : $\Psi\big((x,y,z,t)\big) = 4y - x + t$.

Réponses : N,O,N,O,N,N,O,N,O

Ex 2 Montrer que f est linéaire et déterminer $Kerf$, Imf et rgf. f est-elle injective ? surjective ? f est-elle un automorphisme ? un isomorphisme ?

1. Soit $\varphi : C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par : $\varphi(f) = g$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x tf(t)dt$.
2. Soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u\ convergente\}\ et$ φ définie sur E par : $\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Soit φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\varphi(P) = P'(2) + 4P^{(3)}(2)$.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et φ application définie sur $M_2(\mathbb{R})$ par : $\varphi(X) = AX - XA$.
5. Soit φ application définie sur $M_n(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = tr(M)$.
6. Soit φ application définie sur $M_3(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = M - tr(M)I$.
7. Soit φ application définie sur $M_n(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = M - M^T$.

Ex 3 1.Soit E un K-e-v de dimension 3 rapporté à une base $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},)$ et $u \in \boldsymbol{L}\ (E)$ telle que :
$u(\vec{e_1}) = 4\vec{e_1} - 2\vec{e_2} - 4\vec{e_3}, u(\vec{e_2}) = -\vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}\ et\ u(\vec{e_3}) = 5\vec{e_1} - \vec{e_2} - 5\vec{e_3}$.

a. Déterminer le rang de u.
b. $Ker(u)\ et\ Im(u)$ sont ils supplémentaires dans E ?
c. $Ker(u^2)\ et\ Im(u^2)$ sont ils supplémentaires dans E ?

2. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à J la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients valent 1.
a. Montrer que $ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$.
b. Soit p la projection sur $Kerf$ et parallèlement à Imf et q la projection associée. Déterminer $p(x,y,z)\ et\ q(x,y,z)$.

Ex 4

1. Déterminer l'unique forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$telle que: $f\big((1,1,1)\big) = 0, f\big((2,0,1)\big) = 1\ et\ f\big((1,2,3)\big) = 4$.
3. Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est $vect\big((1,0,0),(1,1,1)\big)$.
4. Soit $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ dont le noyau est H ?

Ex 5 Soit u définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par : $u(P) = P + (1 - X)P'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$..
2. Montrer que $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Calculer $u^2(P)$. Montrer que $Im(u) = Im(u^2)$.
4. Déterminer $s(A + bX + cX^2 + dX^3)$ où s est la symétrie par rapport à $Im(u)$ et parallèlement à $Ker(u)$.

Ex 6 Soit u définie par :$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ u(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Déterminer une base de $Im(u)$ et une base de $Ker(u)$.
3. Soit $Q \in Im(u)$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $u(P) = Q\ et\ P(0) = P'(0) = 0$.

Ex 7 Pour tout polynôme P, $\varphi(P)(X) = (X^2 - 1)P''(X) - 2XP'(X)$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$.
2. Pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de P .
3. En déduire que φ n'est ni injective ni surjective de $\mathbb{R}[X]$sur $\mathbb{R}[X]$.
4. Justifier que φ induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_2[X]$ noté g . g est-il un automorphisme ?
5. Déterminer l'image et le noyau de g .
6. Montrer que $g - \lambda id$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, sauf pour un nombre fini de valeurs de λ que l'on précisera (comment appelle t-ton ces valeurs ?).
7. Pour ces valeurs particulières, déterminer le noyau de $g - \lambda id$.

Ex 8 Soit $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, .., \overrightarrow{e_n})$ une base de E

1. Montrer que $\varphi: E^* \to K^n$ définie par : $\varphi(f) = (f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), .., f(\overrightarrow{e_n}))$ est un isomorphisme. Qu'en déduit-on sur E^*?
2. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ $e_k{}^*$ l'application définie sur E par : $e_k^*(\vec{x}) = la\ composante\ de\ \vec{x}\ selon\ \overrightarrow{e_k}\ dans\ B$.

Montrer que $(e_1^*, e_2^*, .., e_n^*)$ est une base de E^*.

3. Ici $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On considère n réels $a_0, \dots, a_{n-1}$ et f la forme linéaire sur E définie par : $f(P) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{1+cos^2(t)} dt$.

Montrer que $\exists(\lambda_0, \lambda_1, .., \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n / \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], f(P) = \lambda_0 P(a_0) + \lambda_1 P(a_1) + .. + \lambda_{n-1} P(a_{n-1})$.

Ex 9 Soit $F\ et\ G$ deux ss-e-v $de\ E$. Soit $\varphi: F \times G \to E$ telle que : $\varphi((\vec{x}, \vec{y})) = \vec{x} + \vec{y}$. Montrer que $\varphi\ est\ linéaire$. Décrire son noyau et son image. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit injective puis surjective puis bijective.

Ex 10 Soit $f \in$L (E) . Soit $a\ et\ b$ deux scalaires distincts.

1. Montrer que : $Kerf$=$Kerf^2 \Leftrightarrow Imf \cap kerf = \{\vec{O}\}$
2. Montrer que : Imf^2= $Imf \Leftrightarrow Imf + Kerf = E$.
3. Démontrer que $Ker(f - a.id)$ et $Ker(f - b.id)$ sont stables par f et en somme directe.

Ex 11 Soit$f \in$ L (E) tel qu'il existe un entier naturel p tel que $f^{p-1} \neq O\ et\ f^p = O$.

1. Soit $\vec{x} \in E$ tel que $f^{p-1}(\vec{x}) \neq \vec{O}$. Montrer que : B =$(\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots, f^{p-1}(\vec{x}))$est libre.
2. Si E est de dimension finie n ,comparer $n\ et\ p$ .Que dire de B si $p = n$?

Ex 12 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 + 6f - 7id_E = O$

1. Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}en fonction de $f\ et\ id$.
2. Montrer que :$(f - id) \circ (f + 7id) = O$. En déduire que $Im(f - id) \subset Ker(f + 7id)$et $Im(f + 7id) \subset Ker(f - id)$.
3. Démontrer enfin que $Ker(f + 7id) \oplus Ker(f - id) = E$.
4. Montrer que $Ker(f + 7id)\ et\ Ker(f - id)$ sont stables par f . On note h et g les endomorphismes induits par f sur respectivement $Ker(f + 7id)\ et\ Ker(f - id)$. Reconnaitre g et h .
5. Soit p la projection sur $Ker(f + 7id)$ et parallèlement à $Ker(f - id)$ et q l'autre projection associée.
   a. Montrer que $f = -7p + q$.
   b. En déduire que $f^n = (-7)^n p + q$.

Ex 13 Soit f un endomorphisme d'un K-e-v E tel que $f^3 = f$. Montrer que $Ker(f)\ et\ Im(f)$ sont supplémentaires dans E.

Ex 14 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que si $F\ et\ G$ sont deux ss-e-v de E stables par f alors $F + G$ et $F \cap G$ sont stables f.
2. Montrer que si g est un endomorphisme de E tel que $f \circ g = g \circ f$ alors $Ker(g)$ et $Im(g)$ sont stables par f .

Ex 15 Soit $f \in E^*$ telle que f non nulle.

1. Montrer que f est surjective.
2. Soit $\vec{a} \in E \backslash Ker(f)$. Montrer que $Ker(f) \oplus vect(\vec{a}) = E$. Que peut-on alors dire de $Ker(f)$?

Ex 16 Soit $(u, v) \in$L $(E)^2$ telle que : $v \circ u = id_E$. Montrer que $E = Ker(v) \oplus Im(u)$.

Ex 17 Soit $\boldsymbol{u\ et\ v}$ deux endomorphismes d'un K-e-v **E de dimension finie n.**

1. Soit $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, .., \overrightarrow{e_n})$ une base de E. Montrer que : $u \neq 0 \Leftrightarrow \exists i_0 \in \{1, \dots, n\} / u(\overrightarrow{e_{i_0}}) \neq 0$.
2. Montrer que :
   - $rg(u + v) \leq rg(u) + rg(v)$.
   - $|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u - v)$.

Ex 18 Soit E de dimension finie n . Soit $(u, v) \in$L $(E)^2$.

1. On suppose ici que : $E = Im(u) + Im(v) = Ker(u) + Ker(v)$. Montrer que ces deux sommes sont directes.
2. Montrer que $Im(u) = Ker(u) \Leftrightarrow u^2 = 0\ et\ 2rg(u) = n$.
3. On suppose ici que $u^2 + 2u = 0$. Montrer que $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont supplémentaires dans E et que u induit un automorphisme sur $Im(u)$.
4. On suppose que $rg(u^2) = rg(u)$. Montrer que : $\begin{cases} Im(u^2) = Im(u) \\ Ker(u^2) = Ker(u) \\ Im(u) \oplus Ker(u) = E \end{cases}$.

Ex 19 Soit E de dimension finie n.

a. Montrer que les suites $(Im(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(Ker(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ sont stationnaires.

b. Soit p le plus petit entier tel que $Im(u^p)$ =$Im(u^{p+1})$. Montrer que $\forall k \geq p$, $Im(u^k)$ =$Im(u^p)$ et $Ker(u^k)$ =$Ker(u^p)$.

c. Montrer que $Im(u^p) \oplus Ker(u^p) = E$.

Ex 20 Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. On étudie sur des cas particuliers les solutions de l'équation
(eq) : $(f + id_E)^{2n} = id$ où $f \in L(E)$ est l'inconnue.
Déterminer les homothéties vectorielles sur E qui sont solutions de (eq)
Soit s une symétrie. Exprimer $(s + id)^{2n} - id$ fonction de s et id_E. En déduire les symétries solutions de (eq).
Déterminer les projections vectorielles de E solutions de (eq).

Ex 21 Soit E un K-e-v et u un vecteur de E et p un projecteur et s une involution dans E .

1. Résoudre l'équation $x + p(x) = u$ d'inconnue x élément de E .
2. Résoudre l'équation $x + s(x) = u$ d'inconnue x élément de E .

Ex 22 Soit p et q deux projecteurs d'un K-e-v E pas forcément associés tels que $Im(p) = Im(q)$ et $q \circ p = p \circ q$
Montrer que $p = q$.

Ex 23 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ telle que : $f(P) = \left(P(0), P'(0), .., P^{(n)}(0)\right)$. Montrer que f est un isomorphisme et préciser f^{-1}.

Ex 24 Soit f et g deux endomorphismes d'un K-e-v E tels que : $f \circ g = id_E$. Montrer que $Ker(f) = Ker(g \circ f)$ et $Im(f) = Im(g \circ f)$.

Quelques problèmes :

Ex 25 On note $\mathscr{E}$ le $\mathbb{R}$-e-v des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $f \in \mathscr{E}$, on note $U(f)$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)dt$.

1. Soit $f \in \mathscr{E}$, T-périodique. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Montrer que si f est T-périodique alors f' l'est aussi .
   b) Justifier que la réciproque est fausse.
3. Montrer que pour tout $f \in \mathscr{E}$, $U(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
4. Montrer que U: $\begin{pmatrix} \mathscr{E} \to \mathscr{E} \\ f \mapsto U(f) \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.
5. Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ .On note E_n , l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n et
$\mathscr{B}_n = (f_0, f_1, f_2, .., f_n)$ où f_k: $(t \mapsto t^k)$ est la base canonique de E_n.
   5.1 Montrer que U induit un endomorphisme sur E_n noté U_n.
   5.2 Montrer que U_n est un automorphisme de E_n.
6. Justifier que si l'élément f de $\mathscr{E}$ est dans $Ker(U)$ alors
   (i) $\int_0^1 f(t)dt = 0$.
   (ii) f est $1-périodique$.
7. A-t-on $Ker(U) = \{f \in \mathscr{E}$ $/f$ est 1 −périodique et $\int_0^1 f(t)dt = 0\}$?
8. Donner explicitement une fonction non nulle et élément de $KerU$ et en donner une représentation graphique sur $[-1,2]$.
9. L'endomorphisme U est -il surjectif ?
10. Soit a un réel non nul et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(t) = e^{at}$.
   10.1 Déterminer $F_a = U(f_a)$.
   10.2 Dresser le tableau des variations de g: $\left(x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}\right)$.
   10.3 En déduire que pour tout réel λ strictement positif, il existe une fonction f non nulle telle que $U(f) = \lambda f$.

Ex 26 Soit l'application Δ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$.

1. Montrer que si (P_n) est une suite de polynômes telle que: $\forall n, \deg(P_n) = n$ alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}$[X].
2. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Déterminer $Ker(\Delta)$ et $Im(\Delta)$.
4. Montrer qu'il existe une et une seule famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $H_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta(H_n) = H_{n-1}$ et $H_n(0) = 0$.
5. Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
6. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_p[X]$. Montrer que $P = \sum_{n=0}^{p} (\Delta^n(P))(0) H_n$.
7. Montrer que : $\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X + k)$ puis $(\Delta^n P)(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k)$.
8. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, H_n = \frac{1}{n!} X(X - 1)(X - 2)..(X - n + 1)$.

Ex27 Soit Ψ l'application qui, à une fonction f, associe sa dérivéef'.

1. Montrer que Ψ est un endomorphisme de $C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Est-ce un automorphisme de $C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Soit E L'ensemble des fonctions de la forme $\big(x \mapsto \tilde{P}(x)\cos(x) + \tilde{Q}(x)\sin(x)\big)$où $P \ et \ Q$ sont deux polynômes de $\mathbb{R}_{\mathbf{1}}[X]$.

3. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. Montrer que $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E.
   où $f_1 : (x \mapsto sin(x))$ $f_2 : (x \mapsto xsin(x))$ $f_3 : (x \mapsto \cos(x))$ et $f_4 : (x \mapsto xcos(x))$.
5. Montrer que E est stable par Ψ. On note D l'endomorphisme de E induit par Ψ. On note Id_E l'application identité sur E.
6. Déterminer $Ker(D)$. En déduire que D est un automorphisme de E .
7. Déterminer, selon les valeurs du réel λ, le rang de $D^2 - \lambda Id_E$.
8. Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de $D^2 + Id_E$.
9. En déduire que $D^4 + 2D^2 + Id_E$ est l'application nulle de E.
10. Retrouver alors que D est bijective et calculer D^{-1} en fonction de D.

On note V le sous-espace de $\mathscr{L}(E)$ engendré par Id_E et D^2.

11. Vérifier que V est stable par composition.
12. Montrer que les éléments de V bijectifs sont les éléments de la forme : $\alpha Id_E + \beta\, D^2$ tel que $\alpha \ et \ \beta$ scalaires distincts.
13. Résoudre dans **R** l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.
14. Déterminer le noyau de $\Psi^2 + Id_F$.
15. Montrer que E est le noyau de $(\Psi^2 + Id_F)^2$.
16. Conclure que E est exactement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$.

COURS :

Une application linéaire de E dans F est une application … … … … … …qui vérifie : … … … … … …………………………**ou** … … … … … … … … … … … …

. On note … … … … … l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Un endomorphisme de E est une … … … … … … … … … … … … … … …, on note ………… l'ensemble des endomorphismes de E.

Un isomorphisme de E sur F est ………………………………………… , on note ………………………………l'ensemble des isomorphismes de E.

Un automorphisme de E est …………………………………………, on note ………………………………l'ensemble des automorphismes de E.

Une forme linéaire sur E est une ……………………………… ……et on note … … …. l'ensemble des formes linéaires sur E.

Si $B=(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $F=(f_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de F alors il existe ……………………$u\in\mathcal{L}(E,F)$ telle que : ……………………………

Si $E=E_1\oplus E_2$, $u_1\in\mathcal{L}(E_1,F)$ et $u_2\in\mathcal{L}(E_2,F)$. Alors il existe ……………………$u\in\mathcal{L}(E,F)$ telle que : ……………………………

Soit $u\in L(E,F)$

$\forall(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in K^m,\forall(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_m)\in E^m$ $u(\overrightarrow{0_E})=\cdots$ … et $u(\sum_{i=1}^m\alpha_i\vec{x}_i)=\cdots$ … … … … … … … … … … … ….

$Ker(u)=\cdots$ … … … … … … ….est un ……………….et $Im(u)=\cdots$ … … … … … … … … …. est un ……………. et $rg(u)=\cdots$ … … … ….

Si $B=(e_i)_{i\in I}$ est une base de E alors $Im(u)=\cdots$ … … … …

$rg(u)\le\cdots$ … … … … … … et $rg(u\circ v)\le\cdots$ … … … … … …

$rg(u)=rg(u\circ v)=rg(w\circ u)$ dès que ………………….

Si H est un ss-e-v de E alors $f(H)=$ ………………………… est un …………… Si $u\in Isom(E,F)$ alors $\dim f(H)=\cdots$ … ..

Si G est un ss-e-v de F alors $f^{-1}(G)=$ ………………………… est un ………….. Si $u\in Isom(E,F)$ alors $\dim f^{-1}(G)=\cdots$ … ..

Soit $u\in L(E)$ et H un ss-e-v de E. H est stable par $u\Leftrightarrow$… … … … .. Alors $u_H:\begin{pmatrix}\dots.\rightarrow\cdots\dots.\\ \vec{x}\mapsto\cdots\dots\dots.\end{pmatrix}$ est l'endomorphisme de H induit par u.

Soit $u\in L(E,F)$.

u est injective $\Leftrightarrow Ker(u)=\cdots$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si\\ E\ possède\ une\ base}}$ $[(e_i)_{i\in I}$ base de $E\Rightarrow\cdots$ … … …$]$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si\\ E\ est\ de\ dim\ finie}}$ $rg(u)=\cdots$ … ..

u est surjective $\Leftrightarrow Im(u)=\cdots$ … … . $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si\\ E\ possède\ une\ base}}$ $[(e_i)_{i\in I}$ base de $E\Rightarrow\cdots$ … … …$]$. $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si\\ F\ est\ de\ dim\ finie}}$ $rg(u)=\cdots$ … ..

u est isomorphisme $\Leftrightarrow\exists v\in F(F,E)/.\ u\circ v=id_F$ et $v\circ u=id_E\Leftrightarrow\begin{cases}Ker(u)=\cdots..\\ Im(u)=\cdots..\end{cases}$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si\\ E\ possède\ une\ base}}$ $[(e_i)_{i\in I}$ base de $E\Rightarrow\cdots$ … … …$]$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si\\ E\ est\ de\ dim\ finie}}$ $\begin{cases}F\ est\ de\ \dots\dots\dots\\ rg(u)=\cdots\dots..=\cdots..\end{cases}$

E et F sont isomorphes $\Leftrightarrow\cdots$ … … … … … … … … … … … … … … . $\Rightarrow$ $\dim(E)=\cdots$ … …..

Si $\dim(E)=\dim(F)<+\infty$ et $u\in\mathcal{L}(E,F)$ alors : u est isomorphisme$\Leftrightarrow u$……………………$\Leftrightarrow u$ ………………………$\Leftrightarrow rg(u)=$………………………

Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$.

$Im(u)$ est isomorphe à ……………………….

Si E est de ……………………….alors $\dim(Ker(u))+\cdots$ … … … … … … … … . $=\cdots$ … … … … … … … ….(théorème du rang).

Si $\vec{b}\in Im(u)$ alors les vecteurs $\vec{x}$ tels que $u(\vec{x})=\vec{b}$ sont ………………………………………………………………………………………………

Si $(u,v)\in L(E,F)^2$ et $(a,b)\in K^2$alors, $(au+bv)$. ∈………………………

Si $u\in L(E,F)$ et $v\in\mathcal{L}(F,G)$ alors $v\circ u\in\cdots$ … … … … … et $[v\circ u=0\Leftrightarrow\cdots$ … … … … … … … … . $]$et $Ker(u)$ … $Ker(v\circ u)$ et $Im(v)$. . $Im(v\circ u)$

Si $(u,v)\in L(E,F)^2, w\in L(F,G)$ et $z\in L(G,E)$ et $(a,b,c)\in K^3$, $(au+bv)=\cdots$ … … … … … ….et $(au+bv)\circ cz=\cdots$ … … … … … … … ..

$L(E,F)$ est …………… $F(E,F)$

Si $u\in Isom(E,F)$ alors $u^{-1}\in\cdots$ … … … ….

Soit $(u,v)\in L(E)^2$ et $(a,b)\in K^2$.

$au+bv\in\cdots$ … … … et $v\circ u\in$ ……….. .

$u^0=\cdots$ … . . et $\forall n\in\mathbb{N}^*, u^n=\underbrace{\dots\dots\dots\dots}_{n\ fois}=\cdots$ … …..

u est nilpotent d'indice p lorsque … … … … … … … …

Si $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k$ alors $P(u)=\cdots$ … … … … …

Si $u\circ v=v\circ u$ alors $\forall n\in\mathbb{N},(u+v)^n=\cdots$ … … … … … … … et $\forall n\in\mathbb{N}^*, u^n-v^n=\cdots$ … … … … … ….

$u\in GL(E)\Leftrightarrow\begin{cases}Ker(u)=\cdots..\\ Im(u)=\cdots..\end{cases}$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si\\ E\ possède\ une\ base}}$ $[(e_i)_{i\in I}$ base de $E\Rightarrow\cdots$ … … … … … …$]\Rightarrow u^{-1}\in\cdots$ … … … ..

$u\in GL(E)$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si\\ E\ est\ de\ dim\ finie}}$ u … … … $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si\\ E\ est\ de\ dim\ finie}}$ u … . . $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si\\ E\ est\ de\ dim\ finie}}$ $rg(u)=\cdots$….