

TD 21 Séries numériques

Ex 1 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Justifier que la série de terme générale u_n est convergente et calculer sa somme.

1. $u_n = \frac{5n-4}{n^3+3n^2-n-3}, n \geq 2.$

2. $u_n = \frac{-2n^2+1}{3^n}, n \geq 0$

3. $u_n = 2^{-n} \tan(2^{-n}x), n \geq 0$ où $x \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{2} \right]$

4. $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}, n \geq 1$

5.

6. $u_n = \frac{(-2)^n}{n!}, n \geq 0$

7. $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right), n \geq 0$ où $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

8. $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right), n \geq 2$

Ex 2 Déterminer la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \frac{\sin(n)}{n^2 - \cos(n^5)}$

2. $u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$

3. $u_n = \sin(n)$

4. $u_n = \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$

5. $u_n = nx^n$ où x réel

6. $u_n = \sqrt{ch(n)} - \sqrt{sh(n)}$

7. $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(x)}{n^2 + \cos^2(x)} dx$

8. $u_n = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{1+n^3}{2+n^3}}\right)$

9. $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

10. $u_n = \frac{1}{(n+2)!} \sum_{k=1}^n k!$

11. $u_n = \operatorname{Arctan}(n+a) - \operatorname{Arctan}(n)$ où $a \in \mathbb{R}$ (utiliser l'IAF)

12. $u_n = e^{\cos(\frac{1}{n})} - e^{\cos(\frac{2}{n})}$

13. $u_n = \ln\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right)$

14. $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+1}$ (où a, b réels)

15. $u_n = \frac{1+a\sqrt{n}}{n^2}$ (où $a > 0$)

16. $u_n = \frac{1}{sh\sqrt{\ln(n)}}$

17. $u_n = \frac{1}{\ln(n)\ln(ch(n))}$

18. $u_n = n^{-\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})}$

19. $u_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln(n)}$

20. $u_n = \ln(n) e^{-\sqrt[5]{n}}$

21. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

22. $u_n = \frac{\ln^n(n)}{n^{\ln(n)}}$

23. $u_n = \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{n^a}$ où $a \in \mathbb{R}$

Ex 3 Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.

1. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \max(u_n, v_n)$ est convergente.

2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^{\frac{1}{5}} v_n^{\frac{4}{5}}$ est convergente.

Ex 4 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 t^n f(t) dt$. Montrer que la série de terme général u_n est absolument convergente.

Ex 5 En remarquant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}, n \geq 0$, converge et déterminer sa somme.

Ex 6 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, contractante de rapport K .

Soit a un réel et u la suite définie par : $u_0 = a$ et $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $\forall n, |u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$.

2. En déduire que la suite u converge en utilisant le théorème lien Série-Suite.

Ex 7 Soit a un réel. On pose $S_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}$ et $v_n = \frac{S_n}{n^a}$.

1. Trouver un équivalent simple de S_n en utilisant la méthode de comparaison série-intégrale.

2. En déduire pour quelle valeur de a , la série de terme générale v_n est convergente.

Ex 8 En utilisant la méthode de comparaison série-intégrale,

1) Déterminer, en fonction du paramètre réel α , la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\ln^\alpha(n)}{n}, n \geq 2$.

2) Déterminer la partie entière de $\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$

3) Soit $\alpha \in]1; +\infty[$. Déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}, n \geq 1$.

4) Montrer que la suite u définie par : $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$ converge. Idem avec $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$.

Ex 9 Séries alternées

a) Soit une suite réelle (u_n) telle que :

1. $\forall n, u_{n+1} \times u_n < 0$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
3. $(|u_n|)$ est décroissante.

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est alternée.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que la série de terme général u_n converge en utilisant les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) .

b) Application : Etudier la nature de la série de terme général $v_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$ en fonction du réel strictement positif α .

Ex 10 Critère 1 de d'Alembert Soit u une suite réelle et strictement positive et telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

1. Montrer que si $l \in [0, 1[$, alors $u_n = O\left(\left(\frac{l+1}{2}\right)^n\right)$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
2. Montrer que si $l \in]1, +\infty[$, alors $\left(\frac{l+1}{2}\right)^n = O(u_n)$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.
3. Application : étudier la nature de $\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{n^n}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^a b^n}{(2n)!}$ où a, b réels et $b > 0$.

Ex 11 Critère 2 de d'Alembert Soit u et v deux suites réelles et strictement positives et telle que $\forall n, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Montrer que $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$ converge

Ex 12 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge (indication : on pourra utiliser Cauchy-Schwarz pour les réels).

Ex 13 Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{k^2}$. Montrer que $\forall n \geq 1, S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{8}$.

En déduire la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Ex 14

1. Montrer que : $\forall x \geq 0, \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n+x}}$ converge. On pose $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+x}}$.
2. Montrer que : $\forall x \geq 0, f(2x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{1+2^x}$.
3. Montrer que f est monotone.
4. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ et déterminer cette limite.
5. Montrer que f est lipschitzienne.
6. Montrer que f est continue.

Ex 15 On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2n+2)}, v_n = \frac{3}{n^2} u_n$ et $t_n = \ln \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right)$.

1. Simplifier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et montrer que $\sum t_n$ converge.
2. En déduire que $\sum u_n$ converge
3. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (2n-1)u_{n-1} - (2n+1)u_n = u_n$ puis calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Ex 16 Soit (a_n) une suite réelle et positive et (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n, u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n} \end{cases}$

1. Montrer que (u_n) est bien définie et monotone.
2. Montrer que : la suite (u_n) est convergente si et si la série de terme général a_n converge.