Espaces préhilbertiens réels

I Espace préhilbertien réel . Produit scalaire

1 Déf du produit scalaire Soit E un $\mathbb{R}$ −espace-vectoriel .
On appelle **produit scalaire** sur E toute application φ définie sur $E \times E(= E^2)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

1. $\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \in E^3, \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \varphi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\vec{z}) = \alpha\varphi(\vec{x},\vec{z}) + \beta\varphi(\vec{y},\vec{z})$ i.e. φ est linéaire par rapport a la 1ère variable

2. $\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \in E^3, \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \varphi(\vec{z},\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \alpha\varphi(\vec{z},\vec{x}) + \beta\varphi(\vec{z},\vec{y})$ i.e.φ est linéaire par rapport a la 2ndevariable

φ est bilinéaire

3. $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \varphi(\vec{x},\vec{y}) = \varphi(\vec{y},\vec{x})$ **φ est symétrique**

4. .$\forall\vec{x} \in E, \varphi(\vec{x},\vec{x}) \geq 0$

5..$\forall\vec{x} \in E, \varphi(\vec{x},\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

φ est définie- positive

E , muni d'un produit scalaire, est appelé un **espace préhilbertien réel** .

2 notation : φ est notée $(\,.\,/\,.\,)$ ou $\langle\,.\,/\,.\,\rangle$ et $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ est noté : $(\vec{x}/\vec{y})$ ou $\langle\vec{x}/\vec{y}\rangle$.

3 Rque : Si les propriétés 1 et 3 sont vérifiées alors nécessairement , la propriété 2 est vérifiée . Donc en pratique, pour prouver que φ est un $p.s. sur\ E$, il suffit de montrer que φ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés $1, 3, 4$ et 5 .

4 Règles de calcul :
- $\forall\vec{x} \in E \quad ,(\vec{x}/\vec{0}) = 0 = (\vec{0}/\vec{x})$
- $\forall(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},..,\overrightarrow{x_p}) \in E^p, \forall(\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_p) \in \mathbb{R}^p, \left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\overrightarrow{x_k}\,/\vec{y}\right) = \sum_{k=1}^{p}\alpha_k\,(\overrightarrow{x_k}/\vec{y}) = \left(\vec{y}/\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\overrightarrow{x_k}\right)$

5 Exemples à connaitre et savoir redémontrer :

1) sur $\mathbb{R}^n$:l'application $\left(((x_1,..,x_n),(y_1,..,y_n)) \mapsto \sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé **produit scalaire canonique**.

Cas particuliers :

Sur $\mathbb{R}$: le produit est un produit scalaire sur $\mathbb{R}$

Sur $\mathbb{R}^2$: l'application $\left(((x,y),(a,b)) \mapsto xa + yb\right)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$

Sur $\mathbb{R}^3$: l'application $\left(((x,y,z),(a,b,c)) \mapsto xa + yb + zc\right)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$

2) Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Sur $C°([a,b],\mathbb{R})$: si ω est une application strictement positive et continue sur $[a,b]$ alors l'application $\left((f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\omega(t)dt\right)$ est un produit scalaire sur $C°([a,b],\mathbb{R})$.

3) Sur $\mathbb{R}[X]$: l'application $\left((P,Q) \mapsto \int_a^b \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)dt\right)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

4) $Si\ P = \sum_{k=0}^{n}a_kX^k\ et\ Q = \sum_{k=0}^{n}b_kX^k\ et\ (P/Q) = \sum_{k=0}^{n}a_kb_k$.L'application : $((P,Q) \mapsto (P/Q))$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}_n[X]$.

5) Si $a_0\,,a_1\,,..,a_n$ sont $n+1$ réels distincts alors l'application : $\left((P,Q) \mapsto \sum_{i=0}^{n}P(a_i)Q(a_i)\right)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

6) $((M/N) = tr(M^TN))$ définit le produit scalaire canonique sur $M_n(\mathbb{R})$

6 Proposition Soit E un $\mathbb{R}$ e v muni du produit scalaire $(\,.\,/\,.\,)$.

$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, (\vec{x}/\vec{y})^2 \leq (\vec{x}/\vec{x})(\vec{y}/\vec{y})$ **i.e.** $|(\vec{x}/\vec{y})| \leq \sqrt{(\vec{x}/\vec{x})}\sqrt{(\vec{y}/\vec{y})}$ appelée **Inégalité de Cauchy -Schwarz**

De plus , $|(\vec{x}/\vec{y})| = \sqrt{(\vec{x}/\vec{x})}\sqrt{(\vec{y}/\vec{y})} \Leftrightarrow \vec{x}\ et\ \vec{y}\ sont\ colinéaires$.

7 On retrouve les inégalités de Cauchy-Schwarz prouvées dans d'autres chapitres :

1) Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire : $\langle(x_1,..,x_n)/(y_1,..,y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i$: pour tous n-uplets $(x_1,x_2,\dots,x_n)\ et\ (y_1,y_2,\dots,y_n)$, $\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2\right)$

2) On munit $C°([a,b],\mathbb{R})$ du $ps.$ $(f/g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors :

Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ dans $C°([a,b],\mathbb{R})$ du $ps.$ $(f/g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$

pour toutes fonctions f et g continues sur $[a,b]$ et à valeurs réelles , $\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b(f(t))^2dt\right)\ \left(\int_a^b(g(t))^2dt\right)$.

3) Pour toutes matrices (a_{ij}) et (b_{ij}) de $M_n(\mathbb{R})$, $\left|\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{ij}b_{ij}\right| \leq \sqrt{\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} {a_{ij}}^2}\sqrt{\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} {b_{ij}}^2}$

8Déf d'une norme Soit E un $\mathbb{R}$ e v .
On appelle **norme** sur E toute application N définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que :
1 . $\forall \vec{x} \in E, N((\vec{x}) \geq 0$
2. $\forall \vec{x} \in E, (N(\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = 0)$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{x} \in E, N(\alpha \vec{x}) = |\alpha| N(\vec{x})$
4. $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, N(\vec{x} + \vec{y}) \leq N(\vec{x}) + N(\vec{y})$ (**inégalité triangulaire**)

9Notation et définition : N est souvent noté $\| \quad \|$ et $N(\vec{x})$ est noté $\|\vec{x}\|$.
Alors l'application d, définie sur $E \times E$ par : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ est la **distance associée à la norme** $\| \quad \|$ et $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, d(\vec{x}, \vec{y})$ est la **distance** entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

10Théorème norme euclidienne Soit E un $\mathbb{R}$ e v muni du produit scalaire (**.** / **.**).
L'application $\| \quad \|$ définie sur E par : $\forall \vec{x} \in E, \|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}/\vec{x})}$ est une norme sur E appelée **norme euclidienne** associée au produit scalaire (**.** / **.**) .
L'inégalité triangulaire et celle de Cauchy-Schwarz s'écrivent alors $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \|\vec{x} + \vec{y}\| \overset{I.T.}{\lesssim} \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ et $|(\vec{x}/\vec{y})| \overset{C.S.}{\lesssim} \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|$.

11Exemples
1) Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique , la norme euclidienne canonique est $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n {x_i}^2}$,
2) Dans C°([a,b],$\mathbb{R}$) muni du ps: $(f/g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$, la norme euclidienne associée est $\|f\| = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt}$.
3) Dans $\mathbb{R}_n[X]$ du ps: $(P/Q) = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$ où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont $n+1$ réels fixés distincts alors $\|P\| = \sqrt{\sum_{i=0}^n P(a_i)^2}$.
4) Dans $M_n(\mathbb{R})$ muni du ps : $(M/N) = tr(M^T N)$, $\forall M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}), \|M\| = \sqrt{tr(M^T M)} = \sqrt{\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} {m_{ij}}^2}$.

12Désormais , E **un** $\mathbb{R}$ **e v muni du produit scalaire** (**./.**) **de norme associée** $\|\ldots\|$.

13Def d'un vecteur unitaire: On dit que le vecteur $\vec{u}$ de E est **unitaire** ou **normé** lorsque $\|\vec{u}\| = 1$.

14Remarque : Tout vecteur $\vec{x}$ non nul de E est colinéaire à un vecteur unitaire car $\vec{x} = \|\vec{x}\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$.

15Propriétés : Des relations entre norme et produit scalaire. $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$,
$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2(\vec{x}/\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2$ et $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - 2(\vec{x}/\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2$
$(\vec{x} + \vec{y}/\vec{x} - \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2$
$(\vec{x}/\vec{y}) = \frac{1}{4}\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$ **identité de polarisation**.

II Orthogonalité

16Dans tout ce paragraphe , E **est un** $\mathbb{R}$ **e v muni du produit scalaire (. / .) de norme associée** $\|.\|$ **.**

1. Orthogonalité-Orthogonal d'une partie.

17Déf de vecteurs et espaces orthogonaux .
1) Deux **vecteurs** $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$ de E sont dits **orthogonaux** lorsque $(\vec{x}/\vec{y}) = 0$. On note $\vec{x} \perp \vec{y}$.
2) Deux **ss e v** F et G de E sont dits **orthogonaux** lorsque $\forall \vec{x} \in F, \forall \vec{y} \in G, (\vec{x}/\vec{y}) = 0$ On note $F \perp G$.
3) Un vecteur $\vec{y}$ est orthogonal à un ss-e-v F lorsque $\forall \vec{x} \in F, (\vec{x}/\vec{y}) = 0$. On note $\vec{y} \perp F$.

18Déf de l'orthogonal d'une partie :
Soit X une partie de E. **L'orthogonal de** X est l'ensemble noté $X^\perp$ des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de X .

$$X^\perp = \{\vec{u} \in E \ / \forall \vec{x} \in X, (\vec{u}/\vec{x}) = 0\}.$$

ie . $\vec{u} \in X^\perp$ <u>si et ssi</u> $\forall \vec{x} \in X, (\vec{u}/\vec{x}) = 0$ <u>si et ssi</u> $\vec{u} \perp X$.

19Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique alors $P = \{(x,y,z)/x + 2y - 3z = 0\} = \{(1,2,-3)\}^\perp$.

20Théorème Soit X une partie de E . Alors $X^\perp$ est un sous espace vectoriel de E et $X^\perp = (vect(X))^\perp$.

21 Propriétés 1) Si X et Y sont deux sous-ensembles de E tels que $X \subset Y$ alors $Y^{\perp} \subset X^{\perp}$.
2) Si les ss-e-v F et G de E sont orthogonaux alors $F \cap G = \{\vec{O}\}$ (i.e. F et G sont en somme directe).
3) Soit F et G sont deux ss e v de E. Alors $G \perp F \Leftrightarrow G$ *est un ss e v de* $F^{\perp}$.

22 Caractérisation Soit $(\vec{e_i})_{i\in\{1,..,p\}}$ une famille génératrice d' un ss- e-v F de E.
Soit $\vec{u}$ un vecteur de E et X une partie de E.
1. $\vec{u} \perp F \Leftrightarrow \vec{u} \in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall i \in \{1,..,p\}, (\vec{u}/\vec{e_i}) = 0$.
Autrement dit, $F^{\perp} = \{\vec{u} \in E / \forall i \in \{1,..,p\}, (\vec{u}/\vec{e_i}) = 0\}$.
2. $X \perp F \Leftrightarrow X \subset F^{\perp} \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in X, \forall i \in \{1,..,p\}, (\vec{x}/\vec{e_i}) = 0$.
3. Si G est le ss-e-v engendré par $(\vec{g_k})_{k=1..q}$ alors $G \perp F \Leftrightarrow \forall k \in \{1,..,q\}, \forall \ell \in \{1,..,p\}, \vec{g_k} \perp \vec{e_\ell}$.

NB : , pour être orthogonal à un ss-e-v , il faut et il suffit d'être orthogonal à tous les vecteurs générateurs de ce ss-e-v.

2. Famille orthogonale, famille orthonormale

23 Déf d'une famille orthogonale , orthonormale Soit $B = (\vec{e_i})_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
- B est une **famille orthogonale** lorsque les vecteurs de B sont deux à deux orthogonaux.
  $ie. \forall (k,m) \in I^2, (m \neq k \Rightarrow (\vec{e_m}/\vec{e_k}) = 0)$
- B est dite **base orthogonale** de E lorsque B est une base de E et B est orthogonale.
- B est dite **orthonormale** (ou ***orthonormée***)lorsque B est orthogonale et les vecteurs de B sont unitaires i.e. lorsque :
  $\forall (k,m) \in I^2, (\vec{e_m}/\vec{e_k}) = \delta_{mk}$ (*symbole de Kronecker*)
- B est dite **base orthonormée** $(\boldsymbol{B.O.N})$ de E lorsque B est une base de E et B est orthonormale.

24 Remarques
- Une famille orthonormale ne contient jamais le vecteur nul
- Si $B = (\vec{e_i})_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E ,orthogonale , alors $\forall (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I, B' = (\alpha_i \vec{e_i})_{i\in I}$ est une famille orthogonale.

25 Propriété: Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre .

26 Théorème La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une BON pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

27 Autres bases ortho(…) à connaitre et savoir redémontrer
2) $(E_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ est une BON de $M_n(\mathbb{R})$ muni de son p.s. canonique.
3) $(X^k)_{k=0..n}$ *est* une BON de $\mathbb{R}_n[X]$ de son produit scalaire canonique .
4) Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $(n+1)$ réels distincts . On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P/Q) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$ et on définit les polynômes : $L_k(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{X-a_j}{a_k-a_j}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$. Alors $(L_k)_{k=0..n}$ est une BON de $\mathbb{R}_n[X]$.
5) On munit $C°([0,\pi],\mathbb{R})$ du produit scalaire $\left((f,g) \mapsto \int_0^{\pi} f(t)g(t)dt\right)$ et on définit $f_k: (t \to \cos(kt))$. Alors $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale donc libre.

28 Théorème de Pythagore : Les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$, de E, sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

29 Généralisation (de ⇒): Si $B = (\vec{e_i})_{i\in\{1,..,n\}}$ est une famille orthogonale de vecteurs de E alors $\forall (\alpha_i)_{i\in\{1,..,n\}} \in \mathbb{R}^n$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e_i}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \|\vec{e_i}\|^2$$

30 Théorème d'orthonormalisation de Gramm - Schmidt : Construction d'une famille orthonormée de E à partir d'une famille libre. Soit $V = (\vec{v_i})_{i\in\{1,...,n\}}$ une famille libre de vecteurs de E.
Alors, il existe une famille orthonormée $B = (\vec{e_i})_{i\in\{1,...,n\}}$ de E telle que : $\forall i \in \{1,..,n\}, \vec{e_i} \in vect(\vec{v_1}, \vec{v_2}, .., \vec{v_i})$.

III Espaces euclidiens

1. Définition

31 Déf : E est un **espace euclidien** lorsque E est un espace préhilbertien réel de dimension finie (i.e. un $\mathbb{R}$ e v de dimension finie muni d'un produit scalaire) .

Dans ce paragraphe, E est un espace euclidien de dimension n et dont le produit scalaire est noté (. / .) et la norme associée $\|.\|$.

32NB : Si F est un ss e v de E alors en restreignant le produit scalaire à $F \times F$, je munis F d'une structure d'espace vectoriel euclidien appelée structure induite par celle de E . F est alors un espace euclidien.

2. Existence d'une BON

33Théorème Tout espace vectoriel euclidien de dimension non nulle possède une BON .

34Exercice : Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire : $(P/Q) = \int_0^1 \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)dt$.

35Théorème de la base incomplète : Toute famille orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E peut être complétée pour obtenir un BON de E.

3. Ecriture dans une BON

36Proposition : Ecriture dans une BON .

Soit $B = (\vec{e_i})_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une BON de l'espace euclidien E . Soit $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$ deux vecteurs de E .

Si $(x_1, x_2, .., x_n)$ *et* $(y_1, y_2, .., y_n)$ sont les composantes de respectivement $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans la base orthonormée $B = (\vec{e_i})_{i\in\{1,,n\}}$ alors

$$\forall i \in [\![1,n]\!], x_i = (\vec{x}/\vec{e_i}) , \qquad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \qquad et \qquad (\vec{x}/\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Autrement dit :

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{x}/\vec{e_k})\vec{e_k} \quad et \quad \|\vec{x}\| = \sum_{k=1}^{n} (\vec{x}/\vec{e}_k)^2 \quad et \quad (\vec{x}/\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} (\vec{x}/\vec{e_k})(\vec{y}/\vec{e_k})$$

Matriciellement : $mat_B\vec{x} = X = \begin{pmatrix} (\vec{x}/\vec{e_1}) \\ (\vec{x}/\vec{e_2}) \\ \vdots \\ (\vec{x}/\vec{e_n}) \end{pmatrix}$, $mat_B\vec{y} = Y = \begin{pmatrix} (\vec{y}/\vec{e_1}) \\ (\vec{y}/\vec{e_2}) \\ \vdots \\ (\vec{y}/\vec{e_n}) \end{pmatrix}$, $(\vec{x}/\vec{y}) = X^TY = Y^TX$ et $\|\vec{x}\|^2 = X^TX$.

37NB : Calculer le produit scalaire de deux vecteurs revient à effectuer le produit scalaire canonique de leurs n-uplets de composantes dans une BON . Calculer la norme d'un vecteur revient à calculer la norme euclidienne canonique de son n-uplet de composantes dans une BON . $\boxed{(\vec{x}/\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle (x_1, .., x_n)/(y_1, .., y_n) \rangle , \ \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} = \|(x_1, .., x_n)\|}$

38Exercice : Soit $a_0 , a_1 , .. , a_n$ des réels distincts et $\forall k \in [\![0,n]\!], L_k(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{X-a_j}{a_k-a_j}$. Montrer que $\forall P$ de $\mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_k$.

IV Supplémentaire orthogonal d'un ss-e-v de dimension finie et projection orthogonale sur un ss-e-v de dimension finie .

Dans ce paragraphe, $(E, (.\ /.))$ un espace préhilbertien réel de norme associée $\|.\|$.

F désigne un sous-e-v de E tel que F est de dimension finie. F est donc un e-v euclidien et possède donc une $B.O.N$.

1. Supplémentaire orthogonal d'un ss-e-v F de E *tel que* F *est dimension finie*

39Propriété Si F est un ss e v de l'espace préhilbertien réel E et F est de dimension finie alors

1. $E = F \oplus F^{\perp}$ i.e. $F.^{\perp}$ est un supplémentaire de F dans E
2. $F^{\perp}$est le seul supplémentaire de F dans E qui soit orthogonal à F. *on note* $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$
3. $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

40Définition: $F^{\perp}$est appelé **le supplémentaire orthogonal** de F dans E

41Conséquence : si E est de dimension finie alors $dimF + dimF^{\perp} = dimE$.

2. Projection orthogonale sur un ss-e-v de dimension finie.

42Définition : Soit E un espace préhilbertien réel et F un ss-e-v de E tel que $dimF < +\infty$.
La **projection orthogonale** sur F est la projection sur F et parallèlement à $F^{\perp}$ et est notée p_F .
Soit $\vec{x} \in E. p_F(\vec{x})$ est le **projeté orthogonal** de $\vec{x}$ sur F et $p_{F^{\perp}}(\vec{x}) = \vec{x} - p_F(\vec{x})$ est le **projeté orthogonal** de $\vec{x}$ sur $F^{\perp}$.

43Conséquence : On sait que : $Imp_F = F$ et $Kerp_F = F^{\perp}$ donc Imp_F et $Kerp_F$ sont orthogonaux.

44Caractérisation d'une projection orthogonale. Soit E un espace vectoriel euclidien et p une application de E $vers$ E.
p est un projecteur orthogonal sur E <u>si et ssi</u> $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$ et $Im(p) \perp Ker(p)$.

45Exercice : $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Soient $M = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 10 & 2 \\ -3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$ et p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M . Montrer que p est une projection orthogonale , en donner ses éléments caractéristiques. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

3. Projeté orthogonal sur un ss-e-v de dimension finie

46Caractérisations du projeté orthogonal Soit E un espace préhilbertien réel et F un ss-e-v de E tel que $dimF < +\infty$
Soit $\vec{x}$ un vecteur de E

1. $p_F(\vec{x})$ et $p_{F^\perp}(\vec{x})$ sont les uniques vecteurs de respectivement F et $F^\perp$ vérifiant $\vec{x} = p_F(\vec{x}) + p_{F^\perp}(\vec{x})$.
2. $p_F(\vec{x})$ est l'unique vecteur de E tel que : $p_F(\vec{x}) \in F$ et $\vec{x} - p_F(\vec{x}) \perp F$.
3. Si $(\overrightarrow{u_k})_{k\in\{1,..,p\}}$ est une base de F alors $p_F(\vec{x})$ est l'unique vecteur de E tel que : $\begin{cases} p_F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{u_k} \\ \text{et } \forall l \in [\![1,p]\!], (\vec{x} - p_F(\vec{x})/\overrightarrow{u_l}) = 0 \end{cases}$
4. Si $(\overrightarrow{e_\iota})_{i\in\{1,..,p\}}$ est une base orthonormée de F alors $\forall \vec{x} \in E,\ p_F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{p} (\vec{x}/\overrightarrow{e_k})\overrightarrow{e_k}$.

47Exercice : Déterminer le projeté orthogonal de $3X^2 + 2X - 1$ sur $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P'(0) = 2P(0)\}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du p.s. $(P/Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

48Prop : Soit $\vec{x} \in E$.

1. $\|\vec{x}\|^2 = \|p_F(\vec{x})\|^2 + \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|^2$ et $\|\vec{x}\| \geq \|p_F(\vec{x})\|$
2. $\forall \vec{f} \in F, \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| \leq \|\vec{x} - \vec{f}\|$.

49Conséquence: $\forall \vec{x} \in E,\ \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| = \min\{\|\vec{x} - \vec{f}\| / \vec{f} \in F\}$; autrement dit, $\|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$ est la plus courte distance entre $\vec{x}$ et n'importe quel vecteur de F .

50Définition : pour tout $\vec{x} \in E,\ \min\{\|\vec{x} - \vec{f}\| / \vec{f} \in F\}$ est la distance entre $\vec{x}$ et F notée $d(\vec{x}, F)$.
Cette distance est atteinte en un et un seul vecteur $p_F(\vec{x})$. Autrement dit, pour tout $\vec{x} \in E, p_F(\vec{x})$ est l'unique vecteur de F vérifiant: $\forall \vec{x} \in E, d(\vec{x}, F) = d(\vec{x}, p_F(\vec{x})) = \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| = \|p_{F^\perp}(\vec{x})\|$.

51Exercice : Calculons $inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sint - at - b)^2 dt$

52Proposition : projection orthogonale sur une droite, distance à une droite :
Soit D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}$ de E. Soit $\vec{x} \in E$. Alors, $p_D(\vec{x}) = \frac{(\vec{x}/\vec{u})}{(\vec{u}/\vec{u})}\vec{u}$ et $d(\vec{x}, D) = \left\| \vec{x} - \frac{(\vec{x}/\vec{u})}{(\vec{u}/\vec{u})}\vec{u} \right\|$

IV Hyperplan d'un espace euclidien.

Dans ce paragraphe, E est de dimension finie i.e. E est un espace euclidien.

53Proposition-Définition: projection orthogonale sur une hyperplan, distance à un hyperplan quand E est de dimension finie
Soit H un hyperplan de l'espace euclidien E.

1. $H^\perp$ est une droite vectorielle. Tout vecteur directeur (donc non nul) de cette droite $H^\perp$ est appelé un vecteur normal à H.
2. Pour tout vecteur $\vec{n}$ normal à H, $d(\vec{x}, D) = \frac{|(\vec{x}/\vec{n})|}{\|\vec{n}\|}$

54Equation d'un hyperplan dans une base orthonormée : Soit $B = (\overrightarrow{e_\iota})_{i\in\{1,...,n\}}$ une BON de E. Soit H un hyperplan de E de vecteur normal $\vec{n} = \sum_{i=1}^{n} n_i \overrightarrow{e_\iota}$. Alors , $H = \{\vec{x} \in E / \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_\iota}$ et $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i n_i = 0}_{équation\ de\ H\ dans\ B}$ $\}$ et $d(\vec{x}, D) \underset{où\ \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_\iota}}{=} \frac{|\sum_{i=1}^{n} x_i n_i|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {n_i}^2}}$.