DL 13

PROBLEME Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de **dimension 3** .

PARTIE I

1. Soit $(A, B, C) \in M_3(\mathbb{R})^3$. Montrer que :

a. A est semblable à A .
b. Si A est semblable à B alors B est semblable à A.
c. Si A est semblable à B et B semblable à C alors A est semblable à C.
d. Si A est semblable à B alors $detA = detB$, $trA = trB$ et $rgA = rgB$.
e. A est semblable à B si et ssi A et B sont deux matrices d'un même endomorphisme.

PARTIE II

2. Soit u un endomorphisme de E et soient i et j deux entiers naturels.
On considère l'application w de $Ker\ (u^{i+j})$ vers E définie par : $w(x) = u^j\ (x)$.

a. Montrer que $Im(w) \subset Ker\ (u^i)$.
b. En déduire que $dim(Ker\ u^{i+j}) \leq dim(Ker\ (u^i)\ ) + dim(Ker\ (u^j)\ )$.

3. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $rg(u) = 2$

a. Montrer que $dim(Ker\ u^2) = 2$ (on pourra utiliser deux fois la question 2b.)
b. Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$ et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.
c. Ecrire la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $rg(u) = 1$

a. Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$
b. Justifier l'existence d'un vecteur c de $Ker\ (u\ )$tel que $(u(b), c)$ soit libre puis montrer que la famille $(\ b, u(b)\ , c)$ est une base de E.
c. Ecrire la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

PARTIE III

Soit désormais une matrice A de $M_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On se propose de montrer que A est semblable à son inverse A^{-1} .

On pose $N=\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on considère $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I + N$

5. Expliquer pourquoi la matrice A^{-1} existe.
6. Calculer N^3et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I - N + N^2$.
7. Quel est le rang de N ?
8. On suppose dans cette question que $N = 0$ ie. $rgN = 0$. Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
9. On suppose dans cette question que $g(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

a. Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$et en déduire une matrice simple semblable à M . (on pourra introduire l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base fixée de *est N*).
b. Calculer M^3 et $rg(M)$.
c. Montrer que les matrices N et M sont semblables.
d. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

10. On suppose dans cette question que $rg(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

11. **Exemple** : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A .

a. Déterminer tous les réels λ tels que l'équation $u(X) = \lambda X$ admette une solution X non nulle. Trouver alors une base $Ker(u - \lambda id)$.
b. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c. Conclure que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

12. Toute matrice de $M_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est – elle semblable à une matrice du type T?