

# Corrigé du DL 13

**PROBLEME** Dans tout le problème,  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de **dimension 3**.

Pour  $u$  endomorphisme de  $E$  et  $n$  entier naturel non nul, on note  $u^n = u \circ u \circ \dots \circ u = u^{n-1} \circ u$  ( $n$  fois).

On note  $M_3(\mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3,  $GL_3(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices inversibles de  $M_3(\mathbb{R})$  et  $I$  la matrice unité de  $M_3(\mathbb{R})$ .

**Définition:** Pour deux matrices  $A$  et  $B$  de  $M_3(\mathbb{R})$ , on dit que la matrice  $A$  est semblable à la matrice  $B$  lorsqu'il existe une matrice  $P$  de  $GL_3(\mathbb{R})$  telle que :  $A = P^{-1}BP$ .

## PARTIE I

1. Soit  $(A, B, C) \in M_3(\mathbb{R})^3$ .

Montrer que :

a.  $A$  est semblable à  $A$ .

$A = IAI = I^{-1}AI$ . Donc,  $A$  est semblable à  $A$ .

b. Si  $A$  est semblable à  $B$  alors  $B$  est semblable à  $A$ .

Je suppose que  $A$  est semblable à  $B$  alors il existe une matrice  $P$  inversible telle que :  $A = P^{-1}BP$

Alors,  $PAP^{-1} = P(P^{-1}BP)P^{-1} = (PP^{-1})B(P^{-1}P) = IB = B$ . Donc,  $B$  est semblable à  $A$ .

c. Si  $A$  est semblable à  $B$  et  $B$  semblable à  $C$  alors  $A$  est semblable à  $C$ .

Je suppose que  $A$  est semblable à  $B$  et  $B$  est semblable à  $C$  alors il existe deux matrices  $P$  et  $Q$  inversibles telles que :

$A = P^{-1}BP$  et  $B = Q^{-1}CQ$ . Donc,  $A = P^{-1}Q^{-1}CQP \stackrel{\text{puisque } P \text{ et } Q \text{ inversibles}}{=} (QP)^{-1}C(QP) = H^{-1}CH$  avec  $H = QP$  inversible.

$\stackrel{\text{puisque } P \text{ et } Q \text{ inversibles}}{=} (QP)^{-1}C(QP)$   
 $\stackrel{\text{PQ inversible et}}{=} (QP)^{-1}C(QP)$   
 $\stackrel{\text{PQ inversible et}}{=} (QP)^{-1}C(QP)$   
 $\stackrel{\text{PQ inversible et}}{=} (QP)^{-1}C(QP)$

Donc  $A$  est semblable à  $C$ .

**NB :** on a prouvé dans ces questions a, b et c que « être semblable à » est une relation d'équivalence dans  $M_3(\mathbb{R})$ .

d. Si  $A$  est semblable à  $B$  alors  $\det A = \det B$ ,  $\text{tr} A = \text{tr} B$  et  $\text{rg} A = \text{rg} B$ .

Je suppose que  $A$  est semblable à  $B$  alors il existe une matrice  $P$  inversible telle que :  $A = P^{-1}BP$ . Alors

1.  $\det(A) = \det(P^{-1}BP) \stackrel{\text{car } \det(MN) = \det(M)\det(N)}{=} \det(P^{-1}) \det(B) \det(P) = \frac{1}{\det(P)} \det(B) \det(P) = \det(B)$ .

2.  $\text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1}BP) \stackrel{\text{car } \text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)}{=} \text{tr}(BPP^{-1}) = \text{tr}(B)$ .

3.  $\text{rg}(A) = \text{rg}(P^{-1}BP) \stackrel{\text{car}}{=} \text{rg}(PP^{-1}BP) = \text{rg}(BP) \stackrel{\text{car}}{=} \text{rg}(BPP^{-1}) = \text{rg}(B)$ .

$\stackrel{\text{car}}{=} \text{rg}(PP^{-1}BP) = \text{rg}(BP)$   
 $\stackrel{\text{car}}{=} \text{rg}(PP^{-1}BP) = \text{rg}(BP)$   
*multiplier une matrice à gauche par une matrice inversible revient à faire une succession finie d'opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice et ne change donc pas son rang.*

$\stackrel{\text{car}}{=} \text{rg}(BPP^{-1}) = \text{rg}(B)$   
 $\stackrel{\text{car}}{=} \text{rg}(BPP^{-1}) = \text{rg}(B)$   
*multiplier une matrice à droite par une matrice inversible revient à faire une succession finie d'opérations élémentaires sur les colonnes de cette matrice et ne change pas son rang.*

e.  $A$  est semblable à  $B$  si et ssi  $A$  et  $B$  sont deux matrices d'un même endomorphisme.

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_3(\mathbb{R})$ . Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont  $A$  est la matrice dans la base canonique  $C$  de  $\mathbb{R}^3$ .

$A$  est semblable à  $B$

$\iff B$  est semblable à  $A$

$\iff$  il existe  $P$  inversible telle que :  $B = P^{-1}AP$

$\iff$  il existe une base  $C'$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que :  $B = (\text{mat}_{C'}C)^{-1}A(\text{mat}_{C'}C)$

$\iff$  il existe une base  $C'$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que :  $B =$

$(\text{mat}_{C'}C)(\text{mat}_{C'}u)(\text{mat}_{C'}C')$

$\iff$  il existe une base  $C'$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que :  $B = \text{mat}_{C'}u$ .

$\iff A$  et  $B$  sont deux matrices, dans deux bases de  $\mathbb{R}^3$ , d'un même endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

$\implies$  En introduisant  $C'$  la famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  définie matriciellement par  $P = \text{mat}_{C'}C$ .  $P$  inversible donc  $C'$  base de  $E$ .

## PARTIE II

2. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  et soient  $i$  et  $j$  deux entiers naturels.

On considère l'application  $w$  de  $\text{Ker}(u^{i+j})$  vers  $E$  définie par :  $w(x) = u^j(x)$ .

a. Montrer que  $\text{Im}(w) \subset \text{Ker}(u^i)$ .

Soit  $y \in \text{Im}(w)$ . Alors il existe  $x \in \text{Ker}(u^{i+j})$  tel que  $y = w(x) = u^j(x)$ .

Alors,  $u^i(y) = u^i(u^j(x)) = u^{i+j}(x) \underset{\substack{\text{car} \\ x \in \text{Ker}(u^{i+j})}}{=} 0$ . J'en déduis que  $y \in \text{Ker}(u^i)$ . Ainsi,  $\text{Im}(w) \subset \text{Ker}(u^i)$ .

b. En déduire que  $\dim(\text{Ker } u^{i+j}) \leq \dim(\text{Ker}(u^i)) + \dim(\text{Ker}(u^j))$ .

Le théorème du rang assure que  $\dim(\text{Im}(w)) + \dim(\text{Ker}(w)) \stackrel{**}{=} \dim(\text{Ker}(u^{i+j}))$ .

Or,  $\text{Im}(w) \subset \text{Ker}(u^i)$  donc,  $\dim(\text{Im}(w)) \leq \dim(\text{Ker}(u^i))$ .

De plus,  $x \in \text{Ker}(w) \Rightarrow w(x) = 0 \Rightarrow u^j(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(u^j)$ ; donc,  $\text{Ker}(w) \subset \text{Ker}(u^j)$ . Et par conséquent,  $\dim(\text{Ker}(w)) \leq \dim(\text{Ker}(u^j))$ . Il s'en suit, en utilisant \*\*, que  $\dim(\text{Ker}(u^{i+j})) \leq \dim(\text{Ker}(u^i)) + \dim(\text{Ker}(u^j))$ .

3. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant :  $u^3 = 0$  et  $\text{rg}(u) = 2$

a. Montrer que  $\dim(\text{Ker } u^2) = 2$  (on pourra utiliser deux fois la question 2b.)

Tout d'abord, le théorème du rang assure que  $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim E - \text{rg}(u) = 3 - 2 = 1$ .

Alors, d'après 2b),  $\dim(\text{Ker}(u^2)) \leq \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Ker}(u)) = 2$ .

De plus,  $3 \underset{\substack{\text{car } u^3=0 \\ \text{i.e. Ker}(u^3)=E}}{=} \dim(\text{Ker}(u^3)) \underset{2.b.}{\leq} \dim(\text{Ker}(u^2)) + \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\text{Ker}(u^2)) + 1$ . Donc,  $\dim(\text{Ker}(u^2)) \geq 2$ .

Ainsi,  $\dim(\text{Ker}(u^2)) = 2$ .

b. Montrer que l'on peut trouver un vecteur  $a$  non nul de  $E$  tel que  $u^2(a) \neq 0$  et en déduire que la famille  $(u^2(a), u(a), a)$  est une base de  $E$ .

$\dim(\text{Ker } u^2) = 2 < 3 = \dim(E)$ . Donc,  $\text{Ker}(u^2) \subsetneq E$ . Donc  $E$  contient un vecteur  $a$  qui n'appartient pas à  $\text{Ker } u^2$  et qui vérifie par conséquent,  $u^2(a) \neq 0$ .

Montrons que  $(u^2(a), u(a), a)$  est une base de  $E$ .

$(u^2(a), u(a), a)$  est une famille de 3 vecteurs de  $E$ . Comme  $3 = \dim E$ , pour prouver que cette famille est une base de  $E$ , il suffit de prouver que cette famille est libre.

(\*)

Soit  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  des réels tels que  $\alpha u^2(a) + \beta u(a) + \gamma a \stackrel{(*)}{=} 0$ .

Alors  $u^2(\alpha u^2(a) + \beta u(a) + \gamma a) = u^2(0)$ . Comme  $u$  est linéaire, cette égalité s'écrit aussi  $\alpha u^4(a) + \beta u^3(a) + \gamma u^2(a) = 0$

Et finalement, puisque  $u^3 = 0$  et donc  $u^4 = 0$ , il reste  $\gamma u^2(a) = 0$ . Je conclus en utilisant les règles de calcul sur les vecteurs : comme  $u^2(a) \neq 0$ , nécessairement  $\gamma = 0$ . Alors l'égalité (\*) s'écrit :  $\alpha u^2(a) + \beta u(a) = 0$ .

Alors  $u(\alpha u^2(a) + \beta u(a)) = u(0)$ . Comme  $u$  est linéaire, cette égalité s'écrit aussi  $\alpha u^3(a) + \beta u^2(a) = 0$

Et finalement, puisque  $u^3 = 0$ , il reste  $\beta u^2(a) = 0$ . Je conclus en utilisant les règles de calcul sur les vecteurs, comme  $u^2(a) \neq 0$ , nécessairement  $\beta = 0$ . Alors l'égalité (\*) s'écrit :  $\alpha u^2(a) = 0$ . comme  $u^2(a) \neq 0$ , nécessairement  $\alpha = 0$ .

J'en conclus que la famille  $B = (u^2(a), u(a), a)$  est libre et finalement est une base de  $E$ .

c. Ecrire la matrice  $U$  de  $u$  et la matrice  $V$  de  $u^2 - u$  dans cette base.

$$U = \text{mat}_B u = \begin{pmatrix} u^3(a) & u^2(a) & u(a) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} u^2(a) \\ u(a) \\ a \end{matrix} \text{ car } \begin{cases} u(u^2(a)) = u^3(a) = 0 = \mathbf{0}u^2(a) + \mathbf{0}u(a) + \mathbf{0}a \\ u(u(a)) = u^2(a) = \mathbf{1}u^2(a) + \mathbf{0}u(a) + \mathbf{0}a \\ u(a) = \mathbf{0}u^2(a) + \mathbf{1}u(a) + \mathbf{0}a \end{cases}$$

$$V = \text{mat}_B v = U^2 - U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant :  $u^2 = 0$  et  $\text{rg}(u) = 1$

a. Montrer que l'on peut trouver un vecteur  $b$  non nul de  $E$  tel que  $u(b) \neq 0$

Le Théorème du rang assure que  $\dim \text{Ker}(u) = 2$ . Donc  $\text{Ker}(u) \subsetneq E$ . Donc  $E$  contient un vecteur  $b$  qui n'appartient pas à  $\text{Ker}(u)$  et qui vérifie par conséquent,  $u(b) \neq 0$ .

b. Justifier l'existence d'un vecteur  $c$  de  $\text{Ker}(u)$  tel que  $(u(b), c)$  soit libre puis montrer que la famille  $(b, u(b), c)$  est une base de  $E$ .

$u^2(b) = 0$  i.e  $u(b) \in \text{Ker}(u)$ . Donc  $u(b)$  est un vecteur non nul de  $\text{Ker}(u)$ . Comme  $\dim \text{Ker}(u) = 2$ , on peut compléter la famille libre  $(u(b))$  par un vecteur  $c$  de  $\text{Ker}(u)$  pour obtenir une base de  $\text{Ker}(u)$ . Ainsi,  $(c, u(b))$  est une base de  $\text{Ker}(u)$  et est donc une famille libre de vecteur de  $E$ .

Montrons que  $(b, u(b), c)$  est une base de  $E$ . il suffit comme précédemment de prouver que cette famille est libre.

(\*\*)

Soit  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  des réels tels que  $\alpha b + \beta u(b) + \gamma c \stackrel{(**)}{=} 0$ . Alors  $u(\alpha b + \beta u(b) + \gamma c) = u(0)$ . Comme  $u$  est linéaire, cette égalité s'écrit aussi  $\alpha u(b) + \beta u^2(b) + \gamma u(c) = 0$ . Et finalement, puisque  $u^2 = 0$  et  $c \in \text{Ker}(u)$ , il reste  $\alpha u(b) = 0$ . Je conclus en utilisant les règles de calcul sur les vecteurs : comme  $u(b) \neq 0$ , nécessairement  $\alpha = 0$ . Alors l'égalité (\*\*)

s'écrit :  $\beta u(b) + \gamma c = 0$ . Comme  $(c, u(b))$  est libre, nécessairement,  $\beta = \gamma = 0$ . J'en conclus que la famille  $B = (b, u(b), c)$  est libre et finalement est une base de  $E$ .

c. Ecrire la matrice  $U'$  de  $u$  et la matrice  $V'$  de  $u^2 - u$  dans cette base.

$$U' = \text{mat}_B u = \begin{pmatrix} u(b) & u^2(b) & u(c) \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ 1 & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} b \\ u(b) \\ c \end{matrix} \text{ car } \begin{cases} u(b) = 0b + 1u(b) + 0c \\ u(u(b)) = u^2(b) = 0 = 0b + 0u(b) + 0c \\ u(c) = 0 = 0b + 0u(b) + 0c \end{cases}$$

$$V' = \text{mat}_B v = U'^2 - U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### PARTIE III

Soit désormais une matrice  $A$  de  $M_3(\mathbb{R})$  semblable à une matrice du type  $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On se propose de montrer que  $A$  est semblable à son inverse  $A^{-1}$ .

On pose alors  $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et soit  $P$  de  $GL_3(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP = T = I + N$

5. Expliquer pourquoi la matrice  $A^{-1}$  existe.

$$\det(A) \stackrel{\text{d'après 1.d.}}{=} \det(T) \stackrel{\text{car } T \text{ est triangulaire}}{=} 1 \neq 0. \text{ Par conséquent, } A \text{ est inversible et } A^{-1} \text{ existe.}$$

*donc  $\det(T) = \text{produit des coeff de sa diagonale}$ .*

6. Calculer  $N^3$  et montrer que  $P^{-1}A^{-1}P = I - N + N^2$ .

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = (0). \text{ Donc, } (I + N)(I - N + N^2) = I - N^3 = I.$$

$$\text{Par conséquent, } I - N + N^2 = (I + N)^{-1} = T^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} \stackrel{(QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}}{=} (AP)^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P.$$

7. Quel est le rang de  $N$  ?

Le rang de  $N$  dépend des valeurs de  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ .

Si  $\alpha$  et  $\gamma$  non nuls alors  $\text{rg}(N) = 2$ .

Si  $(\alpha = 0 \text{ et } \gamma \neq 0)$  ou  $((\alpha, \beta) \neq (0,0) \text{ et } \gamma = 0)$  alors  $\text{rg}(N) = 1$ .

Si  $\alpha = 0 = \gamma = \beta$  alors  $\text{rg}(N) = 0$ .

8. On suppose dans cette question que  $N = 0$  i.e.  $\text{rg}N = 0$ . Montrer alors que les matrices  $A$  et  $A^{-1}$  sont semblables.

$$N = 0 \text{ donc } P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \text{ Alors } A = PIP^{-1} = I \text{ et } A^{-1} = I = A. \text{ Donc } A \text{ et } A^{-1} \text{ sont semblables.}$$

9. On suppose dans cette question que  $\text{rg}(N) = 2$ . On pose  $M = N^2 - N$ .

a. Montrer que la matrice  $N$  est semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et en déduire une matrice simple semblable à  $M$ .

Prenons  $E = \mathbb{R}^3$ . Les résultats des parties I et II s'appliquent dans  $E$ .

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont  $N$  est la matrice dans la base canonique  $C$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Alors  $u^3 = 0$  car  $N^3 = 0$  et  $\text{rg}(u) = \text{rg}(N) = 2$ . Donc, les questions 3 b et c assurent qu'il existe une base  $B$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que :

$$U = \text{mat}_B u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. U \text{ et } N \text{ sont alors deux matrices d'un même endomorphisme ; la question 1. d. permet alors de conclure que } U \text{ et } N \text{ sont semblables i.e. il existe } Q \text{ inversible telle que } N = Q^{-1}UQ.$$

Alors,  $M = N^2 - N = Q^{-1}UQQ^{-1}UQ - Q^{-1}UQ = Q^{-1}U^2Q - Q^{-1}UQ = Q^{-1}(U^2 - U)Q = Q^{-1}VQ$ . Donc  $M$  est semblable à  $V$ .

b. Calculer  $M^3$  et  $\text{rg}(M)$ .

$$\text{Comme } M = Q^{-1}VQ, M^3 = Q^{-1}V^3Q = 0 \text{ et } \text{rg}(M) = \text{rg}(V) = 2.$$

c. Montrer que les matrices  $N$  et  $M$  sont semblables.

$M$  vérifie donc les mêmes propriétés que  $N$  qui ont permis de prouver que  $N$  est semblable à  $U$ . J'en déduis donc que  $M$  est elle-même semblable à  $U$ . Et par conséquent, la question 1c permet de conclure que  $M$  et  $N$  sont semblables.

d. Montrer que les matrices  $A$  et  $A^{-1}$  sont semblables.

$M$  et  $N$  sont semblables donc il existe une matrice  $H$  inversible telle que :  $M = H^{-1}NH$ .

Alors,  $Z = P^{-1}A^{-1}P = I - N + N^2 = I + M = H^{-1}IH + H^{-1}NH = H^{-1}(I + N)H = H^{-1}AH$ .

J'en déduis que  $A^{-1}$  et  $A$  sont semblables à une même matrice  $Z$  et par conséquent d'après 1d.,  $A^{-1}$  et  $A$  sont semblables.

10. On suppose dans cette question que  $rg(N) = 1$ . On pose  $M = N^2 - N$ .

Montrer que les matrices  $A$  et  $A^{-1}$  sont semblables.

On montre de même que  $N$  et  $U'$  sont semblables puis  $M$  et  $V'$  et enfin  $M$  et  $U'$ . J'en déduis que  $M$  et  $N$  sont semblables.

Et comme au 9d., il en découle que  $A^{-1}$  et  $A$  sont semblables.

11. Exemple : soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice  $A$ .

a. Déterminer tous les réels  $\lambda$  tels que l'équation  $u(X) = \lambda X$  admette une solution  $X$  non nulle. Trouver alors une base  $\text{Ker}(u - \lambda id)$ .

$\exists X \neq 0, u(X) = \lambda X \Leftrightarrow \exists X \neq 0 / (u - \lambda id)(X) = 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(u - \lambda id) \neq \{0\} \Leftrightarrow u - \lambda id$  n'est pas injective  
 $\Leftrightarrow u - \lambda id$  n'est pas bijective  $\Leftrightarrow A - \lambda I$  non inversible  $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$ . Or,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{car } A-\lambda I = \text{mat}_C(u-\lambda id)}{\equiv} (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda+1 & -1 \\ -1+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

Donc  $\exists X \neq 0, u(X) = \lambda X \Leftrightarrow \lambda = 1$ .

Cherchons une base de  $\text{Ker}(u - id)$ . On sait que  $\text{mat}_C(u - id) = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Soit  $X = (x, y, z)$ .

$$X \in \text{Ker}(u - id) \Leftrightarrow (u - id)(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = -z.$$

Donc,  $\text{Ker}(u - id) = \{(x, z, -z) / x, z \text{ réels}\} = \text{vect} \left( \underbrace{(1, 0, 0), (0, 1, -1)}_{\text{clairement non colinéaires}} \right)$ .

Donc  $((1, 0, 0), (0, 1, -1))$  est une base de  $\text{Ker}(u - id)$ .

b. Montrer que  $A$  est semblable à  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Et conclure que les matrices  $A$  et  $A^{-1}$  sont semblables.

Déterminer une base  $C' = (a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $\text{mat}_{C'} u = T$ .

Il existe une base  $C' = (a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $\text{mat}_{C'} u = T$

si et seulement si il existe trois vecteurs  $a, b$  et  $c$  linéairement indépendants tels que  $\begin{cases} u(a) = a \\ u(b) = b \\ u(c) = b + c \end{cases}$

si et seulement si il existe trois vecteurs  $a, b$  et  $c$  linéairement indépendants tels que  $\begin{cases} a \in \text{Ker}(u - id) \\ b \in \text{Ker}(u - id) \\ (u - id)(c) = b \end{cases}$

si et seulement si il existe trois vecteurs  $a, b$  et  $c$  linéairement indépendants tels que  $\begin{cases} a \in \text{Ker}(u - id) \\ b \in \text{Ker}(u - id) \cap \text{Im}(u - id) \\ (u - id)(c) = b \end{cases}$ .

Or,  $\text{Ker}(u - id) = \text{vect}((1, 0, 0), (0, 1, -1))$  et d'après la matrice de  $u - id$  dans  $C$ ,  $(0, 1, -1) = (u - id)((1, 0, 0)) \in \text{Im}(u - id)$ .  
 donc  $(0, 1, -1) \in \text{Ker}(u - id) \cap \text{Im}(u - id)$ .

Posons  $b = (0, 1, -1), c = (0, 1, 0)$  et  $a = (1, 0, 0)$ .

Alors  $\begin{cases} a \in \text{Ker}(u - id) \\ b \in \text{Ker}(u - id) \cap \text{Im}(u - id) \\ (u - id)(c) = b \end{cases}$ . De plus, la famille  $(a, b, c)$  est échelonnée en 0 par la droite et ne contient pas le

triplet nul et est donc libre. J'en déduis que  $(a, b, c)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $\text{mat}_{C'} u = T$  et ainsi on peut conclure que  $A$  et  $T$  sont semblables. Alors d'après les questions précédentes, je peux désormais affirmer que  $A$  et  $A^{-1}$  sont semblables.

12. Toute matrice de  $M_3(\mathbb{R})$  semblable à son inverse est-elle semblable à une matrice du type  $T$  ?

NON. Donnons un contre-exemple. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{mat}_C u$  où  $C = (e_1, e_2, e_3)$  base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Alors  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ . Donc  $A^{-1} = \text{mat}_{C'} u$  où  $C' = (e_1, e_3, e_2)$  est une autre base de  $\mathbb{R}^3$   
 $c'$  est évident puisque on a juste échangé deux vecteurs de  $C$

Comme  $A$  et  $A^{-1}$  sont deux matrices d'un même endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ ,  $A$  et  $A^{-1}$  sont semblables.

Justifions que  $A$  n'est pas semblable à  $T$ .

$$\forall P \in GL_3(\mathbb{R}), \det(P^{-1}TP - 2I) = \det(P^{-1}TP - P^{-1}(2I)P) = \det(P^{-1}(T - 2I)P)$$

$$\det(P^{-1}TP - 2I) = \det P^{-1} \times \det(T - 2I) \times \det P = \frac{1}{\det(P)} \times \det(T - 2I) \times \det P$$

$$\det(P^{-1}TP - 2I) = \det(T - 2I) = -1.$$

Or  $\det(A - 2I) = 0 \neq \det(P^{-1}TP - 2I)$ . Donc  $\forall P \in GL_3(\mathbb{R}), P^{-1}TP \neq T$ . Ainsi  $T$  et  $A$  ne sont pas semblables tandis que  $A$  et  $A^{-1}$  le sont.